УДК 517.956

И. Н. Александрович

Дифференциальные операторы, определяющие решение одного класса уравнений эллиптического типа

В настоящей работе строятся дифференциальные операторы $Lg(z)$, $N\overline{f(z)}$, переводящие произвольные голоморфные в односвязной области D плоскости $z = x + iy$ функции в регулярные решения уравнения

$$W_{z\bar{z}} + \frac{(n-m)\,\varphi'(z)}{\varphi(z) + \overline{\psi(z)}} W_{\bar{z}} - \frac{n(m+1)\,\varphi'(z)\,\overline{\psi'(z)}}{(\varphi(z) + \overline{\psi(z)})^2} W = 0, \tag{1}$$

где $\varphi(z)$, $\psi(z)$ — голоморфные функции, удовлетворяющие условию $(\varphi(z) + \overline{\psi(z)})\,\varphi'(z)\,\psi'(z) \neq 0$; $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$; $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$.

Дифференциальный оператор $Lg(z)$, определяющий решение уравнения (1), ищем в виде

$$Lg(z) = \sum_{k=0}^{n} C_k a^{n-k}(z, \bar{z})\, g^{(k)}(z), \tag{2}$$

где $C_k \in \mathbb{R}$, $C_0 \neq 0$, $C_n = 1$, $a(z, \bar{z})$ — неизвестная функция, отличная от нуля, $g(z)$ — произвольная голоморфная в области D функция.

Для определения коэффициентов C_k, $k = \overline{0, n-1}$, и функции $a(z, \bar{z})$ получаем следующую систему уравнений:

$$C_k \Big\{(n-k)\,a^{n-k-1} a_{z\bar{z}} + (n-k)(n-k-1)\,a^{n-k-2} a_z a_{\bar{z}} + \frac{(n-m)\,\varphi'(z)}{\varphi(z) + \overline{\psi(z)}} \times$$
$$\times (n-k)\,a^{n-k-1} a_{\bar{z}} - \frac{n(m+1)\,\varphi'(z)\,\overline{\psi'(z)}}{(\varphi(z) + \overline{\psi(z)})^2} a^{n-k}\Big\} + C_{k-1}(n+1-k) \times$$
$$\times a^{n-k} a_{\bar{z}} = 0, \quad k \div \overline{0, n-1} \tag{3}$$

$$C_{n-1} a_{\bar{z}} = \frac{n(m+1)\,\varphi'(z)\,\overline{\psi'(z)}}{(\varphi(z) + \overline{\psi(z)})^2}, \quad C_{-1} = 0. \tag{4}$$

Из (3) и (4) имеем

$$a(z, \bar{z}) = -\frac{(m+1)\,\varphi'(z)}{\varphi(z) + \overline{\psi(z)}}, \tag{5}$$

$$C_{k-1} = \frac{k(n-k+1+m)}{(n-k+1)(m+1)} C_k. \tag{6}$$

С помощью (6), учитывая, что $C_n = 1$, получаем

$$C_k = \frac{n!\,(m+1)_{n-k}}{(m+1)^{n-k}\,(n-k)!\,k!}. \tag{7}$$

Здесь $(m+1)_{n-k} = (m+1)(m+2)\ldots(m+n-k)$ — символы Похгаммера.

Таким образом, оператор $Lg(z)$ имеет вид

$$Lg(z) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{n!\,(m+1)_{n-k}}{k!\,(n-k)!} \frac{(\varphi'(z))^{n-k}}{(\varphi(z) + \overline{\psi(z)})^{n-k}} g^{(k)}(z) \tag{8}$$

и является решением уравнения (1), т. е. $W(z, \bar{z}) = Lg(z)$.

Дифференциальный оператор $N\overline{f(z)}$, также определяющий решение уравнения (1), будем искать в виде

$$N\overline{f(z)} = \sum_{k=0}^{m} C_k b^{n-k}(z, \bar{z})\,\overline{f^{(k)}(z)}, \tag{9}$$

где $C_k \in \mathbb{R}$, $C_0 \neq 0$, $b = b(z, \bar{z}) \neq 0$, $f(z)$ — произвольная голоморфная функция.

