УДК 517

**Ю. Л. Далецкий** (Нац. техн. ун-т Украины „КПИ", Киев)

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ В ОПЕРАДАХ*

We describe certain structures of formal differential geometry in terms of the theory of operads and introduce group structures, Lie-algebra structures, exponential mappings, and an analog of the de Rham complex.

Описані деякі конструкції формальної диференціальної геометрії в термінах теорії операд; запроваджені групові структури, структури алгебри Лі, експоненціальні відображення, аналог комплекса де Рама.

**1.** Основные понятия дифференциальной геометрии гладких многообразий — отображения, сечения расслоений, связности и т. д. локально описываются в терминах гладких отображений линейных пространств (конечно- или бесконечномерных). Аналоги всех этих конструкций можно осуществить [1, 2] в рамках категории, объектами которой являются линейные пространства $X$, а морфизмами — формальные операторные степенные ряды. В конечном счете, описание проводится в терминах пространств $L_n(X)$ полилинейных отображений пространства $X$.

Следующий шаг обобщения сосотоит в том, чтобы отказаться от использования объектов исходной категории — пространств $X$. Этого можно добиться, используя язык и конструкции теории операд (см. [3]).

*Операдой (алгебраической)* называется коллекция $P = \{P(n), n = 1, 2, \dots\}$ линейных пространств, имеющая следующие свойства:

а) для любых $k, m_1, \dots, m_k \in \mathbb{Z}_+$ определена ассоциативная билинейная операция композиции

$$P(k) \circ \{P(m_1) \otimes \dots \otimes P(m_k)\} \subset P(m_1 + \dots + m_k);$$

б) при каждом $n$ пространство $P(n)$ является модулем над симметрической группой $\Sigma_n$ и действия этих групп эквивариантны относительно композиции:

$$\forall\ \sigma'_k \in \Sigma_k,\ \sigma''_1 \in \Sigma_{m_1}, \dots, \sigma''_k \in \Sigma_{m_k} \mapsto \exists\, \sigma \in \Sigma_{m_1 + \dots + m_k},$$

так что

$$(\sigma'_k a_k) \circ \left\{(\sigma''_1 a_{m_1}) \otimes \dots \otimes (\sigma''_k a_{m_k})\right\} = \sigma a_{m_1 + \dots + m_k}.$$

Здесь и далее элементы $P(k)$ обозначены малыми буквами с нижним индексом $k$.

Из свойства а) следует, что $P(1)$ — ассоциативная алгебра и каждое $P(k)$ является левым $P(1)$-модулем и правым $P(1) \otimes \dots \otimes P(1)$-модулем. В связи с этим предполагается свойство в) алгебра $P(1)$ имеет единицу $I$, действие которой в этих модулях тождественно:

$$I \circ a_k = a_k \circ \{I \otimes \dots \otimes I\} = a_k.$$

Будем использовать обозначение $a_m \circ \left\{I \otimes \dots \otimes \overset{(j)}{a}_k \otimes \dots \otimes I\right\} = a_m \otimes_j a_k$ Здесь и всюду ниже верхний индекс указывает место, на котором расположен указанный элемент.

---

* Выполнена при поддержке программы ISSEP, грант № SPU041021.

Примером операды может служить операда эндоморфизмов линейного пространства $X$ — коллекция пространств $P(n) = L_n(X)$. Освободиться от „несущего" пространства $X$ — означает перейти к рассмотрению более общих операд. Цель данной статьи — показать, что при этом можно сохранить ряд конструкций и результатов формальной дифференциальной геометрии, рассмотренных в работах [1, 2].

**2.** Будем рассматривать банаховы операды, составленные из банаховых пространств с непрерывными операциями композиции (с некоторыми естественными оговорками результаты распространяются и на линейные топологические пространства).

Рассмотрим бесконечное прямое произведение $P(\infty) = \mathop{\times}\limits_{n=1}^{\infty} P(n)$. Его элементы — бесконечные наборы $a = (a_1, \ldots, a_n, \ldots)$, $a_n \in P(n)$, назовем *оперантами*, элементы $a_n$ — *компонентами операнты*. Как правило, мы обозначаем компоненты операнты той же буквой с индексом, указывающим на номер пространства.

Пространство $P(\infty)$ — линейное топологическое пространство с естественными покомпонентными линейными операциями и покомпонентной сходимостью. Определим в нем операцию композиции с помощью формулы

$$(a \circ b)_n = \sum_{l=1}^{n} a_l \circ \sum_{k_1+\ldots+k_l=n} b_{k_1} \otimes \ldots \otimes b_{k_l}. \tag{1}$$

Эта операция ассоциативна и линейна по левому аргументу; в этом смысле операнты образуют полуалгебру с единицей $e = (I, 0, \ldots, 0, \ldots)$.

Рассмотрим множество $P_1(\infty) \subset P(\infty)$ оперант с обратимой первой компонентой: для $a \in P_e(\infty)$ существует $a_1^{-1} \in P(1)$: $a_1 \circ a_1^{-1} = a_1^{-1} \circ a_1 = I$.

**Предложение 1.** *Множество $P_1(\infty)$ образует группу относительно операции композиции. Для обратного элемента $a^{(-1)}$ справедлива рекуррентная формула*

$$a_n^{(-1)} = -a_1^{-1} \sum_{m=2}^{n} \sum_{k_1+\ldots+k_m=n} a_m \circ \left(a_{k_1}^{(-1)} \otimes \ldots \otimes a_{k_m}^{(-1)}\right). \tag{2}$$

*Рекуррентная система* (2) *имеет явное решение*

$$a_n^{(-1)} = \sum_{r=1}^{n-1} (-1)^r a_1^{(-1)} \sum_{k_0=1<k_1<\ldots<k_r=n} \mathop{\circ}\limits_{m=1}^{r} \sum_{s_1+\ldots+s_{k_{m-1}}=k_m} \hat{a}_{s_1} \otimes \ldots \otimes \hat{a}_{s_{k_{m-1}}}, \tag{3}$$

*где* $\hat{a}_s = a_s \circ \left(a_1^{-1} \otimes \ldots \otimes a_1^{-1}\right)$.

