УДК 517.5

А. И. Степанец

Уклонения сумм Фурье на классах целых функций

В настоящей работе продолжаются исследования скорости сходимости рядов Фурье в различных метриках на классах $L_\beta^\psi\mathfrak{N}$ 2π-периодических функций $f(\cdot)$, задающихся мультипликаторами $\psi(\cdot)$ и сдвигами по аргументу β [1—3]. Рассматриваются оставшиеся случаи, когда последовательность $\psi(k)$ убывает так быстро, что все непрерывные функции из множества L_β^ψ допускают регулярное продолжение на всю комплексную плоскость.

Пусть $f \in L(0, 2\pi)$ и

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f; x) \tag{1}$$

— ее ряд Фурье. Пусть, далее, $\psi(k)$, $k \in N$, — произвольная последовательность и β — фиксированное число. Предположим, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx + \beta\pi/2) + b_k \sin(kx + \beta\pi/2))/\psi(k)$ является рядом Фурье некоторой функции из $L(0,2\pi)$. Эту функцию обозначаем $f_\beta^\psi(\cdot)$ и называем (ψ, β)-производной функции $f(\cdot)$. Множество функций $f(\cdot)$, имеющих (ψ, β)-производные обозначаем L_β^ψ; C_β^ψ — подмножество непрерывных функций из L_β^ψ. Если $f \in L_\beta^\psi$, $f \in C_\beta^\psi$, и при этом $f_\beta^\psi \in \mathfrak{R}$, где $\mathfrak{R}$ — некоторое подмножество из $L(0,2\pi)$, то говорим, что $f(\cdot)$ принадлежит классу $L_\beta^\psi \mathfrak{R}$ ($C_\beta^\psi \mathfrak{R}$). (Более подробно о таких классах см. в работах [1 — 3].) В частности, в [2] показано, что если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos(kx + \beta\pi/2) \tag{2}$$

является рядом Фурье некоторой суммируемой функции $\Psi_\beta(x)$, то классы $L_\beta^\psi \mathfrak{R}$ содержат функции, представимые свертками

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \varphi * \Psi_\beta = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t) \Psi_\beta(t)\, dt, \tag{3}$$

у которых $\varphi \in \mathfrak{R}$. Если при этом одна из функций $\varphi(\cdot)$ или $\Psi_\beta(\cdot)$ является существенно ограниченной, то свертка в (3) — непрерывная функция, и тогда совокупность функций, представимых равенством (3), совпадает с множеством $C_\beta^\psi \mathfrak{R}$.

В настоящей работе в качестве $\mathfrak{R}$ рассматриваются пространства L_p функций $\varphi(\cdot)$ с конечной нормой $\|\varphi\|_p = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(t)|^p\right)^{1/p}$ $1 \leqslant p < \infty$, (при $p = \infty$ полагаем $\|\varphi\|_\infty = \|\varphi\|_M = \operatorname{esssup} |\varphi(t)|$), единичные шары S_p в пространстве L_p, $S_p = \{\varphi : \|\varphi\|_p \leqslant 1\}$, либо классы H_ω и H_{ω_p}, $H_\omega = \{\varphi : |\varphi(\cdot + t) - \varphi(\cdot)| \leqslant \omega(t)\}$, $H_{\omega_p} = \{\varphi : \|\varphi(\cdot + t) - \varphi(\cdot)\| p \leqslant \omega(t)\}$, где $\omega(t)$ — заданный модуль непрерывности. При этом будем полагать $C_\beta^\psi S_M = C_{\beta,\infty}^\psi$ и $L_\beta^\psi S_p = L_{\beta,p}^\psi$.

Будем предполагать, что

$$\varliminf_{k\to\infty} \ln |\psi(k)|^{-1/k} = \infty. \tag{4}$$

Примером функций $\psi(k)$, удовлетворяющих этому условию, может служить функция $\psi_{\alpha,r}(k) = \exp(-\alpha k^r)$ при $\alpha > 0$ и $r > 1$.

