УДК 517.5

С. Б. Вакарчук

О поперечниках некоторых классов аналитических функций в пространстве Харди H_2

Вопросы, связанные с точным вычислением колмогоровых поперечников классов аналитических в единичном круге функций, рассматривались, например, Л. В. Тайковым [1, 2] и Н. Айнуллоевым [2, 3]. Результаты данной статьи дополняют и продолжают исследования указанных авторов в этом направлении.

Напомним необходимые в дальнейшем понятия.

Говорят [4], что аналитическая в единичном круге функция $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, $|z| < 1$, принадлежит пространству Харди H_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, если

$$\|f(z)\|_{H_p} = \lim_{\rho \to 1-0} \left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\theta})|^p d\theta\right]^{1/p} = \left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |F(\theta)|^p d\theta\right]^{1/p} < \infty,$$

где $F(\theta) = f(e^{i\theta})$ — угловое граничное значение функции $f(z)$.

Символом $F_a^{(k)}(\theta)$; $k = 0, 1, \ldots$; $F_a^{(0)}(\theta) = F(\theta)$ будем обозначать граничные значения аналитической функции $\partial^k f/\partial\theta^k = \partial^k f(\rho e^{i\theta})/\partial\theta^k$, а символом $F^{(k)}(\theta)$; $k = 0, 1, \ldots$; $F^{(0)}(\theta) = F(\theta)$ — граничные значения аналитической функции $f^{(k)}(z) = d^k f/dz^k$. Так, например,

$$\frac{\partial f(\rho e^{i\theta})}{\partial\theta} = \begin{cases} i\sum\limits_{k=1}^{\infty} kc_k\rho^k e^{ik\theta}, & \rho \neq 0, \\ 0, & \rho = 0, \end{cases}$$

$$\frac{df}{dz} = \sum_{k=1}^{\infty} kc_k z^{k-1}$$

и т. д. n-мерным поперечником по Колмогорову $d_n(\mathfrak{M}, H_p)$ класса $\mathfrak{M} \subset H_p$ называют величину (см., например, [5])

$$d_n(\mathfrak{M}, H_p) = \inf_{\{L_n\}} \sup_{f\in\mathfrak{M}} \inf_{\psi\in L_n} \|f - \psi\|_{H_p},$$

где L_n — n-мерные подпространства. Символом $E_n(f)_{H_p}$ обозначим наилучшее приближение функции $f(z) \in H_p$ полиномами $p_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k$ в метрике пространства H_p, т. е. $E_n(f)_{H_p} = \inf_{p_n} \|f - p_n\|_{H_p}$.

Если функция $f \in H_p$ имеет непрерывные граничные значения F, то их гладкость будем характеризовать модулем непрерывности

$$\omega(F, \delta)_p = \sup_{|t|\leqslant\delta} \left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |F(t+\theta) - F(\theta)|^p d\theta\right]^{1/p}.$$

Для аналитических функций комплексного переменного справедливо следующее утверждение, которое является в определенном смысле аналогом теоремы 1 из [6].

Л е м м а. *Пусть $f(z)$ — произвольная функция из класса H_2, имеющая непрерывные граничные значения. Тогда выполняется неравенство*

$$E_n(f)^2_{H_2} \leqslant 4^{-1} n \int_0^{\pi/n} \omega(F, \theta)_2^2 \sin n\theta d\theta, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

которое является точным в том смысле, что существует функция $f_0 \in H_2$, обращающая (1) *в равенство.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу уравнения замкнутости и теоремы 1 [7, с. 288 — 290] для функции $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, удовлетворяющей условию леммы, имеем

$$E_n(f)^2_{H_2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F(\theta)|^2 d\theta - \sum_{k=0}^{n-1} |c_k|^2 = \sum_{k=n}^{\infty} |c_k|^2. \tag{2}$$

