УДК 519.53

В. А. Романов

Интегральные операторы, порождаемые *H*-непрерывными мерами

В ряде разделов бесконечномерного анализа возникают задачи, связанные с операторами свертки, задаваемыми мерами. Поэтому представляет интерес исследование свойств типа компактности для таких операторов. В настоящей работе доказана эквивалентность условий H-компактности оператора свертки и H-непрерывности меры, порождающей этот оператор, а также на основе аппарата крайних H-квазиинвариантных мер, разработанного в [1] (§ 23) и [2], дано описание структуры H-компактных операторов свертки в сепарабельном гильбертовом пространстве.

1. Пусть X — бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство, μ — действительнозначная мера (счетно-аддитивная функция множества) ограниченной вариации, заданная на сигма-алгебре $\mathscr{B}(X)$ борелевских подмножеств пространства X, F — пространство ограниченных действительнозначных измеримых функций на X, наделенное нормой $\| f \| = \sup \{| f(x) | : x \in X\}$.

Интегральный оператор свертки, порождаемый мерой μ, задается следующей формулой: для каждой функции $f \in F$ и произвольного $x \in X$

$$(Q_\mu f)(x) = \int\limits_X f(x - y)\, d\mu(y). \tag{1}$$

Как обычно, норму линейного оператора T, действующего в нормированном пространстве F, определяем формулой $\| T \| = \sup \{\| Tf \| : \| f \| \leqslant 1\}$.

Предложение 1. *Для нормы оператора свертки справедливо равенство* $\| Q_\mu \| = \operatorname{Var} \mu$.

Доказательство. Вначале заметим, что если $f = \chi_{-E}$ — индикатор борелевского множества $(-E)$, то из формулы (1) вытекает, что при $x = 0$

$$(Q_\mu \chi_{-E})(0) = \int\limits_X \chi_{-E}(-y)\, d\mu(y) = \mu(E).$$

Пусть теперь $\{E_1, \ldots, E_n\}$ — произвольная конечная система попарно непересекающихся борелевских подмножеств ненулевой меры. Тогда функция $f = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sign} \mu(E_k) \chi_{-E_k}$ есть элемент пространства F с единичной нормой. Для этой функции при $x = 0$ выполняется равенство $(Q_\mu f)(0) = \sum_{k=1}^{n} |\mu(E_k)|$. Следовательно, $\| Q_\mu f \| \geqslant \sum_{k=1}^{n} |\mu(E_k)|$.

Переходя к верхней грани по множеству всех систем $\{E_1, \ldots, E_n\}$ указанного вида, приходим к неравенству

$$\| Q_\mu f \| \geqslant \operatorname{Var} \mu. \tag{2}$$

С другой стороны, из формулы (1) вытекает, что для любой функции $f \in F$ справедливо неравенство $\| Q_\mu f \| \leqslant \| f \| \operatorname{Var} \mu$. Следовательно, $\| Q_\mu \| \leqslant \operatorname{Var} \mu$. Отсюда и из (2) вытекает утверждение предложения 1.

Следствие 1. *Оператор* $Q_\mu : F \to F$ *непрерывен.*

Пусть теперь $h \in X$. Линейный непрерывный оператор T, действующий в пространстве F, назовем h-компактным, если он переводит любое ограниченное множество $B \subset F$ в множество функций, равностепенно непрерывное по направлению h. Для такого оператора, каковы бы ни были $x \in X$, ограниченное множество $B \subset F$ и отрезок $D = [x + ah; x + bh]$ аффинного подпространства $L(h) + x$, множество сужений функций $T(f) \in T(B)$ на отрезок D есть компакт в пространстве непрерывных функций, заданных на D.

Пусть H — линейное подпространство в X. Оператор T назовем H-компактным, если для любого $h \in H$ он h-компактен. Меру μ называем h-непрерывной, если $\lim_{t \to 0} \operatorname{Var}(\mu_{th} - \mu) = 0$. Меру называем H-непрерывной, если она h-непрерывна для всех $h \in H$.