Если через $\alpha_k = \alpha_k(f_\beta^\psi)$ и $\beta_k = \beta_k(f_\beta^\psi)$ обозначить коэффициенты Фурье функции $f_\beta^\psi(\cdot)$, то коэффициенты Фурье a_k и b_k функции $f(\cdot)$ представятся в виде

$$\begin{aligned} a_k &= \psi(k)(\alpha_k \cos\beta\pi/2 - \beta_k \sin\beta\pi/2), \\ b_k &= \psi(k)(\alpha_k \sin\beta\pi/2 + \beta_k \cos\beta\pi/2). \end{aligned} \tag{5}$$

Поэтому, если выполнено (4), то будут справедливыми также равенства $\varliminf_{k\to\infty} \ln |a_k|^{-1/k} = \varliminf_{k\to\infty} \ln |b_k|^{-1/k} = \infty$. Стало быть, если через c_k, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, обозначить комплексные коэффициенты Фурье функци $f(\cdot)$, то при этом будем иметь

$$\varliminf_{|k|\to\infty} \ln |c_k|^{-1/k} = \infty \quad \forall f \in L_\beta^\psi. \tag{6}$$

В теории регулярных функций хорошо известен факт (см., например, [4]), заключающийся в том, что если для коэффициентов $c_k = c_k(f)$ функции $f \in L(0,2\pi)$ выполнены условия $\lim_{k\to\infty} \ln |c_k|^{-1/k} = a$, $\varliminf_{k\to\infty} \ln |c_{-k}|^{-1/k} = b$, то ряд $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikz}$ сходится равномерно и абсолютно внутри полосы $-a < \operatorname{Re} z < b$ и представляет там регулярную функцию.

Объединяя это утверждение с соотношением (6), приходим к выводу, что если $\psi(k)$ удовлетворяет условию (4), то все непрерывные функции из множества L_β^ψ будут допускать регулярное продолжение на всю комплексную плоскость, т. е. функции из C_β^ψ в этом случае представляют собой сужения на действительную ось целых функций и множества L_β^ψ будут состоять только из функций, эквивалентных функциям из C_β^ψ. Значит, в рассматриваемом случае $C_\beta^\psi\mathfrak{N}$ и $L_\beta^\psi\mathfrak{N}$ — классы соответственно целых и эквивалентных целым 2π-периодических функций.

Положим $\rho_n(f; x) = f(x) - S_{n-1}(f; x)$, где $S_{n-1}(f; x)$ — частная сумма Фурье порядка $n-1$. $E_n(\varphi)_p = \inf\limits_{T_n} \|\varphi(\cdot) - T_n(\cdot)\|_p$ — наилучшее приближение в пространстве L_p функции $\varphi(\cdot)$ с помощью тригонометрических полиномов $T_n(\cdot)$ порядка n.

Основные результаты этой работы содержатся в следующих утверждениях.

Теорема 1. *Пусть $\psi(k)$ такова, что последовательность $|\psi(k)|$ монотонно убывает и удовлетворяет условию* (4). *Тогда $\forall f \in L_\beta^\psi L_p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, почти всюду выполняется равенство*

$$\rho_n(f; x) = \frac{\psi(n)}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_\beta^\psi(x+t)\cos(nt + \beta\pi/2)\,dt + \rho_{n+1}(f; x), \quad n \in N. \tag{7}$$

При этом для всех $n \geqslant n_0 = \min\{k : |\psi(k)|^{1/k} < 1\}$ справедлива оценка

$$\|\rho_{n+1}(f; x)\|_s \leqslant \frac{2\pi\,|\psi(n)|^{1+1/n}}{1 - |\psi(n)|^{1/n}}\, E_n(f_\beta^\psi)_p, \quad 1 \leqslant p,\ s \leqslant \infty. \tag{8}$$

Если $f \in C_\beta^\psi L_\infty = C_\beta^\psi M$, то равенство (7) *выполняется всюду на периоде.*

Если B — некоторый класс функций, то полагаем

$$\mathcal{E}_n(B)_s = \sup\{\|\rho_n(\varphi; x)\|_s : \varphi \in B\},$$

$$A_n(B)_s = \sup\left\{\left\|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t)\cos(nt + \beta\pi/2)\,dt\right\|_s : \varphi \in B\right\}.$$

В таких обозначениях справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть последовательность $\psi(k)$ и число n_0 удовлетворяют условиям теоремы* 1. *Тогда*

$$\mathcal{E}_n(L_{\beta,p}^\psi)_s = |\psi(n)|\,[A_n(S_p^{(0)})_s + \gamma_p(\psi; n)], \quad 1 \leqslant p,\ s \leqslant \infty, \tag{9}$$

