УДК 517.53

А. А. Гольдберг

Распределение значений мероморфных функций с полюсами, тяготеющими к системе лучей

Здесь используются стандартные обозначения теории мероморфных функций [1]. Под мероморфной функцией всюду будем понимать мероморфную в **C** функцию. Кроме того, введем некоторые классы непрерывных монотонно стремящихся к $+\infty$ при $x \to +\infty$ функций $U:[1, \infty) \to [0, \infty)$. Будем считать, что $U \in W$, если $U(2r) = O(U(r))$, $r \to \infty$, и $U \in S_\mu$, если $\max\{U(t)t^{-\mu}: 1 \leqslant t \leqslant r\} = O(U(r)r^{-\mu})$, $r \to \infty$, $0 \leqslant \mu < \infty$. Очевидно, что $S_{\mu_1} \subset S_{\mu_2}$, если $\mu_2 < \mu_1$. Если $U(r)r^{-\mu}$ — неубывающая при $r \geqslant r_0 \geqslant 1$ функция, то очевидно, что $U \in S_\mu$. Пусть $U(r) = r^{l(r)}$, где l — непрерывно дифференцируемая функция такая, что $l'(r) r \ln r \to 0$ при $r \to \infty$ и $\mu < \varliminf_{r\to\infty} l(r) \leqslant \varlimsup_{r\to\infty} l(r) < \infty$. Легко видеть, что тогда $U \in W \cap S_\mu$.

Пусть f — мероморфная функция, $D = D(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — система лучей $D = \bigcup_{j=1}^{n} \{z: \arg z = \alpha_j\}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_{n+1} = \alpha_1 + 2\pi$, $\omega = \omega(D) = \max\{\pi/(\alpha_{j+1} - \alpha_j): 1 \leqslant j \leqslant n\}$, $G(\varepsilon, D) = \mathbf{C} \setminus \bigcup_{j=1}^{n} \{z: |\arg z - \alpha_j| < \varepsilon\}$, где $\varepsilon > 0$, $n(r, a, D, \varepsilon, f)$ — считающая функция последовательности a-точек f, лежащих в $G(\varepsilon, D)$. Будем говорить, что a-точки f тяготеют к D, если для любого $\varepsilon > 0$

$$n(r, a, D, \varepsilon, f) = o(T(r, f)), \quad r \to \infty. \tag{1}$$

Выбор такого термина объясняют следующие соображения. Пусть $T(r, f) \in W \cap S_\mu$, $\mu > 0$. Так как

$$n(r, a, f) \leqslant N(er, a, f) \leqslant T(er, f) + O(1), \quad r \to \infty, \tag{2}$$

то $n(r, a, f) = O(T(r, f))$, $r \to \infty$. Если неванлинновский дефект $\delta(a, f) < 1$, то для некоторой последовательности $r_k \to \infty$ выполняется $T(r_k, f) = O(N(r_k, a, f))$, $k \to \infty$. Но тогда $n(r, a, f) \neq o(T(r, f))$, $r \to \infty$. Действительно, в противном случае

$$N(r_k, a, f) = \int_1^{r_k} n(t, a, f)\, d\ln t + O(1) = o\Big(\int_1^{r_k} (t, f)\, d\ln t\Big) =$$

$$= o\Big(T(r_k, f)\, r_k^{-\mu} \int_1^{r^k} t^{\mu-1}\, dt\Big) = o(T(r_k, f)), \quad k \to \infty,$$

и приходим к противоречию. Таким образом, если исключить случай $\delta(a, f) = 1$, то $n(r, a, f) \neq o(T(r, f))$, $r \to \infty$, в то время, как выполняется (1).

Хорошо известно [1] (гл. VI, § 2), что если a-точки функции f для двух значений a в некотором смысле близки к системе D, то можно получить важную информацию о росте и распределении значений f. В настоящей статье будет показано, что даже относительно слабое нарушение равномерности распределения аргументов a-точек для одного значения a, выражающееся в тяготении a-точек к D (см. (1)), при определенных условиях существенно влияет на распределение значений. Исходным пунктом явилась следующая теорема Банка и Кауфмана [2]: если f — мероморфная функция, все полюсы которой положительны, $T(r, f) = O(r^\rho)$, $r \to \infty$, $\rho > 1/2$, $m(r, f) = o(r^\rho)$, $r \to \infty$, то $m(r, 0, f) = o(r^\rho)$, $r \to \infty$. Основные отличия наших результатов от теоремы Банка и Кауфмана следующие: 1) в условии теоремы значительно менее жесткие ограничения на размещение полюсов f; 2) в ее утверждении—информация о распределении аргументов нулей f. Используемый здесь метод отличен от метода статьи [2] и позволяет получить указанную теорему Банка и Кауфмана более просто.

