УДК 517.968

А. Г. Буслаев

Факторизация специального интегрального оператора

Метод факторизации операторов [1, 2] полезен при решении многих задач. В настоящей работе задача факторизации решается для необратимого оператора

$$Sf = \int_0^\omega S(x, t) f(t)\, dt, \quad 0 \leqslant x \leqslant \omega < \infty, \quad f \in L(0, \omega),$$

со специальным ядром $S(x, t) = |x - t| + K(x, t)$, $K(x, t) \in C_{[0,\omega]\times[0,\omega]}$.

Доказывается возможность представления оператора S на множестве функций из L $(0, \omega)$ в виде произведения двух операторов

$$S = S_- S_+, \tag{1}$$

где сомножители $S_\pm$ — вольтерровы операторы I рода,

$$S_-\varphi = \int_0^x S_-(x, t)\, \varphi(t)\, dt, \quad \varphi \in C_{[0,\omega]},$$

$$S_+ f = \int_x^\omega S_+(x, t)\, f(t)\, dt, \quad f \in L(0, \omega),$$

с непрерывными ядрами $S_\pm(x, t)$.

Теорема. *Пусть*

$$S(0, t) \equiv S(x, 0) \equiv 0, \quad 0 \leqslant x, t \leqslant \omega, \tag{2}$$

и при любом ξ, $0 < \xi \leqslant \omega$, *уравнение*

$$g(x) - \frac{1}{2}\int_0^\xi \frac{\partial^2 K(x, t)}{\partial x \partial t}\, g(t)\, dt = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \xi,$$

имеет в L^2 $(0, \xi)$ *лишь тривиальное решение. Тогда оператор* S *допускает факторизацию* (1).

Доказательство. Из (2) вытекает возможность представления оператора S в виде

$$Sf = \int_0^x \frac{\partial}{\partial y} [\int_0^\omega S(y,t)\left(-\frac{\partial}{\partial t}\int_t^\omega f(\tau)\,d\tau\right)dt]dy = -2\int_0^x \Big[\int_y^\omega f(\tau)\,d\tau +$$

$$+\int_0^\omega B(y,t)\int_t^\omega f(\tau)\,d\tau dt\Big]dy, \quad f \in L(0,\omega), \tag{3}$$

где $B(x,t) = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 K(x,t)}{\partial x \partial t}$.

В силу второго условия теоремы оператор

$$(I+B)f = f(x) + \int_0^\omega B(x,t)f(t)\,dt, \quad f \in L^2(0,\omega),$$

допускает факторизацию $I+B=(I+X_-)(I+X_+)$ с факторизующими операторами

$$(I+X_-)f = f(x) + \int_0^x X_-(x,t)f(t)\,dt, \quad f \in L^2(0,\omega),$$

$$(I+X_+)f = f(x) + \int_x^\omega X_+(x,t)f(t)\,dt, \quad f \in L^2(0,\omega).$$

Ядра $X_\pm(x,t)$ непрерывны вследствие непрерывности ядра $B(x,t)$. Теперь (3) можно представить так:

$$Sf = -2\int_0^x \Big[\int_y^\omega f(\tau)\,d\tau + \int_y^\omega X_+(y,t)\int_t^\omega f(\tau)\,d\tau dt + \int_0^y X_-(y,t)\int_t^\omega f(\tau)\,d\tau dt +$$

$$+\int_0^y X_-(y,t)\int_t^\omega X_+(t,s)\int_s^\omega f(\tau)\,d\tau ds dt\Big]\,dy, \quad f \in L(0,\omega). \tag{4}$$

Полагая

$$S_-\varphi = \sqrt{2}i\int_0^x \Big[\varphi(t) + \int_0^t X_-(t,s)\varphi(s)\,ds\Big]\,dt, \quad \varphi \in C_{[0,\omega]},$$

$$S_+f = \sqrt{2}i\Big[\int_x^\omega f(\tau)\,d\tau + \int_x^\omega X_+(x,t)\int_t^\omega f(s)\,ds dt\Big], \quad f \in L_{(0,\omega)},$$

из (4) получаем (1). Теорема доказана.