где $S_p^{(0)} = \{\varphi : \varphi \in S_p,\ \ \varphi \perp 1\}$ и

$$\gamma_p(\psi; n) \leqslant 2\pi\,|\psi(n)|^{1/n}/(1 - |\psi(n)|^{1/n}) \overset{\mathrm{df}}{=} \gamma_n,$$

$$\mathcal{E}_n(L_\beta^\psi H_{\omega_p})_s = |\psi(n)|\,[A_n(H_{\omega_p}^{(0)})_s + \gamma_p^{(1)}(\psi; n; \omega)], \quad 1 \leqslant p,\ s < \infty, \tag{10}$$

$$|\gamma_p^{(1)}(\psi; n; \omega)| \leqslant C_p \gamma_n \omega(1/n).$$

Здесь $H_{\omega_p}^{(0)} = \{\varphi : \varphi \in H_{\omega_p},\ \varphi \perp 1\}$ и C_p — величина, зависящая только от p. В частности,

$$\mathcal{E}_n(L_{\beta,1}^\psi)_1 = |\psi(n)|\,[4/\pi + \gamma_1(\psi; n)], \tag{11}$$

$$\mathcal{E}_n(L_\beta^\psi H_{\omega_1})_1 = |\psi(n)|\left[\frac{2\theta_\omega^{(1)}}{\pi}\int_0^{\pi/2} \omega(2t/n)\sin t\,dt + \gamma_1(\psi; n; \omega)\right], \tag{11'}$$

где $\theta_\omega^{(1)} \in [1/2, 1]$, причем $\theta_\omega^{(1)} = 1$, если $\omega(t)$ — выпуклый модуль непрерывности,

$$\mathcal{E}_n(C_{\beta,\infty}^\psi)_C = |\psi(n)|\,[4/\pi + \gamma_\infty(\psi; n)], \quad |\gamma_\infty(\psi; n)| \leqslant \gamma_n, \tag{12}$$

$$\mathscr{E}_n (C^\psi_\beta H_\omega)_C = |\psi(n)| \left[\frac{2\theta\omega}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2} \omega(2t/n)\sin t dt + \gamma_\infty(\psi; n; \omega)\right], \qquad (12')$$

$$|\gamma_\infty(\psi; n; \omega)| \leqslant C\gamma_n \omega(1/n),$$

где C — абсолютная постоянная.

При любых $p, s \geqslant 1$ $A_n (S_p^{(0)})_s = \|\cos x\|_s \sup\limits_{\varphi \in S_p^{(0)}} \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}$, где $\alpha_n = \alpha_n(\varphi)$ и $\beta_n = \beta_n(\varphi)$ — коэффициенты Фурье функции $\varphi(\cdot)$. В самом деле,

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t)\cos(nt + \beta\pi/2)\,dt = \alpha_n \cos(nx - \beta\pi/2) + \beta_n \sin(nx - \beta\pi/2) =$$

$$= \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}\cos(nx + \gamma), \quad \gamma = \beta\pi/2 + \operatorname{arctg}(\beta_n/\alpha_n).$$

Значит, действительно,

$$A_n (S_p^{(0)})_s = \sup_{\varphi\in S_p^{(0)}} \|\sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}\cos(nx - \gamma)\|_s = \|\cos x\|_s \sup_{\varphi\in S_p^{(0)}} \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}.$$

Поэтому, чтобы найти $A_n (S_p^{(0)})_s$, достаточно найти величину $a_n (S_p^{(0)}) = \sup\limits_{\varphi\in S_p^{(0)}} \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}$. Если $p = 2$, то $a_n (S_p^{(0)}) = \pi^{-1/2}$. Действительно, согласно равенству Парсеваля $\|\varphi\|_2^2 = \pi \sum\limits_{k=1}^{\infty} (\alpha_k^2 + \beta_k^2)$. Стало быть, $a_n (S_p^{(0)}) \leqslant \pi^{-1/2}$. С другой стороны, полагая $\varphi^*(t) = \pi^{-1/2}\cos nt$, видим, что $\|\varphi^*\|_2 = 1$ и $\alpha_n = \alpha_n(\varphi) = \pi^{-1/2}$. Таким образом, из теоремы 2 получаем такое следствие.