Теорема 1. *Пусть D — некоторая система лучей и f — мероморфная функция такая, что $T(r, f) \in W \cap S_\mu$, где $\mu > \omega$. Если для некоторого $a \in \overline{\mathbf{C}}$ валироновский дефект $\Delta(a, f) = 0$ и a-точки тяготеют к D, то для всех $b \in \overline{\mathbf{C}}$ выполняется $\Delta(b, f) = 0$ и b-точки тяготеют к D.*

Теорема 2. *Пусть D — некоторая система лучей и f — мероморфная функция конечного порядка $\rho > \omega$. Если для некоторого $a \in \overline{\mathbf{C}}$ име-*

ет место $\Delta(a, f) = 0$ *и а-точки тяготеют к* D, *то для всех* $b \in \overline{\mathbb{C}}$ *выполняется* $\delta(b, f) = 0$.

Вопрос о существенности ограничений в этих теоремах будет обсужден в конце статьи. Обе теоремы можно сформулировать в равносильной форме, использовав некоторые известные понятия. Это вытекает из следующих ниже двух предложений. Обозначим через $z_\nu = |z_\nu|\, e^{i\psi_\nu}$ a-точки функции f. Напомним определение неванлинновской функции [1, с. 40]:

$$c_{\alpha\beta}(r, a, f) = \sum_{\substack{1 \leqslant |z_\nu| \leqslant r \\ \alpha \leqslant \psi_\nu \leqslant \beta}} \sin \pi \frac{\psi_n - \alpha}{\beta - \alpha}.$$

Для системы лучей D обозначим $c(r, a, D, f) = \sum_{j=1}^{n} c_{\alpha_j \alpha_{j+1}}(r, a, f)$. Если $T(r, f) \in W$, то с помощью $c(r, a, D, f)$ легко определить тот факт, что a-точки тяготеют к D. Это следует из такого предложения.

Предложение 1. *Пусть* $U \in W$, $T(r, f) = O(U(r))$, $r \to \infty$. *Для того чтобы для всякого* $\varepsilon > 0$ *выполнялось*

$$n(r, a, D, \varepsilon, f) = o(U(r)), \quad r \to \infty, \tag{3}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$c(r, a, D, f) = o(U(r)), \quad r \to \infty. \tag{4}$$

Из $U \in W$ и (2) следует, что существует такая постоянная A, что $n(r, a, f) \leqslant AU(r)$ при $r \geqslant r_0$. Из (3) следует (4), так как $c(r, a, D, f) \leqslant n(r, a, D, \varepsilon, f) + \sin \omega\varepsilon\, n(r, a, f) \leqslant (A \sin \omega\varepsilon + o(1))\, U(r)$, $r \to \infty$, а ε можно брать сколь угодно малым. Из (4) следует (3), так как $n(r, a, D, \varepsilon, f) \leqslant n(1, a, D, \varepsilon, f) + \left(\operatorname{cosec} \dfrac{\pi\varepsilon}{\tau}\right) c(r, a, D, f)$, где $\tau = \max\{\alpha_{j+1} - \alpha_j : 1 \leqslant j \leqslant n\}$.

Предложение 2. *Пусть* $P(U)$ — *множество порядков пиков Пойа первого рода для функции* U; $\mu_* = \inf P(U)$, *если* $P(U) \neq \varnothing$; $\mu_* = \infty$, *если* $P(U) = \varnothing$. *Тогда* $\sup\{\mu : U \in S_\mu\} = \mu_*$.

М. Л. Содин сообщил это предложение и показал, что оно легко получается, если воспользоваться результатами [3].

Теоремы 1 и 2 непосредственно следуют из такой теоремы.

