УДК 513.88

Г. С. Смирнов

Замечание о наилучшем приближении в среднем векторнозначных функций

Пусть X — вещественное банахово пространство, $T = [0, 1]$, $C = C(T, X)$ — множество непрерывных отображений $f: T \to X$, $C_l = C_l(T, X)$ — пространство $C(T, X)$, снабженное нормой

$$\| f \|_l = \int_T \| f(t) \|_X \, dt. \tag{1}$$

В работах А. Кроо [1] ($X = R^n$) и А. Л. Гаркави [2] ($X - E$ — монотонное конечномерное пространство) достаточно полно исследована проблема единственности элемента наилучшего L_1-приближения векторнозначной функции. В данной заметке задача единственности элемента наилучшего приближения рассматривается для случая гладкого строго выпуклого пространства X.

Зафиксируем некоторое n-мерное подпространство $L \subset X$ с базисом $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Обозначим через $\Pi_{m,n}$ множество обобщенных полиномов вида $p(t) = \sum_{i=1}^{m} p_i(t) e_i$, где p_i, $i = 1, \ldots, m$, — вещественные алгебраические многочлены степени не выше m. Будем предполагать, что $n \leqslant m$.

Теорема. *Множество $\Pi_{m,n}$ является чебышевским подпространством в $C_l(T, X)$.*

Прежде чем доказывать это утверждение, установим критерий элемента наилучшего L_1-приближения векторнозначной функции. Рассмотрим опорное отображение [3] $x \to f_x$ из $X \setminus \{0\}$ в $X^* / \{0\}$. При каждом фиксированном $x \in X \setminus \{0\}$ и $y \in X$ значение $f_x(y)$ будем обозначать $\langle x, y \rangle$. Для $g \in C$ положим $Z(g) = \{t \in T : \| g(t) \|_X = 0\}$. Пусть U — некоторое выпуклое подмножество в C.

Лемма. *Для того чтобы элемент $u^* \in U$ был элементом наилучшего приближения функции $f \in C \setminus U$ в метрике C_l, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $u \in U$ выполнялось неравенство*

$$\int_{T \setminus Z(f-u^*)} \frac{\langle f(t) - u^*(t), u^*(t) - u(t) \rangle}{\| f(t) - u^*(t) \|_X} dt + \\ + \int_{Z(f-u^*)} \| u^*(t) - u(t) \|_X \, dt \geqslant 0. \tag{2}$$

Ограничимся доказательством необходимости леммы. Пусть $u^* \in U$ — элемент наилучшего приближения для $f \in C \setminus U$, $u \in U$. Из выпуклости U при каждом $\lambda \in [0, 1]$ следует неравенство

$$\| f - u^* - \lambda (u - u^*) \|_l = \| f - u^* + \lambda (u^* - u) \|_l \geqslant \| f - u^* \|_l. \qquad (3)$$

Рассмотрим на отрезке $[0, 1]$ вспомогательную функцию $\varphi(\lambda) = \| f - u^* + \lambda (u^* - u) \|_l$. Так как при всех $\lambda > 0$ и $t \in T$ выполняется неравенство

$$\left| \frac{\| f(t) - u^*(t) + \lambda (u^*(t) - u(t)) \|_X - \| f(t) - u^*(t) \|_X}{\lambda} \right| \leqslant \| u^*(t) - u(t) \|_X$$

и вследствие дифференцируемости по Гато нормы в X [3] при каждом $t \in T$ существует предел

$$\lim_{\lambda \to +0} \frac{\| f(t) - u^*(t) + \lambda (u^*(t) - u(t)) \|_X - \| f(t) - u^*(t) \|_X}{\lambda} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\langle f(t) - u^*(t),\ u^*(t) - u(t) \rangle}{\| f(t) - u^*(t) \|_X}, & t \in T \setminus Z(f - u^*), \\ \| u^*(t) - u(t) \|_X, & t \in Z(f - u^*), \end{cases}$$

то с учетом теоремы Лебега об ограниченной сходимости получим

$$\varphi'_+(0) = \int_{T \setminus Z(f-u^*)} \frac{\langle f(t) - u^*(t),\ u^*(t) - u(t) \rangle}{\| f(t) - u^*(t) \|_X} dt +$$

$$+ \int_{Z(f-u^*)} \| u^*(t) - u(t) \|_X \, dt,$$

причем вследствие неравенства (3) $\varphi'_+(0) \geqslant 0$.

