УДК 517.53

А. П. Голуб

Обобщенные моментные представления базисных гипергеометрических рядов

Приведем необходимые определения.

Определение 1 (см. [1]). *Пусть $f(z)$ — формальный степенной ряд вида*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k. \tag{1}$$

Обобщенным моментным представлением ряда (1) *называется система равенств*

$$s_{i+j} = \int_{-\infty}^{\infty} a_i(t)\, b_j(t)\, d\mu(t), \quad i, j = \overline{0, \infty}, \tag{2}$$

где $\mu(t)$ — неубывающая функция на $(-\infty, \infty)$, а $\{a_i(t)\}_{i=0}^{\infty}$ и $\{b_j(t)\}_{j=0}^{\infty}$ — некоторые последовательности измеримых функций на $(-\infty, \infty)$, таких, что все интегралы в (2) *существуют и принимают конечные значения.*

Обобщенные моментные представления, предложенные В. К. Дзядыком в 1981 г. [1], широко применяются в вопросах рациональной аппроксимации и аналитического продолжения функций (см. [2, 3]).

В настоящей работе строятся и анализируются обобщенные моментные представления базисных гипергеометрических рядов, рассмотренных впервые Э. Гейне в 1878 г. (см., например, [4]).

Определение 2 [4, с. 195—196]. *Базисным гипергеометрическим рядом называется степенной ряд вида*

$${}_r\Phi_s\left[\begin{matrix}\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r; z\\ \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_s\end{matrix}\right] := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_{q,n}(\alpha_2)_{q,n}\cdot \ldots \cdot(\alpha_r)_{q,n}}{(q)_{q,n}(\rho_1)_{q,n}\cdot \ldots \cdot(\rho_s)_{q,n}} z^n, \tag{3}$$

где

$$(a)_{q,n} := (1-a)(1-aq)(1-aq^2)\cdot\ldots\cdot(1-aq^{n-1}) = (1-q)^n\left(\frac{1-a}{1-q}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{1-a}{1-q}+a\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1-a}{1-q}+a+aq+\ldots+aq^{n-2}\right); \qquad (a)_{q,0} := 1,$$

а $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$; $\rho_1, \ldots, \rho_s$; q — параметры, причем $q \neq 1$.

Теорема 1. *Для функции*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}s_nz^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(\gamma+1+\rho)\,[\gamma+1+\rho\,(1+q)]\cdot\ldots\cdot[\gamma+1+\rho\times(1+q+\ldots+q^n)]}=$$

$$=\left(\frac{1-\rho}{1-q}\right)z^{-2}\left\{{}_1\Phi_1\left[\begin{matrix}q;\,(1-q)\,z\\ \rho\end{matrix}\right]-1-\frac{z\,(1-q)}{1-\rho}\right\},\tag{4}$$

если только $\gamma:=\dfrac{q-\rho}{1-q}>-1;\ \rho,\,q>0;\ q\neq1,$ *имеет место обобщенное моментное представление вида*

$$s_{i+j}=\int_0^1 a_i(t)\,b_j(t)\,\mathrm{dt},\quad i,j=\overline{0,\infty},\tag{5}$$

где

$$a_i(t)=\frac{t^{\rho\lambda_{i+1}(q)}}{\prod\limits_{r=1}^{i}\left(\gamma+1+\rho\,\dfrac{q^r-1}{q-1}\right)},\quad i=\overline{0,\infty};\tag{6}$$

$$b_j(t)=\frac{t^{\nu}(q-1)^j}{\prod\limits_{r=1}^{j}(q^r-1)}\sum_{m=0}^{j}(-1)^m q^{\frac{m(m-1)}{2}}\left[\sum_{r=1}^{m}\frac{(q^{j-r+1}-1)}{(q^r-1)}\right]t^{\tilde{\lambda}_m(q)},\quad j=\overline{0,\infty};$$

$$\lambda_i(q):=\frac{q^i-1}{q-1},\quad i=\overline{1,\infty};\qquad \tilde{\lambda}_m(q):=\frac{q^m-1}{(q-1)\,q^m},\quad m=\overline{0,\infty}.\tag{7}$$

Доказательство. Заметим, что линейный ограниченный оператор $A:C\,[0,1]\to C\,[0,1]$ вида

$$(A\varphi)(t)=t^{\rho}\int_0^1\varphi(t^qu)\,u^{\nu}\mathrm{d}u\tag{8}$$

обладает следующими свойствами:

$$1)\ (Aa_i)(t)=a_{i+1}(t),\quad i=\overline{0,\infty},\tag{9}$$

где функции $a_i(t)$ определены по формулам (6);