Теорема 3. *Пусть* D — *некоторая система лучей,* $U \in W \cap S_\mu$, *где* $\mu > \omega$. *Пусть* f — *мероморфная функция такая, что* $T(r, f) = O(U(r))$, $m(r, f) = o(U(r))$, $r \to \infty$, *и для* $a = \infty$ *и всякого* $\varepsilon > 0$ *выполняется* (3). *Тогда* $m(r, 1/f) = o(U(r))$, $r \to \infty$, *и для* $a = 0$ *и всякого* $\varepsilon > 0$ *выполняется* (3).

Чтобы получить теорему 1, достаточно взять $U(r) = T(r, f)$, а теорема 2 получится, если $U(r) = r^{\rho(r)}$, где $\rho(r)$ — уточненный порядок функции $T(r, f)$. Помимо этого рассматриваем $L(f)$, где L — дробно-линейное преобразование, переводящее a в ∞, а b — в 0.

Доказательство теоремы 3 проведем лишь для случая, когда D состоит из единственного луча $D = \{z : \arg z = 0\}$, исключительно с целью сделать запись менее громоздкой и избежать сложной системы индексов.

В общем случае рассуждения проводятся точно так же для каждого угла $\{z : \alpha_j < \arg z < \alpha_{j+1}\}$. В нашем случае $\omega = 1/2$. Обозначим $k(\alpha) = \pi/(2(\pi - \alpha))$. Возьмем γ, $0 < \gamma \leqslant \pi/4$, столь малым, чтобы $1/2 < k(2\gamma) < \mu$. Пусть $\gamma \leqslant \alpha \leqslant 2\gamma$. Применив к углу $\{z : \alpha \leqslant \arg z \leqslant 2\pi - \alpha\}$ формулу Неванлинны [1, с. 41] (теорема 5.2), получим ($k = k(\alpha)$):

$$\frac{1}{\pi} \int_1^r \left(\left(\frac{r}{t}\right)^k - \left(\frac{t}{r}\right)^k\right) \left\{\ln^+ \frac{1}{|f(te^{-i\alpha})|} + \ln^+ \frac{1}{|f(te^{i\alpha})|}\right\} \frac{dt}{t} +$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_{\alpha}^{2\pi-\alpha}\ln^{+}\frac{1}{|f(re^{i\varphi})|}\sin k(\varphi-\alpha)\,d\varphi+2\int_{1}^{r}c_{\alpha,2\pi-\alpha}(t,0,f)\left(\left(\frac{r}{t}\right)^{k}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{t}{r}\right)^{k}\right)\frac{dt}{t}=\frac{1}{\pi}\int_{1}^{r}\left(\left(\frac{r}{t}\right)^{k}-\left(\frac{t}{r}\right)^{k}\right)\{\ln^{+}|f(te^{-i\alpha})|+\ln^{+}|f(te^{i\alpha})|\}\frac{dt}{t}+$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_{\alpha}^{2\pi-\alpha}\ln^{+}|f(te^{i\varphi})|\sin k(\varphi-\alpha)\,d\varphi+2\int_{1}^{r}c_{\alpha,2\pi-\alpha}(t,\infty,f)\left(\left(\frac{r}{t}\right)^{k}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{t}{r}\right)^{k}\right)\frac{dt}{t}+O(1)\,r^{k},\tag{5}$$

где величина $O(1)$ ограничена равномерно относительно r и $\alpha\in[\gamma,2\gamma]$. Заметим, что $\sin(\gamma/2)(n(t,0,D,3\gamma,f)-n(1,0,D,3\gamma,f))\leqslant c_{2\gamma,2\pi-2\gamma}(t,0,f)\leqslant \leqslant c_{\alpha,2\pi-\alpha}(t,0,f)$ и $c_{\alpha,2\pi-\alpha}(t,\infty,f)\leqslant c_{\gamma,2\pi-\gamma}(t,\infty,f)\leqslant n(t,\infty,D,\gamma,f)$. Отсюда и из (5) следует неравенство

$$\frac{2}{\pi}\sin\frac{\gamma}{2}\int_{3\gamma}^{\pi-3\gamma}\ln^{+}\frac{1}{|f(re^{i\varphi})|}\,d\varphi+2r^{1/2}\sin\frac{\gamma}{2}\int_{1}^{r}n(t,0,D,3\gamma,f)\,t^{-3/2}\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{r^{k(2\gamma)}}{\pi}\int_{1}^{r}\{\ln^{+}|f(te^{-i\alpha})|+\ln^{+}|f(te^{i\alpha})|\}\,t^{-k(2\gamma)-1}\,dt+4m(r,f)+$$

$$+4r^{k(2\gamma)}\int_{1}^{r}n(t,\infty,D,\gamma,f)\,t^{-k(2\gamma)-1}\,dt+Kr^{k(2\gamma)},\tag{6}$$