Так как $F(t+\varphi) - F(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ik\varphi}(e^{ikt} - 1)$, то

$$\int_0^{2\pi} |F(t+\varphi) - F(\varphi)|^2 d\varphi = 4\pi \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 (1 - \cos kt). \tag{3}$$

Отсюда следует, что

$$E_n(f)^2_{H_2} \leqslant \frac{1}{2} \omega(F, \theta)_2^2 + \sum_{k=n}^{\infty} |c_k|^2 \cos k\theta. \tag{4}$$

Умножая обе части неравенства (4) на $\sin n\theta$ $(0 \leqslant \theta \leqslant \pi/n)$ и интегрируя по θ от 0 до π/n, получаем (1). Непосредственной проверкой можно убедиться, что функция $f_0 = z^n \in H_2$ обращает (1) в равенство. Лемма доказана.

С л е д с т в и е 1. *При выполнении условий леммы справедливо неравенство*

$$E_n(f)_{H_2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \omega(F, \pi/n), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

в котором при каждом n постоянная $1/\sqrt{2}$ уменьшена быть не может.

Действительно, соотношение (5) сразу следует из (1). Рассмотрим далее последовательность комплексных чисел $\{c_k^*\}_{k=0}^{\infty}$, для которых

$$|c_{nk}^*| = \sqrt{\frac{2}{\delta}} \frac{\sin nk\delta}{nk}, \quad k \geqslant 1, \tag{6}$$

а все остальные c_k^* равны нулю; δ — произвольное бесконечно малое число. Поскольку $\|\{c_k^*\}\|_{l_2} = \left[\sum_{k=0}^{\infty} |c_2^*|^2\right]^{1/2} = \sqrt{\pi - \delta}$ [5], то по теореме Хаусдорфа—Юнга (см., например, [4, с. 94]) функция $f_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^* z^k$ принадлежит пространству H_2.

Используя (2), (3), (6) и [5, с. 240 — 241], для $f_n(z)$ получаем $(\pi - \delta)\, \omega(F_n, \pi/n)_2^2 = 2\pi E_n(f_n)^2_{H_2}$, где $F_n(\theta) = f_n(e^{i\theta})$.

С л е д с т в и е 2. *При выполнении условий леммы справедливо точное в указанном ранее смысле неравенство*

$$E_n(f)^2_{H_p} \leqslant 4^{-1} n \int_0^{\pi/n} \omega(F, \theta)_2^2 \sin n\theta d\theta, \quad n = 1, 2, \ldots; \ 1 \leqslant p \leqslant 2. \tag{7}$$

Действительно, в силу неравенства Гельдера

$$E_n(f)_{H_p} \leqslant E_n(f)_{H_2}, \quad 1 \leqslant p \leqslant 2, \tag{8}$$

и оценка (7) сразу следует из соотношений (1) и (8). С другой стороны, используя лемму 3 из [8], записываем

$$E_n(z^n)_{H_p} = 1, \quad p \geqslant 1. \tag{9}$$

Подставляя $f_0 = z^n \in H_p$ в (7) и учитывая (9), получаем требуемое утверждение.

Обозначим $\beta_{ns} = n^{-s}$, $\alpha_{nr} = [n(n-1)\dots(n-r+1)]^{-1}$. В [1] для аналитических в единичном круге функций были найдены точные в указанном ранее смысле неравенства

$$E_n(f)_{H_p} \leqslant \beta_{ns} E_n\left(\frac{\partial^s f}{\partial \theta^s}\right)_{H_p}, \tag{10}$$

$$E_n(f)_{H_p} \leqslant \alpha_{nr} E_{n-r}(f^{(r)})_{H_p}, \quad r < n;\ p \geqslant 1. \tag{11}$$

Из (10), (11) и следствий 1, 2 вытекает такое следствие.