Подставляя правую часть (9) в (1) и приравнивая коэффициенты при $\overline{f^{(k)}(z)}$, получаем систему

$$C_{k-1}\left[(n-k+1)\,b^2 b_z + \frac{(n-m)\,\varphi'(z)}{\varphi(z)+\overline{\psi(z)}}\,b^3\right] + C_k\left[(n-k)(n-k-1)\,b_z b_{\bar{z}} + \right.$$

$$\left. + (n-k)\,b b_{z\bar{z}} + \frac{(n-m)\,\varphi'(z)}{\varphi(z)+\overline{\psi(z)}}\,(n-k)\,b b_{\bar{z}} - \frac{n(m+1)\,\varphi'(z)\,\overline{\psi'(z)}}{(\varphi(z)+\overline{\psi(z)})^2}\,b^2\right] = 0,$$

$$C_{-1} = 0, \quad k \div \overline{0, n}, \tag{10}$$

$$\frac{(n-m)\,\varphi'(z)}{\varphi(z)+\overline{\psi(z)}}\,b + (n-m)\,b_z = 0. \tag{11}$$

Из уравнения (11) находим

$$b(z, \bar{z}) = \frac{\overline{\psi'(z)}}{\varphi(z)+\overline{\psi(z)}}\,. \tag{12}$$

Подставляя (12) в (10), для определения C_k получаем рекуррентную формулу

$$C_{k-1} = kC_k\,\frac{n+m-k+1}{k-m-1}\,. \tag{13}$$

Пусть $C_m = 1$. Тогда $C_{m-1} = -m\,\dfrac{n+1}{1!}$; $C_{m-2} = \dfrac{(m-1)\,m(n+1)(n+2)}{2!}$; ... . Таким образом, имеем

$$C_k = (-1)^{m-k}\,\frac{m!\,(n+1)_{m-k}}{k!\,(m-k)!}\,, \tag{14}$$

где $(n+1)_{m-k}$ — известные символы Похгаммера. Окончательно оператор $N\overline{f(z)}$ имеет вид

$$N\overline{f(z)} = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k}\,\frac{m!\,(n+1)_{m-k}}{k!\,(m-k)!}\,\frac{(\overline{\psi'(z)})^{n-k}}{(\varphi(z)+\overline{\psi(z)})^{n-k}}\,\overline{f^{(k)}(z)} \tag{15}$$

и является решением уравнения (1), т. е. $W(z, \bar{z}) = N\overline{f(z)}$.

Полученные результаты сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема. *Пусть $g(z)$ и $f(z)$ — произвольные голоморфные функции. Тогда функция $W(z, \bar{z})$, определяемая равенством*

$$W(z, \bar{z}) = Lg(z) + N\overline{f(z)} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\,\frac{n!\,(m+1)_{n-k}}{k!\,(n-k)!}\,\times$$

$$\times\,\frac{(\varphi'(z))^{n-k}}{(\varphi(z)+\overline{\psi(z)})^{n-k}}\,g^{(k)}(z) + \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k}\,\frac{m!\,(n+1)_{m-k}}{k!\,(m-k)!}\,\times$$

$$\times\,\frac{(\overline{\psi'(z)})^{n-k}}{(\varphi(z)+\overline{\psi(z)})^{n-k}}\,\overline{f^{(k)}(z)}, \tag{16}$$

является решением уравнения (1).

Представление (16) позволяет решить следующие краевые задачи.

Задача Дирихле. Пусть D — правая полуплоскость $x > 0$. Требуется найти регулярное в D решение уравнения

$$W_{z\bar{z}} + \frac{1}{z+\bar{z}} W_{\bar{z}} - \frac{1}{(z+\bar{z})^2} W = 0, \tag{17}$$

удовлетворяющее краевому условию

$$\lim_{\bar{z}\to -z} (z+\bar{z}) W(z, \bar{z}) = \alpha(y), \quad -\infty < y < \infty. \tag{18}$$

Здесь $\alpha(y) = \alpha_1(y) + i\alpha_2(y)$ — заданная непрерывная ограниченная функция от y.