2) для произвольных интегрируемой на $[0,1]$ функции $\psi(t)$ и непрерывной на $[0,1]$ функции $\varphi(t)$ имеет место равенство

$$\int_0^1(A\varphi)(t)\,\psi(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1\varphi(t)\,(B\psi)(t)\,\mathrm{d}t,\tag{10}$$

где оператор $B:L^1[0,1]\to L^1[0,1]$ имеет вид

$$(B\psi)(t)=\frac{1}{q}\,t^{\nu}\int_t^1\psi(v^{1/q})\,v^{\frac{v+1-\gamma q-2q}{q}}\,\mathrm{d}v.\tag{11}$$

Справедливость равенства (10) устанавливается непосредственно с использованием замены переменных и интегрирования по частям;

3) k-е степени операторов A и B имеют соответственно вид

$$(A^k\varphi)(t)=\frac{t^{\rho\lambda_k(q)}(q-1)^{k-1}}{\prod\limits_{r=1}^{k-1}(q^r-1)}\int_0^1\varphi(t^{q^k}u)\,u^{\nu}\sum_{m=0}^{k-1}(-1)^m q^{\frac{m(m-1)}{2}}\times$$

$$\times\left[\prod_{l=1}^{m}\left(\frac{q^{k-l}-1}{q^{l}-1}\right)\right]u^{\tilde{\lambda}_{m}(q)}\mathrm{d}u,\quad k\geqslant 1, \tag{12}$$

$$(B^{k}\psi)(t)=\frac{t^{\gamma}(q-1)^{k-1}}{q^{k}\prod\limits_{r=1}^{k-1}(q^{r}-1)}\int_{t}^{1}\sum_{m=0}^{k-1}(-1)^{m}\left[\prod_{l=1}^{m}\frac{(q^{k-l}-1)}{(q^{l}-1)}\right]\times$$

$$\times q^{m(m-1)/2}\left(\frac{t}{v}\right)^{\tilde{\lambda}_{m}(q)}v^{\rho\tilde{\lambda}_{k}(q)+1/q^{k}-(\gamma+2)}\psi(v^{1/q^{k}})\,\mathrm{d}v,\quad k\geqslant 1. \tag{13}$$

Формула (12) устанавливается с помощью (8) методом индукции. Формула (13) затем выводится из (12) с применением равенства

$$\int_{0}^{1}(A^{k}\varphi)(t)\,\psi(t)\,\mathrm{d}t=\int_{0}^{1}\varphi(t)\,(B^{k}\psi)(t)\,\mathrm{d}t, \tag{14}$$

которое следует из (10).

Подставив в (13) вместо $\psi(t)$ функцию $b_0(t)=t^{\gamma}$ и произведя интегрирование, получим формулу (7). Этим доказательство теоремы завершено.

Теорема 2. *Для функции $f(z)$ вида* (4) *при условиях теоремы 1 (т. е. $j>-1$; $\rho, q>0$; $q\neq 1$) существуют и невырождены полиномы Паде порядка $[N-1/N]$, $N=\overline{1,\infty}$.*

Доказательство. Из формул (6) и (7) видно, что системы функций $\{t^{-\rho}a_i(t)\}_{i=0}^{N}$ и $\{t^{-\gamma}b_j(t)\}_{j=0}^{N}$ при каждом $N=\overline{0,\infty}$ являются чебышевскими (см. [5, с. 20 — 21]). Согласно лемме 1 из [6] в таком случае $\forall N=\overline{0,\infty}$ существует обобщенный полином

$$A_N(t)=\sum_{i=0}^{N}c_i^{(N)}a_i(t), \tag{15}$$

обладающий свойствами биортогональности:

$$\int_{0}^{1}A_N(t)\,b_j(t)\,\mathrm{d}t=\delta_{N,j},\quad j=\overline{0,N}. \tag{16}$$

При этом $t^{-\rho}A_N(t)$ имеет в точности N различных корней на $(0, 1)$, откуда, в частности, вытекает, что $c_0^{(N)}$ и $c_N^{(N)}$ при каждом N отличны от нуля. Тогда по теореме 2.1 из [7] полиномы Паде $[N-1/N]_f(z)$ могут быть записаны в виде

$$[N-1/N]_f(z)=\frac{\sum\limits_{i=1}^{N}c_i^{(N)}z^{N-i}T_{i-1}(f;z)}{\sum\limits_{i=0}^{N}c_i^{(N)}z^{N-i}}, \tag{17}$$