где K — некоторая положительная постоянная. Проинтегрировав неравенство (6) по α в пределах от γ до 2γ, получим

$$\frac{2\gamma}{\pi}\sin\frac{\gamma}{2}\int_{3\gamma}^{2\pi-3\gamma}\ln^{+}\frac{1}{|f(re^{i\varphi})|}\,d\varphi+2\gamma r^{1/2}\sin\frac{\gamma}{2}\int_{1}^{r}n(t,0,D,3\gamma,f)\,t^{-3/2}\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{r^{k(2\gamma)}}{\pi}\int_{1}^{r}t^{-k(2\gamma)-1}\,dt\int_{-2\gamma}^{2\gamma}\ln^{+}|f(te^{i\varphi})|\,d\varphi+4\gamma m(r,f)+4\gamma r^{k(2\gamma)}\times$$

$$\times\int_{1}^{r}n(t,\infty,D,\gamma,f)\,t^{-k(2\gamma)-1}\,dt+K\gamma r^{k(2\gamma)}.\tag{7}$$

Так как $U\in S_{\mu}$, то $U(r)\geqslant c(r/r_0)^{\mu}U(r_0)$, $U(r_0)>0$, $r\geqslant r_0\geqslant 1$, и $r^{k(2\gamma)}= =o(U(r))$, $r\to\infty$. Из $n(t,\infty,D,\gamma,f)=o(U(t))$, $t\to\infty$, следует

$$\int_{1}^{r}n(t,\infty,D,\gamma,f)\,t^{-k(2\gamma)-1}\,dt=o\left(\int_{1}^{r}U(t)\,t^{-k(2\gamma)-1}\,dt\right)=$$

$$=o\left(U(r)\,r^{-\mu}\int_{1}^{r}t^{\mu-k(2\gamma)-1}\,dt\right)=o(U(r)\,r^{-k(2\gamma)}),\quad r\to\infty.$$

Так как

$$\int_{-2\gamma}^{2\gamma}\ln^{+}|f(te^{i\varphi})|\,d\varphi\leqslant 2\pi m(t,f)=o(U(t)),\quad t\to\infty,$$

то аналогично получаем, что первый интеграл (повторный) в правой части (7) есть $o(U(r)\, r^{-k(2\gamma)})$, $r\to\infty$. Таким образом, правая часть (7) есть $o(U(r))$, $r\to\infty$. Отсюда следует

$$\int\limits_{3\gamma}^{2\pi-3\gamma} \ln^{+}\frac{1}{|f(re^{i\varphi})|}\,d\varphi = o(U(r)), \quad r\to\infty.$$

По теореме 7.3 из [1, с. 58]

$$\int\limits_{-3\gamma}^{3\gamma} \ln^{+}\frac{1}{|f(re^{i\varphi})|}\,d\varphi \leqslant 72\gamma \ln\frac{\pi e}{3\gamma}\, T(2r, f) \leqslant K_1\gamma \ln\frac{\pi e}{3\gamma}\, U(r),$$

где K_1 — постоянная, не зависящая от r и γ. Здесь учтено, что $U\in W$. Таким образом, $m(r, 1/f) \leqslant K_1\gamma\ln\dfrac{\pi e}{3\gamma}U(r) + o(U(r))$, $r\to\infty$. Учитывая, что γ можно выбрать произвольно малым, получаем $m(r, 1/f) = o(U(r))$, $r\to\infty$. Далее, так как $U\in W$, то из (7) следует также

$$n(r, 0, D, 3\gamma, f)\, 2(1-2^{-1/2}) \leqslant r^{1/2}\int\limits_{r}^{2r} n(t, 0, D, 3\gamma)\, t^{-3/2}\,dt = o(U(2r)) =$$

$$= o(U(r)), \ r\to\infty,$$

т. е. (3) с $a=0$. Теорема 3 доказана.