Следствие [4]. *Пусть U — подпространство в C. Элемент $u^* \in U$ будет элементом наилучшего приближения для $f \in C \setminus U$ в метрике C_l тогда и только тогда, когда для каждого $u \in U$ выполняется неравенство*

$$\left| \int_{T \setminus Z(f-u^*)} \frac{\langle f(t) - u^*(t), u(t) \rangle}{\| f(t) - u^*(t) \|_X} dt \right| \leqslant \int_{Z(f-u^*)} \| u(t) \|_X \, dt. \qquad (4)$$

Доказательство теоремы. Предположим, что некоторая функция $f \in C$ имеет в пространстве $\Pi_{m,n}$ два различных полинома наилучшего приближения $p^{(1)}$ и $p^{(2)}$. Тогда, как известно, полином $p^* = (p^{(1)} + p^{(2)})/2$ также является полиномом наилучшего приближения для f. Вследствие непрерывности функций f, p^*, $p^{(1)}$, $p^{(2)}$ при всех $t \in T$ получим

$$2 \| f(t) - p^*(t) \|_X = \| f(t) - p^{(1)}(t) + f(t) - p^{(2)}(t) \|_X =$$

$$= \| f(t) - p^{(1)}(t) \|_X + \| f(t) - p^{(2)}(t) \|_X. \qquad (5)$$

Не ограничивая общности, можем считать, что $Z(f - p^*) = Z(f - p^{(1)}) = Z(f - p^{(2)})$. Положим $B = \{ t \in T : \| f(t) - p^{(1)}(t) \|_X = \| f(t) - p^{(2)}(t) \|_X \}$. Так как X — строго выпукло, то нетрудно заметить, что для каждого $t \in T$ $p^{(1)}(t) = p^{(2)}(t)$, поэтому множество B содержит не более m точек. Из включения $Z(f - p^*) \subset B$ и неравенства (4) для каждого $p \in \Pi_{m,n}$ получим

$$\int_{T \setminus Z(f-p^*)} \frac{\langle f(t) - p^*(t), p(t) \rangle}{\| f(t) - p^*(t) \|_X} dt = 0. \qquad (6)$$

Отметим, что вследствие сильно-слабой* непрерывности на единичной сфере пространства X опорного отображения [3] для каждой функции $g \in C$ функция $\langle f(t) - p^*(t),\ g(t) \rangle$ непрерывна на $T \setminus Z(f - p^*)$. Поэтому, учитывая (6), нетрудно показать, что для всех точек $t \in T \setminus B$ выполняются равенства

$$\frac{\langle f(t) - p^*(t), f(t) - p^{(i)}(t)\rangle}{\| f(t) - p^*(t)\|_X} = \| f(t) - p^{(i)}(t)\|_X, \qquad i = 1, 2,$$

откуда получаем

$$\frac{\langle f(t) - p(t),\ p^{(2)}(t) - p^{(1)}(t)\rangle}{\| f(t) - p^*(t)\|_X} =$$

$$= \| f(t) - p^{(1)}(t)\|_X - \| f(t) - p^{(2)}(t)\|_X =: r(t) \neq 0.$$

Пусть $B = \{t_1, \dots, t_k\}$, где точки t_i занумерованы в порядке возрастания и $k \leqslant m$. Очевидно, найдется полином $q \in \Pi_{m-k,n}$ такой, что

$$p^{(2)}(t) - p^{(1)}(t) = q(t) \prod_{i=1}^{k} (t - t_i).$$

Предположим, что функция $r(t)$ меняет знак при переходе через точки $t_{j_1}, t_{j_2}, \dots, t_{j_s}$ $(t_{j_\nu} \in B,\ \ \nu = 1, 2, \dots, s;\ \ j_1 < j_2 < \dots < j_s;\ \ t_{j_1} < t_{j_2} < \dots < t_{j_s})$. Тогда для полинома $\tilde{p} \in \Pi_{m,n}$ вида

$$\tilde{p}(t) = q(t) \prod_{i=1}^{k} (t - t_i) / \prod_{\nu=1}^{s} (t - t_{j_\nu})$$

выражение $\langle f(t) - p^*(t), \tilde{p}(t)\rangle$ сохраняет знак на T, причем для всех $t \in T \setminus B$ $\langle f(t) - p^*(t), \tilde{p}(t)\rangle \neq 0$. Отсюда следует, что

$$\int\limits_{T \setminus Z(f-p^*)} \frac{\langle f(t) - p^*(t),\ \tilde{p}(t)\rangle}{\| f(t) - p^*(t)\|_X}\, dt \neq 0$$

в противоречии с (6). Теорема доказана.

1. *Kroó A.* Best L_1-approximation of vector valued functions // Acta math. Acad. Sci Hung.— 1982.— **39**, N 1—3.— P. 303—310.
2. *Гаркави А. Л.* О единственности наилучшего в среднем приближения векторнозначных функций // Мат. заметки.— 1986.— **39**, № 3.— С. 337—348.
3. *Дистель Дж.* Геометрия банаховых пространств.— Киев : Вища шк., 1980.— 216 с.
4. *Rosema E.* Almost Chebyshev supspaces of $L^1(\mu, E)$ // Pacific J. Math. — 1974.— **53**.— P. 585—604.

Киев. ун-т

Получено 08.12.88