где $T_i(f;z)$ — частные суммы ряда (4) порядка i. При этом для погрешности приближения имеет место интегральное представление

$$f(z)-[N-1/N]_f(z)=\frac{z^{N}}{Q_N(z)}\int_{0}^{1}A_N(t)\,B(z,t)\,\mathrm{d}t, \tag{18}$$

где $Q_N(z):=\sum\limits_{i=0}^{N}c_i^{(N)}z^{N-i}$; $\qquad B(z,t):=\sum\limits_{j=0}^{\infty}z^{j}b_j(t)$.

Если $q>1$, то (18) будет справедливо $\forall z\in\mathbb{C}$, если же $q<1$, то при $|z|<1$.

Из формулы (17) с учетом ранее отмеченных неравенств $c_0^{(N)} c_N^{(N)} \neq 0$, $N = \overline{0, \infty}$, вытекает невырожденность полиномов Паде. Теорема 2, таким образом, доказана.

Замечание. В [8] эффективно построены диагональные полиномы Паде для q-аналога экспоненциальной функции, являющегося частным случаем (4).

Теорема 3. *Для функции*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\rho+\gamma+\sigma+1)\,[\rho(q+1)+\gamma+\sigma+1]\cdot\ldots\cdot[\rho(q^{n-1}+\ldots+1)+ +\gamma+\sigma+1]}{(\rho+\gamma+1)\,[\rho(q+1)+\gamma+1]\cdot\ldots\cdot[\rho(q^n+\ldots+1)+\gamma+1]} z^n =$$

$$= \frac{(1-q)\alpha}{(1-\alpha)z\rho}\left\{{}_2\Phi_1\left[\begin{matrix} q,\ \alpha;\ \dfrac{\xi z}{\alpha q} \\ \xi \end{matrix}\right] - 1\right\} \tag{19}$$

(здесь $\alpha := \rho/\varkappa - \sigma(q-1)$; $\xi := \rho q/\varkappa$; $\varkappa := \rho - (q-1)(\gamma+1)$), *если только* $\gamma > -1$; $\rho, q > 0$; $q \neq 1$; $\sigma \neq \dfrac{\varkappa(q^r-1)}{q^r(q-1)}$, $r = \overline{1, \infty}$, *имеет место обобщенное моментное представление вида*

$$s_{i+j} = \int_0^1 a_i(t)\, b_j(t)\,\mathrm{d}t, \quad i, j = \overline{0, \infty}, \tag{20}$$

где

$$a_i(t) = t^{\rho\lambda_{i+1}(q)} \prod_{r=1}^{i} \frac{\left(\gamma+\sigma+1+\rho\dfrac{q^r-1}{q-1}\right)}{\left(\gamma+1+\rho\dfrac{q^r-1}{q-1}\right)}, \quad i = \overline{0, \infty}; \tag{21}$$

$$b_j(t) = \sum_{m=0}^{j} t^{\tilde{\lambda}_m(q)+\gamma} \prod_{l=1}^{j-m} \frac{\sigma + \varkappa\left(\dfrac{q^{l-1}-1}{q-1}\right)}{\varkappa\left(\dfrac{q^l-1}{q-1}\right)} \prod_{r=1}^{m}\left(\frac{1}{q} - \frac{\sigma(q-1)q^{r-1}}{\varkappa(q^r-1)}\right),$$

$$j = \overline{0, \infty}; \tag{22}$$

как и раньше, $\lambda_i(q) = (q^i-1)/(q-1)$, $i = \overline{1, \infty}$; $\tilde{\lambda}_m(q) = (q^m-1)/(q-1)q^m$, $m = \overline{0, \infty}$

Доказательство. Функции (21) могут быть построены путем последовательного применения к функции $a_0(t) = t^\rho$ линейного непрерывного оператора $A : C[0, 1] \to C[0, 1]$ вида

$$(A\varphi)(t) = \sigma t^\rho \int_0^1 \varphi(t^q u)\, u^\gamma \mathrm{d}u + t^\rho \varphi(t^q), \tag{23}$$

при этом очевидны равенства

$$s_i = \int_0^1 a_i(t)\, t^\gamma \mathrm{d}t, \quad i = \overline{0, \infty}. \tag{24}$$

С учетом этого построим линейный непрерывный оператор $B : L^1[0,1] \to L^1[0, 1]$ вида

$$(B\psi)(t) = \frac{\sigma}{q} t^\gamma \int_t^1 \psi(v^{1/q})\, v^{(\rho+1-\gamma q-2q)/q}\mathrm{d}v + \frac{1}{q} t^{(\rho-q+1)/q} \psi(t^{1/q}), \tag{25}$$

обладающий свойством

$$\int_0^1 (A\varphi)(t)\,\psi(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \varphi(t)\,(B\psi)(t)\,\mathrm{d}t \tag{26}$$

для произвольных интегрируемой на [0, 1] функции $\psi(t)$ и непрерывной на [0, 1] функции $\varphi(t)$.