Приведем примеры, показывающие, что некоторые из условий, выступающих в теоремах 1 и 2, не могут быть отброшены или ослаблены. Во всех этих примерах указанные функции имеют только положительные нули.

Пример 1. Пусть f — целая функция нулевого рода с положительными простыми нулями такими, что $n(r, 0, f)\sim r^{l(r)}$, $r\to\infty$, где $l(r) = 1/2 + (1/4)\sin\ln_3 r$, $\ln_3 r = \ln\ln\ln r$. Имеем [1, с. 95—97] ($r\to\infty$)

$$T(r, f) = \frac{2r^{l(r)}}{\left(1+\frac{1}{2}\sin\ln_3 r\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\sin^{+}\ln_3 r\right)} + o(r^{l(r)}),$$

$$m(r, 0, f) = \left(1-\cos\left(\frac{\pi}{4}\sin^{+}\ln_3 r\right)\right) T(r, f) + o(T(r, f)).$$

Отсюда видно, что $\rho = 3/4 > 1/2$, $\Delta(0, f) = 1-2^{-1/2}$, $\delta(0, f) = 0$. В то же время $\delta(\infty, f) = 1$. Таким образом, в теореме 2 условие $\Delta(a, f) = 0$ нельзя заменить более слабым $\delta(a, f) = 0$.

Пример 2. Пусть $f(z) = \cos\sqrt{z}$. Тогда $T(r, f)\sim(2/\pi)\, r^{1/2}$, $r\to\infty$, $\Delta(0, f) = 0$ но, $\delta(\infty, f) = 1$. Очевидно, что $T(r, f)\in W\cap S_{1/2}$, но $T(r, f)\notin S_\mu$ с $\mu > 1/2$. Следовательно, условие $\mu > \omega$ в теореме 1 не может быть ослаблено.

Пример 3. Пусть f_1 — целая функция из примера 1, f_2 — целая функция нулевого рода с нулями, перемежающимися с нулями функции f_1, $f(z) = \cos\sqrt{z}\ (f_1(z)/f_2(z))$. Нетрудно показать, что $m(r, 0, \cos\sqrt{z}) = m(r^{1/2}, 0, \cos z) = O(1)$, $r\to\infty$ (это можно или: получить элементарными рассуждениями, или сослаться на [4] (гл. IV, п. 3)). С другой стороны, $m(r, 0, f_1/f_2) = O(\ln r)$, $r\to\infty$ [1, с. 424] (лемма 5.4). Поэтому $m(r, 0, f) = O(\ln r)$, $r\to\infty$, и $\Delta(0, f) = 0$. Далее $T(r, f) = N(r, 0, f) + O(\ln r) = 2r^{1/2}\pi^{-1} + r^{l(r)}/l(r) + o(r^{l(r)})$, $N(r, \infty, f) = r^{l(r)}/l(r) + o(r^{l(r)})$, $r\to\infty$. Ясно, что порядок f равен 3/4, $T(r, f)\in W$, а для последовательности $r_k\to\infty$ такой, что $\ln_3 r_k = 3\pi/2 + 2\pi k$, выполняется $T(r_k, f)\sim 2r_k^{1/2}\pi^{-1}$, $N(r_k, \infty, f)\sim 4r_k^{1/4}$, $k\to\infty$, и $\Delta(\infty, f) = 1$. Таким образом, в этом случае $\rho = 3/4 > 1/2 = \omega$ и хотя $\Delta(0, f) = 0$, все же $\Delta(\infty, f) = 1$. Таким образом, в теореме 1 условие $T(r, f)\in S_\mu$, $\mu > 1/2$, не только не может быть отброшено, но его нельзя заменить условием $\rho > 1/2$.

1. *Гольдберг А. А.*, *Островский И. В.* Теория распределения значений мероморфных функций.—М. : Наука, 1970.— 592 с.
2. *Bank S. B.*, *Kaufman R. P.* On the gamma function and the Nevanlinna characteristic // Analysis.— 1986.— **6**, N 2-3.— P. 115—133.
3. *Drasin D.*, *Shea D. F.* Polya peaks and the oscillation of positive function // Proc. Amer. Math. Soc.— 1972.— **34**, N 2.— P. 403—411.
4. *Виттих Г.* Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям.— М.: Физматгиз, 1960.— 320 с.

Львов. ун-т

Получено 14.07.86