Пример 1. Для оператора

$$Sf = \int_0^\omega [|x-t| - x - t]\,f(t)\,dt, \quad f \in L(0,\omega) \tag{5}$$

факторизующими операторами будут

$$S_-\varphi = \sqrt{2}i\int_0^x \varphi(t)\,dt, \quad \varphi \in C[0,\omega], \tag{6}$$

$$S_+f = \sqrt{2}i\int_x^\omega f(t)\,dt, \quad f \in L(0,\omega). \tag{7}$$

Метод факторизации также можно применять к оператору, у которого условие (2) для ядра не выполнено. Рассмотрим оператор $\tilde{S}f = \int_0^\omega \tilde{S}(x,t)f(t)\,dt$, $f \in L(0,\omega)$, с ядром $\tilde{S}(x,t = |x-t| + \tilde{K}(x,t)$, $\tilde{K}(x,t) \in C^2_{[0,\omega]\times[0,\omega]}$, $\tilde{S}(0,0) \neq 0$. Разложим оператор $\tilde{S}$ на сумму двух операторов

$$\tilde{S} = S + L, \tag{8}$$

имеющих соответственно ядра $S(x, t) = S(x, t) - \tilde{S}(x, t) - \dfrac{\tilde{S}(x, 0)\tilde{S}(0, t)}{S(0, 0)}$, $L(x, t) = \dfrac{\tilde{S}(x, 0)\tilde{S}(0, t)}{\tilde{S}(0, 0)}$ В разложении (8; ядро оператора S удовлетворяет условию (2), а оператор $Lf = \dfrac{(\tilde{S}f)(0)}{\tilde{S}(0, 0)}\tilde{S}(x, 0)$ одномерный. Если для оператора S выполняется еще второе условие теоремы, то получим представление для оператора $\tilde{S}$

$$\tilde{S}f = S_{-}S_{+}f + \frac{(\tilde{S}f)(0)}{\tilde{S}(0, 0)}\tilde{S}(x, 0), \quad f \in L(0, \omega), \tag{9}$$

которое отличается одномерным слагаемым от обычного представления операторов при факторизации в виде произведения двух операторов.

Пример 2. Во многих задачах [3] важное значение имеет оператор

$$\tilde{S}f = \int_0^\infty e^{-\nu|x-t|} f(t)\, dt, \quad \nu > 0, \quad f \in L(0, \omega). \tag{10}$$

Записав разложение (8) для оператора (10), а затем применив к оператору S метод факторизации, найдем

$$\tilde{S}f = S_{-}S_{+}f + \int_0^\infty e^{-\nu(x+t)} f(t)\, dt, \quad f \in L(0, \omega),$$

где

$$S_{-}\varphi = \sqrt{2\nu}\int_0^x e^{\nu(t-x)}\varphi(t)\, dt, \quad \varphi \in C[0, \omega],$$

$$S_{+}f = \sqrt{2\nu}\int_x^\omega e^{\nu(x-t)} f(t)\, dt, \quad f \in L(0, \omega).$$

В заключение отметим, что из (5) — (7) следует

$$\int_0^\omega |x - t| f(t)\, dt = -2\int_0^x \int_t^\omega f(\tau)\, d\tau dt + \int_0^\omega (x + t) f(t)\, dt, \quad f \in L(0, \omega). \tag{11}$$

В (11) оператор $\tilde{S}f = \int_0^\infty \tilde{S}(x, t) f(t)\, dt$ с ядром $\tilde{S}(x, t) = |x - t|$ представлен в виде произведения двух операторов и двумерного слагаемого, т. е.

$$\tilde{S}f = S_{-}S_{+}f + (\tilde{S}f)(0) + \tilde{S}(x, 0)\int_0^\infty f(t)\, dt, \quad f \in L(0, \omega). \tag{12}$$

(Здесь операторы $S_{\pm}$ определены формулами (6) и (7).) Такое представление является общим для случая, когда $\tilde{S}(0, 0) = 0$, а условие $\tilde{S}(0, t) = \tilde{S}(x, 0) = 0$ не выполнено для всех x и t из $[0, \omega]$.

Формула (12) легко получается из (8), если взять $S(x, t) = \tilde{S}(x, t) - \tilde{S}(0, t) - \tilde{S}(x, 0)$, $L(x, t) = \tilde{S}(0, t) + \tilde{S}(x, 0)$, при условии, что оператор S допускает факторизацию.

1. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения.— М. : Наука, 1967.—508 с.
2. *Сахнович Л. А.* Факторизация операторов в $L^2(a, b)$ // Функцион. анализ.— 1979.— 13, № 3.— С. 40—45.

3. *Солодовников В. В.* Статистическая динамика линейных систем автоматического управления.— М. : Физматгиз, 1960.— 655 с.

Одес. электротехн. ин-т связи

Получено 31.03.86