Следствие 3. *Пусть для аналитической внутри единичного круга функции $f(z) \in H_p$, $1 \leqslant p \leqslant 2$, ее производные $\partial^s f/\partial\theta^s$ и $f^{(r)}(z)$ принадлежат пространству H_2 и имеют непрерывные граничные значения. Тогда справедливы следующие соотношения:*

$$E_n(f)_{H_p} \leqslant \frac{\beta_{ns}}{2}\left[n\int_0^{\pi/n} \omega(F_a^{(s)}, \theta)_2^2 \sin n\theta d\theta\right]^{1/2}, \tag{12}$$

$$E_n(f)_{H_p} \leqslant \frac{\alpha_{nr}}{2}\left[(n-r)\int_0^{\pi/(n-r)} \omega(F^{(r)}, \theta)_2^2 \sin(n-r)\theta d\theta\right]^{1/2}, \tag{13}$$

$$E_n(f)_{H_p} \leqslant \frac{\beta_{ns}}{\sqrt{2}}\, \omega(F_a^{(s)}, \pi/n)_2, \tag{14}$$

$$E_n(f)_{H_p} \leqslant \frac{\alpha_{nr}}{\sqrt{2}}\, \omega(F^{(r)}, \pi/(n-r))_2, \quad 1 \leqslant p \leqslant 2, \quad r < n. \tag{15}$$

При этом оценки (12), (13) *точны в указанном в лемме смысле, а постоянная* $1/\sqrt{2}$ *в* (14), (15) *при* $p = 2$ *уменьшена быть не может.*

Обозначим через $C_{2\pi}$ множество непрерывных комплекснозначных функций вещественного аргумента, имеющих период 2π.

Пусть $\Psi(u)$ — положительная возрастающая функция такая, что $\lim\limits_{u\to 0}\Psi(u) = \Psi(0) = 0$. Для любых целых неотрицательных r и s определим в H_2 следующие классы функций:

$$W_{a,\Psi}^s = \left\{f(z) : F_a^{(s)} \in C_{2\pi};\ \frac{\pi}{2u}\int_0^u \omega(F_a^{(s)}, \theta)_2^2 \sin\frac{\pi}{u}\theta d\theta \leqslant \Psi^2(u), \quad 0 < u \leqslant 2\pi\right\},$$

$$W_\Psi^r = \left\{f(z) : F^{(r)} \in C_{2\pi};\ \frac{\pi}{2u}\int_0^u \omega(F^{(r)}, \theta)_2^2 \sin\frac{\pi}{u}\theta d\theta \leqslant \Psi^2(u), \quad 0 < u \leqslant 2\pi\right\}.$$

Согласно [3] полагаем

$$(1 - \cos m\theta)_* = \begin{cases} 1 - \cos m\theta, & m\theta \leqslant \pi, \\ 2, & m\theta > \pi. \end{cases}$$

Теорема. *Пусть функция $\Psi(u)$ удовлетворяет условию*

$$\Psi^2\left(\frac{u}{\mu}\right)\int_0^{\pi\mu} (1 - \cos\theta)_* \sin\frac{\theta}{\mu}\, d\theta \leqslant 2\mu\Psi^2(u) \tag{16}$$

при $\forall u\,(0, 2\pi]$ *и* $\forall \mu > 0$. *Тогда имеют место следующие соотношения*

$$d_n(W^r_\Psi, H_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_{nr}\Psi\left(\frac{\pi}{n-r}\right), \quad r < n,$$

$$d_n(W^s_{a,\Psi}, H_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\beta_{ns}\Psi\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{17}$$

Доказательство. Не уменьшая общности, проведем рассуждения для класса W^r_Ψ. Оценку поперечника сверху получим из следствия 3

$$d_n(W^r_\Psi, H_2) \leqslant \sup_{f\in W^r_\Psi} E_n(f)_{H_2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_{nr}\Psi\left(\frac{\pi}{n-r}\right), \quad r < n.$$

Для оценки поперечника снизу рассмотрим сферу

$$S_{n+1} = \left\{p_{n+1}(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k: \quad p_{n+1}\|_{H_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_{nr}\Psi\left(\frac{\pi}{n-r}\right)\right\}$$

и покажем, что она входит в класс W^r_Ψ.

