УДК 517.5
С. А. Пичугов

Точные оценки приближения в L_p функциями вида $\varphi(x)+\psi(y)$

Многими авторами (см., например, [1—3]) рассматривалась задача приближения функций двух переменных функциями вида $\varphi(x)+\psi(y)$, образующих замкнутое линейное многообразие [1].

В настоящей работе получены неулучшаемые оценки сверху приближения в пространствах L_p периодических функций многих переменных суммами функций одной переменной через смешанные модули непрерывности. С помощью эти оценок найдены необходимые условия для смешанного модуля непрерывности. Соответствующие результаты для функций одной переменной приведены в [4—6].

Пусть L_p, $1\leqslant p\leqslant\infty$, — пространство 2π-периодических функций $\varphi(x)$, таких, что $\|\varphi\|_p=\left((2\pi)^{-1}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|\varphi(x)|^p\,dx\right)^{p^{-1}}<\infty$ при $p<\infty$ и $\|\varphi\|_\infty=$ $=\operatorname{vrai\,sup}|\varphi(x)|$; L_{pr} $(1\leqslant p, r\leqslant\infty)$ — пространство функций $f(x,y)$, 2π-периодических по каждой переменной таких, что

$$\|f\|_{pr}=\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(x,y)|^p\,dx\right)^{r/p}dy\right)^{1/r}<\infty,\quad p,r<\infty,$$

$$\|f\|_{\infty\infty}=\operatorname{vrai\,sup}|f(x,y)|;\tag{1}$$

$\Delta_{uv}f(x,y)=f(x+u,\ y+v)+f(x,y)-f(x+u,\ y)-f(x,\ y+v)$ — смешанная разность функции f; $\omega(f,\ h_1,\ h_2)_{pr}=\sup\{\|\Delta_{uv}f\|_{pr};\ |u|\leqslant h_1,\ |v|\leqslant h_2\}$ — смешанный модуль непрерывности f в пространстве L_{pr}.

Идея доказательства следующей теоремы (соотношение ((7) восходит к [7] и использована в [6].

Теорема 1. *Для* $1\leqslant p<\infty$, $r=\max\{p,\ p'\}$, *где* $p'=p(p-1)^{-1}$, *имеют место неулучшаемые на пространстве* L_{pp} *неравенства*

$$\Big\| f(x,y)-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x,y)\,dx-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x,y)\,dy+$$

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x,y)\,dxdy\Big\|_{pp}\leqslant 2^{-\frac{2}{r}}\left(\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\|\Delta_{uv}f\|_{pp}^{r'}\,dudv\right)^{1/r'},\tag{2}$$

$$\inf_{\varphi,\psi\in L_p}\|f(x,y)-\varphi(x)-\psi(y)\|_{pp}\leqslant 2^{-\frac{2}{r}}\,\omega(f,\ \pi,\ \pi)_{pp},\tag{2'}$$

$$r'=\min\{p,\ p(p-1)^{-1}\}.$$

Доказательство. Введем аналогично (1) пространство $L_{p_1p_2s_1s_2}$ 2π-периодических по каждой переменной функций $g(x,y,u,v)$, таких, что $\|g\|_{p_1p_2s_1s_2}<\infty$. Определим оператор $T: L_{ps}\to L_{p_1p_2s_1s_2}$ соотношением $Tf(x,y)=$ $=\Delta_{uv}f(x,y)$. Имеем

$$\|Tf\|_{\infty\infty\infty\infty}=\operatorname*{vrai\,sup}_{x,y,u,v}|\Delta_{uv}f(x,y)|\leqslant 4\|f\|_{\infty\infty}.\tag{3}$$

$$\|Tf\|_{11\infty\infty}=\operatorname*{vrai\,sup}_{u,v}\|\Delta_{uv}f\|_{11}\leqslant 4\|f\|_{11},\tag{4}$$

$$\|Tf\|_{2222}^2=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\|\Delta_{uv}f\|_{22}^2\,dudv\leqslant 4\|f\|_{22}^2.\tag{5}$$

Используем теорему Рисса — Торина интерполяции линейных операторов в L_p-пространствах со смешанной нормой [8].