В соответствии с (16) решение задачи ищем в виде

$$W(z, \bar{z}) = -\frac{1}{z+\bar{z}} \left(g(z) - \overline{f(z)}\right) + g'(z). \tag{19}$$

Удовлетворяя условию (18) и предполагая, что

$$\lim_{\bar{z}\to -z} (z+\bar{z}) g'(z) = 0, \tag{20}$$

получаем $[-g(z) + \overline{f(z)}]_{x=0} = \alpha(y)$ или

$$\operatorname{Re}[-g + f]_{x=0} = \alpha_1(y), \tag{21}$$

$$\operatorname{Re}[i(g+f)]_{x=0} = \alpha_2(y). \tag{22}$$

Будем считать, что функция $\alpha(y)$ на всей оси y правильно непрерывна и в окрестности бесконечно удаленной точки удовлетворяет условию $H(\nu)$, т. е.

$$|\alpha(y_1) - \alpha(y_2)| \leqslant A \left|\frac{1}{y_2} - \frac{1}{y_1}\right|^{\nu}, \quad A, \nu - \text{const} > 0,$$

при достаточно больших $|y_1|$ и $|y_2|$. Тогда решение задачи Дирихле для полуплоскости $x > 0$ при краевом условии соответственно (21), (22) можно записать в виде [1]

$$-g(z) + f(z) = -\frac{1}{\Pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_1(t)}{t+iz} dt + iC_1,$$

$$g(z) + f(z) = \frac{1}{\Pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_2(t)}{t+iz} dt - C_2$$

(C_1, C_2 — вещественные постоянные). Отсюда

$$g(z) = \frac{1}{2\Pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha(t)}{t+iz} dt - i\frac{C}{2}, \quad C = C_1 + iC_2, \tag{23}$$

$$\overline{f(z)} = \frac{1}{2\Pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha(t)}{t - i\bar{z}} dt - i\frac{C}{2}. \tag{24}$$

Так как интеграл в формуле (23) можно дифференцировать по параметру z, то

$$g'(z) = \frac{1}{2\Pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha(t)}{(t+iz)^2} dt. \tag{25}$$

Подставляя (23), (24) и (25) в (19), получаем решение задачи Дирихле для уравнения (17):

$$W(z, \bar{z}) = -\frac{1}{2\Pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(t) \frac{z - \bar{z} - 2it}{(t+iz)^2 (t - i\bar{z})} dt.$$

Аналогично решается следующая задача.

З а д а ч а Н е й м а н а. Найти регулярное в полуплоскости $x > 0$ решение уравнения (17), удовлетворяющее краевому условию

$$\lim_{x \to 0} (z + \bar{z})^2 (\partial W / \partial z + \partial W / \partial \bar{z}) = \beta (y), \quad -\infty < y < \infty. \tag{26}$$

Искомое решение задачи ищем в виде (19). Удовлетворяя условию (26) и предполагая, что

$$\lim_{z \to -\bar{z}} (z + \bar{z}) (g'(z) - \overline{f'(z)}) = 0, \quad \lim_{z \to -\bar{z}} (z + \bar{z})^2 g''(z) = 0,$$

находим значения $g(z)$ и $\overline{f(z)}$:

$$g(z) = -\frac{1}{4\Pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta(t)}{t + iz} + iC, \quad \overline{f(z)} = -\frac{1}{4\Pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta(t)}{t - i\bar{z}} + iC.$$

Здесь $\beta(y)$ — заданная непрерывная ограниченная функция от y, удовлетворяющая в окрестности бесконечно удаленной точки условию $H(\nu)$. Решение задачи имеет вид

$$W(z, \bar{z}) = \frac{z + \bar{z}}{4\Pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta(t)}{(t + iz)^2 (t - i\bar{z})} dt.$$

1. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного.— М. : Наука, 1973.— 736 с.

Киев, ун-т Получено 02.10.86