2. Перед тем, как переходить к критерию H-компактности оператора свертки, докажем предложение о достаточном условии h-непрерывности меры, имеющее и самостоятельный интерес. Для меры μ будем рассматривать разложение Хана — Жордана $\mu = \mu^+ - \mu^-$, а также меру $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$. При этом $\operatorname{Var} \mu = |\mu|(X)$.

Предложение 2. *Пусть мера* μ *удовлетворяет условию: для любого* $E \in \mathscr{B}(X)$ $\lim_{t \to 0} \mu(E + th) = \mu(E)$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *для любого* $E \in \mathscr{B}(X)$

$\lim_{t \to 0} \mu^+(E + th) = \mu^+(E)$, $\lim_{t \to 0} \mu^-(E + th) = \mu^-(E)$, $\lim_{t \to 0} |\mu|(E + th) = |\mu|(E)$;

2) *меры* μ^+, μ^-, $|\mu|$, μ *h-непрерывны.*

Доказательство. Пусть P — положительная часть множества X, т. е. для любого $E \in \mathscr{B}(X)$ $\mu^+(E) = \mu(E \cap P)$. Для множеств P и $P_{th} = P + th$ рассмотрим равенство

$$\mu(P_{th}) - \mu(P) = \mu(P_{th} \setminus P) + (-\mu(P \setminus P_{th})).$$

Левая часть этого равенства имеет нулевой предел при $t \to 0$, а оба слагаемых в правой части имеют одинаковый знак. Поэтому

$$\lim_{t \to 0} \mu(P_{th} \setminus P) = \lim_{t \to 0} \mu(P \setminus P_{th}) = 0. \tag{3}$$

Множества P_{th} и $(P \setminus P_{th})$ не пересекаются, причем разность между их объединением и множеством $P_{th} \setminus P$ есть P. Отсюда получаем, что для любого $E \in \mathscr{B}(X)$ выполняется равенство

$$\mu^+(E + th) - \mu^+(E) = \mu(E_{th} \cap P) - \mu(E \cap P) = (\mu((E \cap P) + th) - \\ - \mu(E \cap P)) + \mu(E_{th} \cap (P \setminus P_{th})) - \mu(E_{th} \cap (P_{th} \setminus P)).$$

Согласно условиям предложения первое слагаемое в правой части этого равенства имеет при $t \to 0$ предел, равный нулю. Из формул (3) вытекает, что второе и третье слагаемые в правой части также имеют предел, равный нулю. Следовательно, для μ^+ утверждение 1 выполняется. Для μ^- и $|\mu|$ выполнимость утверждения 1 вытекает из условий предложения и из выполнимости его для μ^+.

Докажем теперь утверждение 2, используя утверждение 1. Рассмотрим неотрицательную меру m, задаваемую формулой: для любого $E \in \mathscr{B}(X)$

$$m(E) = \int_0^1 |\mu|(E + \tau h)\, d\tau.$$

Для этой меры

$$\operatorname{Var}(m_{th} - m) \leqslant 2 \sup_{E \in \mathscr{B}(X)} |m(E + th) - m(E)| \leqslant 4|t|\,|\mu|(X).$$

Следовательно, мера m h-непрерывна. Заметим теперь, что меры μ^+, μ^-, $|\mu|$, μ абсолютно непрерывны по мере m. В самом деле, если $m(E) = 0$, то $|\mu|(E + \tau h) = 0$ для почти всех $\tau \in [0; 1]$, откуда в силу утверждения 1 получаем $|\mu|(E) = 0$. Согласно [3] (теорема 1), мера, абсолютно непрерывная по h-непрерывной мере, сама h-непрерывна. Отсюда и следует справедливость утверждения 2. Предложение 2 доказано.

Теорема 1. *Пусть μ — действительнозначная мера ограниченной вариации, заданная на $B(X)$, H — линейное подпространство в X. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

а) *мера* μH-непрерывна;

б) *оператор свертки Q_μ H-компактен*;

в) *оператор Q_μ переводит F в множество функций, непрерывных по каждому направлению из H*.