Следствие. *Пусть последовательность $\psi(k)$ и число n_0 удовлетворяют условиям теоремы* 1. *Тогда* $\forall\, n \geqslant n_0$

$$\mathscr{E}_n (L^\psi_{\beta,2})_s = |\psi(n)|\,[\pi^{-1/2}\|\cos t\|_s + \gamma_2(\psi; n)], \quad s \geqslant 1, \quad |\gamma_2(\psi; n)| \leqslant \gamma_n. \quad (13)$$

В частности, при $s = 2$

$$\mathscr{E}_n (L^\psi_{\beta,2})_2 = |\psi(n)|\,[1 + \gamma_2(\psi; n)]. \qquad (13')$$

Исследования, связанные с установлением асимптотических равенств для уклонений сумм Фурье на фиксированных классах периодических функций, берут свое начало в известной работе А. Н. Колмогорова [5]. Они имеют богатую историю, с которой можно подробнее ознакомиться, например, по работе [6] (см. также [1—3]).

Доказательство теоремы 1. Выше отмечалось, что при выполнении условия (4) ряд Фурье всякой функции из L^ψ_β сходится равномерно. Поэтому $\forall f \in L^\psi_\beta$ почти всюду на периоде справедливо равенство $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k(f; x)$, причем оно будет выполняться и в каждой точке x, если $f(x)$ непрерывна. Отсюда сразу следует (7), поскольку в силу формул (5)

$$A_n(f; x) = \frac{\psi(n)}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^\psi_\beta(x+t)\cos(nt + \beta\pi/2)\,dt.$$

Нам остается получить оценку (8). Ряд (2) сходится равномерно. Стало быть, его сумма $\Psi_\beta(t)$ заведомо ограничена и потому $\forall f \in L^\psi_\beta$ почти всюду

$$\rho_{n+1}(f; x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^\psi_\beta(x+t)\,\Psi_{\beta,n}(t)\,dt, \qquad (14)$$

где $\Psi_{\beta,n}(t) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \psi(k) \cos(kt + \beta\pi/2)$, причем, если $f(\cdot)$ непрерывна, то (14) справедливо в любой точке x.

Функция $\Psi_{\beta,n}(t)$ ортогональна всякому полиному $T_n(t)$ степени n, поэтому (14) можно переписать в виде

$$\rho_{n+1}(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f_\beta^\psi(x+t) - T_n(x+t)) \Psi_{\beta,n}(t)\, dt.$$

Отсюда в силу неравенства Хаусдорфа — Юнга: $2\pi \| y*z \|_s \leqslant \| y \|_p \| z \|_q$, $1 \leqslant p \leqslant s \leqslant \infty$, $q^{-1} = 1 - p^{-1} - s^{-1}$, $y \in L_p$, $z \in L_q$, для любой функции $f(\cdot)$ из $L_\beta^\psi L_p$, $1 \leqslant p \leqslant s \leqslant \infty$, получаем $\| \rho_{n+1}(f; x) \|_s = \| (f_\beta^\psi - T_n) * \Psi_{\beta,n} \|_s \leqslant$ $\leqslant (2\pi)^{-1} \| f_\beta^\psi - T_n \|_p \| \Psi_{\beta,n} \|_q$. В рассматриваемом случае $q^{-1} \in [0, 1]$. Поэтому

$$\| \Psi_{\beta,n} \|_q = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |\Psi_{\beta,n}(t)|^q\, dt \right)^{1/q} \leqslant \| \Psi_{\beta,n} \|_M (2\pi)^{1/q} \leqslant 2\pi \| \Psi_{\beta,n} \|_C.$$

Значит, $\| \rho_{n+1}(f; x) \|_s \leqslant \| \Psi_{\beta,n} \|_C \| f_\beta^\psi - T_n \|_p$, $1 \leqslant p \leqslant s \leqslant \infty$. Если правую часть этого неравенства умножить на 2π, то такая оценка верна и при $1 \leqslant s < p \leqslant \infty$, поскольку в силу неравенства Гельдера в этом случае $\forall \varphi \in L_p$ $\| \varphi \|_s \leqslant (2\pi)^{(p-s)/ps} \| \varphi \|_p$. Выбирая в качестве $T_n(\cdot)$ полином наилучшего приближения в L_p производной $f_\beta^\psi(\cdot)$, из этого неравенства получаем

$$\| \rho_{n+1}(f; x) \|_s \leqslant 2\pi \| \Psi_{\beta,n} \|_C E_n(f_\beta^\psi)_p, \quad 1 \leqslant p, s \leqslant \infty. \tag{15}$$