Интерполируя оценки норм (4) и (5), (3) и (5), получаем неравенства $\|Tf\|_{p'p'pp} \leqslant 4^{1/p'}\|f\|_{p'p'}$, $1 \leqslant p' \leqslant 2$; $\|Tf\|_{p'p'p'p'} \leqslant 4^{1/p}\|f\|_{p'p'}$, $2 \leqslant p' \leqslant \infty$.

Таким образом, $\|T\|_{p'p' \to p'p'rr} \leqslant 2^{2/r'}$. Тогда для сопряженного оператора T^*

$$\|T^*\|_{ppr'r' \to pp} = \|T\|_{p'p' \to p'p'rr} \leqslant 2^{2/r'}. \tag{6}$$

По определению сопряженного оператора

$$\langle T^*g(x, y, u, v), f(x, y)\rangle = \langle g(x, y, u, v), Tf(x, y)\rangle =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x, y, u, v)\,\Delta_{uv}f(x, y)\,dxdydudv =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x, y)\left(\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (g(x-u, y-v, u, v) + g(x, y, u, v) -\right.$$

$$\left. - g(x-u, y, u, v) - g(x, y-v, u, v)\,dudv\right) dxdy.$$

Отсюда

$$T^*g(x, y, u, v) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (g(x-u, y-v, u, v) + g(x, y, u, v) -$$

$$- g(x-u, y, u, v) - g(x, y-v, u, v))\,dudv.$$

Значит, на элементе $Tf(x, y)$ оператор T^* принимает значение

$$T^*Tf(x, y) = T^*\Delta_{uv}f(x, y) = 4\left(f(x, y) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x, y)\,dx -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x, y)\,dy + \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x, y)\,dxdy\right). \tag{7}$$

Из этого представления, используя (6), имеем

$$\inf_{\varphi, \psi \in L_p} \|f(x, y) - \varphi(x) - \psi(y)\|_{pp} \leqslant \|f(x, y) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x, y)\,dx -$$

$$- \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x, y)\,dy + \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x, y)\,dxdy\,\|_{pp} =$$

$$= \frac{1}{4}\|T^*Tf\|_{pp} \leqslant \frac{1}{4}\|T^*\|_{ppr'r' \to pp}\|Tf\|_{ppr'r'} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{-\frac{2}{r}}\left(\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \|\Delta_{uv}f\|_{pp}^{r'}\,dudv\right)^{1/r'} \leqslant 2^{-\frac{2}{r}}\omega(f, \pi, \pi)_{pp}.$$

Оценки (2), (2′) доказаны.

Для доказательства неулучшаемости заметим, что если $f(x, y)$ имеет вид $f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$, то

$$\inf_{\varphi, \psi \in L_p} \|f_1(x) f_2(y) - \varphi(x) - \psi(y)\|_{pp} = \|(f_1(x) - c_1)(f_2(y) - c_2)\|_{pp} =$$

$$= \|f_1 - c_1\|_p \|f_2 - c_2\|_p = \inf_c \|f_1 - c\|_p \inf_c \|f_2 - c\|_p,$$

где c_i, $i = 1, 2$, — наилучшие постоянные приближения f_i в L_p. Это сразу следует из того, что функция $c_1 f_2(y) + c_2 f_1(x) - c_1 c_2$ удовлетворяет критерию элемента наилучшего приближения в L_{pp} (см., например, [9]) подпространством функций вида $\varphi(x) + \psi(y)$.

Используем еще тот факт [10], что

$$\sup_{f_1\in L_p} \frac{\inf\limits_{c_1} \| f_1 - c_1 \|_p}{\omega(f_1, \pi)_p} \geqslant 2^{-\frac{1}{r}},$$

где $\omega(f_1, h)_p = \sup\limits_{|t|\leqslant h} \| f_1(x+t) - f_1(x)\|_p$. Так как $\omega(f_1(x) f_2(y), h_1, h_2)_{pp} = \omega(f_1, h_1)_p\, \omega(f_2, h_2)_p$, то

$$\sup_{f\in L_{pp}} \frac{\left\| f(x, y) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x, y)\,dx - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x, y)\,dy + \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x, y)\,dxdy \right\|_{pp}}{\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \| \Delta_{uv} f\|_{pp}^{r'}\,dudv\right)^{1/r'}} \geqslant$$

$$\geqslant \sup_{f\in L_{pp}} \frac{\inf\limits_{\varphi, \psi\in L_p} \| f(x, y) - \varphi(x) - \psi(y)\|_{pp}}{\omega(f, \pi, \pi)_{pp}} \geqslant \sup_{f_1\in L_p} \frac{\inf \| f_1 - c\|_p^2}{\omega(f_1, \pi)_p^2} \geqslant 2^{-\frac{2}{r}}.$$