Доказательство. Импликация а) $\Rightarrow$ б) вытекает из соотношений

$$|(Q_\mu f)(x + th) - (Q_\mu f)(x)| = \left| \int_X f(x - y)\, d(\mu_{th} - \mu)(y) \right| \leqslant \|f\| \operatorname{Var}(\mu_{th} - \mu).$$

Импликация б) $\Rightarrow$ в) очевидна.

Заметим, что для индикатора χ_{-E} борелевского множества $(-E)$ и для произвольных $t \in \mathbb{R}$, $h \in H$ выполняется равенство

$$(Q_\mu \chi_{-E})(th) = \int_X \chi_{-E}(th - y)\, d\mu(y) = \mu(E + th).$$

Следовательно,

$$\mu(E + th) - \mu(E) = (Q_\mu \chi_{-E})(th) - (Q_\mu \chi_{-E})(0).$$

Отсюда, а также из предложения 2 вытекает импликация в) $\Rightarrow$ а). Теорема доказана.

Меру μ называем h-дифференцируемой, если для любого борелевского E существует предел $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{1}{t}(\mu(E + th) - \mu(E))$. По индукции определяется k-кратная дифференцируемость [4].

Предложение 3. *Пусть H — линейная оболочка ортонормированного базиса в пространстве X и оператор Q_μ H-компактен. Тогда найдется последовательность таких операторов свертки Q_{μ_n}, которые переводят F в множество функций, бесконечно дифференцируемых по любому направлению из H, и для которых*

$$\lim_{n \to \infty} \| Q_{\mu_n} - Q_\mu \| = 0.$$

Доказательство. По теореме 1 мера μ H-непрерывна и поэтому из [5] (теорема 1) следует, что ее можно представить как предел по вариации некоторой последовательности бесконечно H-дифференцируемых мер μ_n. Бесконечная дифференцируемость по всем направлениям из H функций $Q_{\mu_n} f$ (где $f \in F$) вытекает из [6] (теорема 2.1.1), а сходимость операторной последовательности Q_{μ_n} к оператору Q_μ — из предложения 1. Предложение 3 доказано.

3. Пусть (Ω, S, ν) — пространство с вероятностной мерой, $\{\mu^\omega\}_{\omega\in\Omega}$ — такое семейство действительнозначных мер, заданных на сигма-алгебре S и имеющих равномерно ограниченные вариации, что для каждого $E\in\mathcal{B}(X)$ функция $\omega\mapsto\mu^\omega(E)$ S-измерима, и пусть μ — смесь этого семейства, т. е. $\mu(E)=\int\limits_\Omega \mu^\omega(E)\,d\nu(\omega)$.

Замечание 1. Оператор свертки, порождаемый смешанной мерой, есть смесь операторов свертки, порождаемых смешиваемыми мерами, т. е. для любых $f\in F$, $x\in X$

$$(Q_\mu f)(x)=\int\limits_X f(x-y)\,d\mu(y)=\int\limits_\Omega\Big(\int\limits_X f(x-y)\,d\mu^\omega(y)\Big)\,d\nu(\omega). \tag{4}$$

В самом деле, для случая, когда f — линейная комбинация конечного числа индикаторов борелевских множеств равенство (4) очевидно, произвольную же функцию $f\in F$ можно представить как равномерный предел таких линейных комбинаций.

Предложение 4. *Смесь h-непрерывных мер h-непрерывна.*

Доказательство. Для произвольного $E\in\mathcal{B}(X)$ и сходящейся к нулю числовой последовательности (t_n) рассмотрим равенства

$$\mu(E+t_nh)=\int\limits_\Omega \mu^\omega(E+t_nh)\,d\nu(\omega).$$

Последовательность подынтегральных функций равномерно ограничена и сходится всюду на Ω к функции $\mu^\omega(E)$. Поэтому по теореме Лебега правая часть имеет предел $\mu(E)=\int\limits_\Omega \mu^\omega(E)\,d\nu(\omega)$. Следовательно, для меры μ выполнены условия предложения 2. Поэтому смешанная мера μ h-непрерывна, что и требовалось доказать.