Далее, из (4) заключаем, что $\overline{\lim_{k\to\infty}} | \psi(k) |^{1/k} = 0$. Это, очевидно, равносильно равенству $\lim_{k\to\infty} | \psi(k) |^{1/k} = 0$, откуда, полагая $| \psi(k) |^{1/k} = \varepsilon_k$, заключаем, что $\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$, причем в силу монотонности $|\psi(k)|$ последовательность ε_k не возрастает. Поэтому

$$\| \Psi_{\beta,n}(t) \|_C \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} | \varphi(k) | \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \varepsilon_k^k \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_{n+1}^{n+1+k} = \varepsilon_{n+1}^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_{n+1}^k =$$
$$= \varepsilon_{n+1}^{n+1}/(1 - \varepsilon_{n+1}) \leqslant | \psi(n) |^{1+1/n} (1 - | \psi(n) |^{1/n})^{-1}.$$

Сопоставляя эту оценку с неравенством (15), получаем (8) и тем самым заканчиваем доказательство теоремы 1.

Доказательство теоремы 2. Ясно, что

$$\sup_{\varphi \in S_p^{(0)}} E_n(\varphi)_p \leqslant \sup_{\varphi \in S_p^{(0)}} \| \varphi(\cdot) \|_p \leqslant 1 \tag{16}$$

и, как хорошо известно,

$$\sup_{\varphi \in H_{\omega_p}^{(0)}} E_n(\varphi)_p \leqslant c_p \omega(1/n). \tag{16'}$$

Далее, если $f \in L_{\beta,p}^\psi$, то $f_\beta^\psi \in S_p^{(0)}$, значит

$$\sup_{f \in L_{\beta,p}^\psi} \left\| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{-\pi} f_\beta^\psi(x+t) \cos(nt + \beta\pi/2)\, dt \right\|_s \leqslant A_n(S_p^{(0)})_s. \tag{17}$$

Но для любой функции $\varphi \in S_p^{(0)}$ в $L_{\beta,p}^\psi$ найдется функция $f(\cdot)$, для которой $f_\beta^\psi(\cdot) = \varphi(\cdot)$, поэтому в (17) строгого равенства быть не может.

Аналогично заключаем, что

$$\sup_{f\in L^{\psi}_{\beta} H_{\omega_p}} \left\| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{\psi}_{\beta}(x+t) \cos(nt+\beta\pi/2)\, dt \right\|_{\cdot} = A_n (H_{\omega_p})_s. \qquad (17')$$

Рассматривая теперь верхние грани обеих частей равенства (7) по классам $L^{\psi}_{\beta,p}$ и $L^{\psi}_{\beta} H_{\omega_p}$ и принимая во внимание формулы (16) — (17'), получаем соотношения (9) и (10).

Чтобы доказать равенство (11), заметим, что

$$A_n (S_1^{(0)})_1 \leqslant \sup_{\|\varphi\|_1\leqslant 1} \left\| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t) \cos(nt+\beta\pi/2)\, dt \right\|_1 \leqslant$$

$$\leqslant \pi^{-1} \| \cos nt \|_1 \sup_{\|\varphi\|\leqslant 1} \|\varphi_1\| = 4/\pi.$$

С другой стороны, в силу известной теоремы С. М. Никольского [7, с. 215]

$$A_n (S_1^{(0)})_1 \geqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\cos(nt+\beta\pi/2) + \cos(nt+\beta\pi/2)|\, dt = \frac{1}{\pi} \|\cos t\|_1 = 4/\pi,$$

т. е. $A_n (S_1^{(0)})_1 = \pi/4$. Подставляя это значение в (9), получаем (11).

Также просто доказывается и равенство (12). Сначала устанавливается аналог соотношения (17):

$$\sup_{f\in C^{\psi}_{\beta,\infty}} \left\| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{\psi}_{\beta}(x+t) \cos(nt+\beta\pi/2)\, dt \right\|_C = A_n (S_\infty^{(0)})_C, \qquad (18)$$

а затем находится оценка величины $A_n (S_\infty^{(0)})_C$ сверху:

$$A_n (S_\infty^{(0)})_C \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\cos(nt+\beta\pi/2)|\, dt = 4/\pi,$$

которая, очевидно, реализуется для функции $\operatorname{sign}\cos(nt+\beta\pi/2)$, принадлежащей $S_\infty^{(0)}$. Это означает, что $A_n (S_\infty^{(0)}) = \pi/4$ и теперь, чтобы получить (12), достаточно взять верхнюю грань по классу $C^{\psi}_{\beta.\infty}$ в обеих частях равенства (7) и воспользоваться тем, что $\forall\, \varphi \in S_\infty^{(0)}\ \ E_n(\varphi)_\infty \leqslant 1$.