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Для функций* $f\in L_{pp}$ *справедливо неравенство*

$$\omega(f, \pi, \pi)_{pp} \leqslant 2^{2/r'} \left(\frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{\pi} \omega^{r'}(f, u, v)_{pp}\,dudv\right)^{1/r'}, \tag{8}$$

где $r' = \min\{p, p'\}$.

Доказательство. Ввиду того что $\Delta_{uv}(\varphi(x) + \psi(y)) = 0$, используя теорему 1, получаем (8)

$$\omega(f, \pi, \pi)_{pp} = \inf_{\varphi, \psi\in L_p} \sup_{\substack{|u|\leqslant\pi \\ |v|\leqslant\pi}} \| \Delta_{uv}(f(x, y) - \varphi(x) - \psi(y)\|_{pp} \leqslant$$

$$\leqslant 4 \inf_{\varphi, \psi\in L_p} \| f(x, y) - \varphi(x) - \psi(y)\|_{pp} \leqslant 2^{2/r'}\left(\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \| \Delta_{uv} f\|_{pp}^{r'}\,dudv\right)^{1/r'} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{2/r'}\left(\frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{\pi} \omega^{r'}(f, u, v)_{pp}\,dudv\right)^{1/r'}.$$

Теорема 2 дает простое необходимое условие для смешанных модулей непрерывности в L_{pp}. Например, функция $\omega(u, v) = u^{\alpha}v^{\beta}$, $0\leqslant u, v\leqslant\pi$, не является модулем непрерывности в L_{pp} при α и β, таких, что $(\alpha r' + 1)\times(\beta r' + 1) > 4$.

В заключение отметим, что теоремы 1, 2 остаются в силе с очевидными изменениями в формулировке в случае приближения функции m переменных $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функциями вида $\sum\limits_{i=1}^{m} \varphi_i(x_i)$. В этом случае в правых частях (2), (2′) константа $2^{-2/r}$ заменяется на $2^{-m/r}$, а $2^{2/r'}$ в (8) — на $2^{m/r'}$.

1. *Брудный Ю. А.* Приближение функций n переменных квазимногочленами // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1970.— 34, № 3.— С. 565—584.
2. *Темляков В. Н.* Приближение периодических функций многих переменных комбинациями функций, зависящих от меньшего числа переменных // Исслед. по теории дифференциальных функций многих переменных и ее приложения / Тр. Мат. ин-та СССР.— М. : Наука, 1986.— С. 243—252.

3. *Бабаев М.-Б. А.* Приближение соболевских классов функций суммами произведений функций меньшего числа переменных // Теория функций и смежные вопросы анализа. Тр. конф. по теории функций // Там же.— 1987.— С. 30—32.
4. *Юдин В. А.* О модуле непрерывности в L_2 // Сиб. мат. журн.— 1979.— **20**, № 2. С. 449—450.
5. *Конягин С. В.* О модулях непрерывности функций // Всесоюз. школа по теории функций: Тез. докл. (Кемерово, 10—19 сент. 1983 г.).— Кемерово: Кемеров. ун-т, 1983.— С. 6.
6. *Иванов В. И.* О модуле непрерывности в L_p // Мат. заметки.— 1987.— **31**, № 5.— С. 682—686.
7. *Williams L. R.*, *Welles J. H.* L_p-inequalites // J. Math. Anal. Appl.— 1978.— **64**, N 3.— P. 518—529.
8. *Benedeck A.*, *Panzone R.* The spaces L_p with mixed norm // Duke Math. J.— 1961.—128.— P. 301—324.
9. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения.— М. : Наука, 1976.— 320 с.
10. *Бердышев В. И.* О теореме Джексона в L_p // Тр. Мат. ин-та АН СССР.— 1967.— 88.— С. 3—16.

Днепропетр. ун-т

Получено 23.05.88