После этого, если положить $b_0(t) = t^\gamma$, очевидно, будем иметь

$$s_{i+j} = \int_0^1 (A^i a_0)(t)\,(B^j b_0)(t)\,\mathrm{d}t. \tag{27}$$

Для доказательства теоремы осталось показать, что $(B^j b_0)(t)$, $j = \overline{0, \infty}$, выражаются по формуле (22). Формула же (22) проверяется непосредственно. Теорема доказана.

Теорема 4. *Для функции $f(z)$ вида* (19) *при условиях теоремы* 3 *(т. е. $\gamma > -1$; $\rho, q > 0$; $q \neq 1$; $\sigma \neq \varkappa\tilde{\lambda}_m(q)$, $m = \overline{1, \infty}$) существуют и невырождены полиномы Паде порядка $[N-1/N]$, $N = \overline{1, \infty}$. При этом, если $\tilde{A}_N(t)$ — обобщенный полином вида*

$$\tilde{A}_N(t) = \sum_{i=0}^{N} c_i^{(N)} a_i(t), \quad N = \overline{0, \infty}, \tag{28}$$

обладающий свойствами биортогональности

$$\int_0^1 \tilde{A}_N(t)\, b_j(t)\,\mathrm{d}t = \delta_{j,N}, \quad j = \overline{0, N}, \tag{29}$$

то полиномы Паде порядка $[N-1/N]$, $N = \overline{1, \infty}$, функции $f(z)$ могут быть записаны в виде

$$[N-1/N]_f(z) = \frac{\sum_{i=1}^{N} c_i^{(N)} z^{N-i} T_{i-1}(f; z)}{\sum_{i=0}^{N} c_i^{(N)} z^{N-i}}, \tag{30}$$

где $T_i(f; z)$ — частные суммы ряда (19) *порядка i. Тогда для погрешности приближения при $|z| < 1$ имеет место интегральное представление*

$$f(z) - [N-1/N]_f(z) = \frac{z^N}{Q_N(z)} \int_0^1 \tilde{A}_N(t)\, B(z, t)\,\mathrm{d}t, \tag{31}$$

где $Q_N(z) := \sum_{i=0}^{N} c_i^{(N)} z^{N-i}$; $B(z, t) := \sum_{j=0}^{\infty} z^j b_j(t)$.

Доказательство проводится точно так же, как и в случае теоремы 2. Заметим, что биортогональный полином $\tilde{A}_N(t)$, определенный по формулам (28), (29), с точностью до постоянного множителя совпадает с полиномом $A_N(t)$, определенным равенствами (15), (16).

1. *Дзядык В. К.* Об обобщении проблемы моментов // Докл. АН УССР. Сер. мат.— 1981.— № 6.— С. 8—12.
2. *Голуб А. П.* Применение обобщенной проблемы моментов к аппроксимации Паде некоторых функций.— Киев, 1981.— 56 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 81.58).
3. *Чын М. Н.* Обобщенная проблема моментов и интегральные представления функций.— Киев, 1985.— 48 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 85.49).
4. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра.— М. : Наука, 1965.— 296 с.

5. *Карлин С., Стадден В.* Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике.— М. : Наука, 1976.— 568 с.
6. *Голуб А. П.* Об аппроксимации Паде функции Митта — Леффлера // Теория приближения функций и ее приложения. — Киев : Ин-т математики АН УССР, 1984.— С. 52—59.
7. *Дзядык В. К., Голуб А. П.* Обобщенная проблема моментов и аппроксимация Паде.— Киев, 1981.— 58 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 81.58).
8. *Walliser R.* Rationale approximation des q-Analogons der Exponentialfunction und Irrationalitätsaussagen fur diese Function // Arch. Math.— 1985.— **44**, N 1.— S. 59—64.

Ин-т пробл. моделирования в энергетике АН УССР,
Киев

Получено 30.09.86