Чтобы получить (11'), заметим, что величина $A_n (H^{(0)}_{\omega_p})_1$ не зависит от числа β и, стало быть, можно считать, к примеру, что $\beta = 0$. Поэтому

$$A_n (H^{(0)}_{\omega_1})_1 = \sup_{\varphi\in H^{(0)}_{\omega_1}} \left\| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t) \cos nt\, dt \right\|_1.$$

Величина, стоящая справа в этом равенстве, вычислена В. И. Бердышевым [8]. Ее значение как раз совпадает с первым слагаемым в квадратных скобках формулы (11').

Для доказательства равенства (12') сначала получим аналог соотношений (17) и (18):

$$\sup_{f\in C^{\psi}_{\beta} H_\omega} \left\| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{\psi}_{\beta}(x+t) \cos(nt+\beta\pi/2)\, dt \right\|_C =$$

$$\sup_{\varphi\in H^{(0)}_{\omega}} \left\| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t) \cos(nt+\beta\pi/2)\, dt \right\|_C = A_n (H^{(0)}_{\omega})_C, \qquad (19)$$

где $H^{(0)}_{\omega} = \{\varphi : \varphi \in H_\omega, \varphi \perp 1\}$. В силу инвариантности классов $H^{(0)}_{\omega}$ относительно сдвига аргумента, заключаем, что величина $A_n(H_\omega^{(0)})$ не зависит ни от точки x, ни от числа β. Поэтому

$$A_n(H_\omega^{(0)})_C = \sup_{\varphi\in H_\omega^{(0)}} \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\cos ntdt \right|,$$

т. е. $A_n(H_\omega^{(0)})_C$ совпадает с верхней гранью n-го коэффициента Фурье функций $\varphi\in H_\omega^{(0)}$, которая вычислена Лебегом [9] и А. В. Ефимовым [10]:

$$A_n(H_\omega^{(0)})_C = \frac{2\Theta_\omega}{\pi} \int_0^{\pi/2} \omega(2t/n)\sin tdt. \tag{19'}$$

Теперь, беря верхнюю грань по классу $C_\beta^\psi H_\omega$ в обеих частях равенства (7) и учитывая соотношения (19) и (19′), а также используя то, что $\forall f\in H_\omega$ $E_n(f)\leqslant C\omega(1/n)$, получаем (12′).

Основные результаты этой работы были анонсированы в [11].

1. *Степанец А. И.* Классы периодических функций и приближение их элементов суммами Фурье // Докл. АН СССР.— 1984.— **277**, № 5.— С. 1074—1077.
2. *Степанец А. И.* Классификация периодических функций и скорость сходимости их рядов Фурье // Изв. АН СССР.— Сер. мат.— 1986.— **50**, № 1.— С. 101—136.
3. *Степанец А. И.* Уклонения сумм Фурье на классах бесконечно дифференцируемых функций // Укр. мат. журн.— 1984.— **36**, № 6.— С. 750—758.
4. *Ахиезер Н. И.* Элементы теории эллиптических функций.— М. : Наука, 1970.— 303 с.
5. *Колмогоров А. Н.* Zur Grössenordnung des Restliedes Fourierschen Reihen differenzierbaren Functionen // Ann. Math.— 1935.— **36**.— P. 521—526.
6. *Степанец А. И.* Равномерные приближения тригонометрическими полиномами.— Киев : Наук. думка, 1981.— 340 с.
7. *Никольский С. М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем / Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1946.— **10**, № 3.— С. 207—256.
8. *Бердышев В. И.* Приближение периодических функций суммами Фурье в среднем // Там же.— 1965.— **29**, № 3.— С. 505—526.
9. *Lebesque H.* Sur la représentation triqonometrigue approchée des fonction satisfaisant à une condition de Lipschitz // Bull. Math. de France.— 1910.— **38**,— P. 184—210.
10. *Ефимов А. В.* Приближение непрерывных периодических функций суммами Фурье // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1960.— **24**, № 2.— С. 243—296.
11. *Степанец А. И.* Скорость сходимости рядов Фурье в пространствах L_β^ψ .— Киев, 1986.— С. 3—48.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 86.66).

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 10.04.87