Поскольку $P^{(r)}_{n+1}(z) = \sum\limits_{k=r}^{n}\alpha^{-1}_{kr}c_k z^{k-r}$, то, полагая $P^{(r)}_{n+1}(\theta) = p^{(r)}_{n+1}(e^{i\theta})$, при $t\in[0, \pi/(n-r)]$ имеем

$$\int_0^{2\pi}|P^{(r)}_{n+1}(t+\varphi) - P^{(r)}_{n+1}(\varphi)|^2\,d\varphi = 4\pi\sum_{k=r+1}^{n}\alpha^{-2}_{kr}(1-\cos(k-r)t)\,|c_k|^2. \tag{18}$$

Так как

$$\|p_{n+1}\|^2_{H_2} = \sum_{k=0}^{n}|c_k|^2, \tag{19}$$

то из (18), (19) получим $\omega(P^{(r)}_{n+1}, \theta)^2_2 \leqslant 2\alpha^{-2}_{nr}(1-\cos(n-r)\theta)_*\,\|p_{n+1}\|^2_{H_2}$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$. После умножения этого неравенства на $\frac{\pi}{2u}\sin\frac{\pi}{u}\theta$ и интегрирования по θ запишем

$$\frac{\pi}{2u}\int_0^u \omega(P^{(r)}_{n+1}, \theta)^2_2\sin\frac{\pi}{u}\theta d\theta \leqslant \frac{\pi}{u\alpha^2_{nr}}\|P_{n+1}\|^2_{H_2}\int_0^u(1-\cos(n-r)\theta)_* \times$$

$$\times\sin\frac{\pi\theta}{u}\,d\theta. \tag{20}$$

Учитывая, что $p_{n+1}\in S_{n+1}$ и проводя в (20) преобразования согласно [9, с. 417], получаем $S_{n+1}\in W^r_\Psi$. В силу теоремы о поперечнике сферы (см., например, [5])

$$d_n(W^r_\Psi, H_2) \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_{nr}\Psi\left(\frac{\pi}{n-r}\right), \quad r < n.$$

Теорема доказана.

В заключение отметим, что соотношение (17) является в некотором смысле обобщением результата [9] на соответствующий класс аналитических функций комплексной переменной $W^s_{a,\Psi}$, а условию (16) удовлетворяет, например, функция $\Psi(u) = u^{\alpha/2}$ при $\alpha = \pi^2/8$ [9].

1. *Тайков Л. В.* Поперечники некоторых классов аналитических функций // Мат. заметки.— 1977.— **22**, № 2.— С. 285—295.
2. *Тайков Л. В., Айнуллоев Н.* Наилучшее приближение в смысле Колмогорова классов аналитических в единичном круге функций // Там же.—1986.— **40**, № 3.— С. 341—351.
3. *Айнуллоев Н.* Поперечники классов аналитических функций в единичном круге // Геом. вопр. теории функций и множеств.— Калинин, 1986.— С. 91—101.

4. *Duren P. L.* Theory of H_p spaces.— New York; London : Acad. press, 1970.— 272 p.
5. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения.— М. : Наука, 1976.— 320 с.
6. *Черных Н. И.* О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Мат. заметки.— 1967.— **2**, № 5.— С. 513—522.
7. *Смирнов В. И., Лебедев Н. А.* Конструктивная теория функций комплексного переменного. — М.; Л.: Наука, 1964.— 438 с.
8. *Двейрин М. З., Чебаненко И. В.* О полиномиальной аппроксимации в банаховых пространствах аналитических функций // Теория отображений и приближения функций.— Киев : Наук. думка, 1983.— С. 62—73.
9. *Айнуллоев Н.* Значение поперечников некоторых классов дифференцируемых функций в L_2 // Докл. АН ТаджССР.— 1984.— **27**, № 8.— С. 415—418.

Ин-т геотехн. механики АН УССР,
Днепропетровск

Получено 30.07.87