Пусть теперь H — линейная оболочка ортонормированного базиса в пространстве X. Меру μ называем H-квазиинвариантной, если для любого $h\in H$ меры μ_h и μ эквивалентны. H-крайней называется такая неотрицательная H-квазиинвариантная мера, которую нельзя представить в виде суммы двух ненулевых взаимно сингулярных H-квазиинвариантных мер.

В [1] (§ 23) доказано, что множество мер, представимых как смеси H-крайних мер, совпадает с множеством всех H-квазиинвариантных неотрицательных мер. Следующая теорема устанавливает, какие меры представимы как смеси мер, абсолютно непрерывных по H-крайним, а также дает описание структуры H-компактных операторов свертки.

Теорема 2. *Пусть μ — действительная мера ограниченной вариации, заданная на $\mathcal{B}(X)$, H — линейная оболочка ортонормированного базиса в пространстве X. Тогда справедливы следующие утверждения:*

а) *для того чтобы мера μ была представима как смесь мер, абсолютно непрерывных по H-крайним мерам, необходимо и достаточно, чтобы она была H-непрерывной;*

б) *для того чтобы оператор Q_μ был представим как смесь операторов свертки, порождаемых мерами, абсолютно непрерывными по H-крайним мерам, необходимо и достаточно, чтобы он был H-компактным.*

Доказательство. В силу теоремы 1 утверждение б) следует из утверждения а), поэтому остается доказать утверждение а).

Необходимость утверждения а) вытекает из предложения 4, поскольку каждая H-квазиинвариантная мера H-непрерывна [7] (теорема 1), а мера, абсолютно непрерывная по H-непрерывной, сама H-непрерывна [3] (теорема 1).

Пусть теперь мера μ H-непрерывна. Тогда из предложения 2 вытекает H-непрерывность и меры $|\mu|$. В соответствии с [7] (теорема 2) меру $|\mu|$ можно представить как предел по вариации некоторой последовательности (m_n) неотрицательных H-квазиинвариантных мер. Но тогда мера $|\mu|$ абсолютно непрерывна по вероятностной H-квазиинвариантной мере

$$m = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} a_n m_n, \text{ где } a_n = (m_n(X))^{-1}.$$

Следовательно, исходная мера μ также абсолютно непрерывна по m с некоторой плотностью φ. В соответствии же с [1] (§ 23, теорема 2) H-квазиинвариантную меру m можно получить смешиванием некоторого семейства H-крайних мер. Но тогда меру μ можно получить смешиванием таких мер, которые абсолютно непрерывны по этим H-крайним мерам и имеют относительно них плотность φ. Поэтому справедливость достаточности для утверждения а) также установлена. Теорема доказана.

1. *Скороход А. В.* Интегрирование в гильбертовом пространстве.—М. : Наука, 1975.— 230 с.
2. *Скороход А. В.* О допустимых сдвигах мер в гильбертовом пространстве // Теория вероятностей и ее применения.— 1970.— **15**, вып. 4.— С. 577—598.
3. *Романов В. А.* Об H-непрерывных мерах в гильбертовом пространстве // Вестн. Моск. ун-та. Мат., мех.— 1977.— № 1.— С. 81—85.
4. *Фомин С. В.* Дифференцируемые меры в линейных пространствах // Успехи мат. наук.— 1968.— **23**, вып. 1.— С. 221—222.
5. *Романов В. А.* Пределы дифференцируемых мер в гильбертовом пространстве // Укр. мат. журн.— 1981.— **33**, № 2.— С. 215—219.
6. *Авербух В. И., Смолянов О. Г., Фомин С. В.* Обобщенные функции и дифференциальные уравнения в линейных пространствах. I. Дифференцируемые меры // Тр. Моск. мат. о-ва.— 1971.— **24**.— С. 133—174.
7. *Романов В. А.* Пределы квазиинвариантных мер в гильбертовом пространстве // Укр. мат. журн.— 1979.— **31**, № 2.— С. 211—214.

Кировогр. пед. ин-т

Получено 18.09.86