Формула (2) следует непосредственно из (1), формула (3) может быть получена из (2) по индукции.

Другой интересный объект в пространстве оперант — композиционная экспонента.

Рассмотрим в $P(\infty)$ однопараметрическую подгруппу

$$u(t):\ u(t+\tau) = u(\tau)u(t), \quad t, \tau \in \mathbf{R}_1.$$

Предполагая ее дифференцируемой по параметру $t$, назовем производящим элементом операнту $c = u'(0)$. Дифференцируя групповое соотношение почленно при $\tau = 0$, получаем дифференциальное уравнение

$$u'(t) = c \circ u(t), \quad u(0) = e \tag{4}$$

(здесь и далее мы понимаем дифференцирование как покомпонентное в банаховых пространствах операды).

Уравнение (4) при покомпонентной записи сводится к рекуррентной системе дифференциальных уравнений в банаховых пространствах $P(n)$:

$$u_n'(t) = c_1 u_n(t) + f_n(t), \quad u_1(0) = I, \quad u_n(0) = 0, \quad n \geq 2,$$

где

$$f_n(t) = \sum_{m=2}^{n} \sum_{k_1+\ldots+k_m=n} c_m \circ \left(u_{k_1}(t) \otimes \ldots \otimes u_{k_m}(t)\right).$$

Эта система однозначно решается с помощью известных формул

$$u_1(t) = \exp tc_1, \quad u_n(t) = \int_0^t \exp\{(t-v)c_1\} f_n(v)\, dv, \quad n \geq 1. \tag{5}$$

Назовем дифференцируемую однопараметрическую группу с производящим элементом $c$ композиционной экспонентой этого элемента и обозначим $u(t) = \mathring{\exp} tc$.

**Предложение 2.** *Отображение* $\mathring{\exp} : P(\infty) \to P_1(\infty)$ *взаимно однозначно. Его образом является множество* $P_{\exp} = \{a \in P_1(\infty) : \exists\, c_1 \in P(1), \ a_1 = \exp c_1\}$. *На этом множестве определено обратное отображение* $\mathring{\log} : P_{\exp} \to P(\infty)$ — *композиционный логарифм. Компоненты композиционного логарифма* $c = \mathring{\log} a$ *удовлетворяют рекуррентной системе*

$$\int_0^1 \exp\{(1-v)c_1\} c_n \circ \{(\exp vc_1 \otimes \ldots \otimes \exp vc_1\}\, dv = g_n, \quad n \geq 2,$$

*где* (*как следует из* (5))

$$g_n = a_n - \int_0^1 \exp\{(1-v)c_1\} \sum_{m=2}^{n-1} c_m \circ$$

$$\sum_{k_1+\ldots+k_m=n} a_{k_1}(v) \otimes \ldots \otimes a_{k_m}(v)\, dv, \quad a_k(v) = \left(\mathring{\exp} vc\right)_k.$$

***Замечание.*** Входящие в эту формулу компоненты $\left(\mathring{\exp} vc\right)_k$, $k \leq n-1$, вычисляются с помощью формулы (5) по уже найденным компонентам композиционного логарифма $c_k$, $k \leq n-1$.

Заметим, что решение уравнений может быть получено с помощью известных формул операторного исчисления (см. [6]).

**3.** Обозначим через $L(X, Y)$ банахово пространство линейных непрерывных операторов, действующих из банахова пространства $X$ в банахово пространство $Y$. Здесь мы будем записывать действие $A \in L(X, Y)$ на элемент $x \in X$ как правое: $y = xA \in Y$ и в соответствии с этим записывать произведение операторов $A \in L(X, Y)$, $B \in L(Y, Z)$ в виде $AB \in L(X, Z)$.

Рассмотрим множество $\mathbf{B}$ верхнетреугольных блочных матриц $\beta$ с элементами $\beta_{jk} \in L(P(j), P(k))$, $k \geq j$, $\beta_{jk} = 0$, $j > k$. Множество $\mathbf{B}$ представляет собой алгебру с естественными линейными операциями и умножением по правилу

$$(\alpha\beta)_{jk} = \sum_{m=j}^{k} \alpha_{jm}\beta_{mk}.$$

При этом пространство $P(\infty)$ оказывается $\mathbf{B}$-модулем:

$$\alpha \times \beta \mapsto \alpha\beta, \quad (\alpha\beta)_k = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \beta_{jk}, \quad a \in P(\infty), \quad \beta \in \mathbf{B}.$$

**Предложение 3.** *Полуалгебра* $P(\infty)$ *имеет в* $\mathbf{B}$ *представление*

$$b \mapsto \gamma(b): \gamma(a \circ b) = \gamma(a)\gamma(b),$$

*определяемое формулой*

$$\gamma(b)_{jk} = \sum_{m_1+\ldots+m_j=k} b_{m_1} \otimes \ldots \otimes b_{m_j},$$
$$a_j\gamma(b)_{jk} = a_j \circ \sum_{m_1+\ldots+m_j=k} b_{m_1} \otimes \ldots \otimes b_{m_k}. \tag{6}$$

*Это представление — изоморфизм: прообраз определяется по формуле* $b_k = \gamma(b)_{1k}$.

Применим построенное представление к композиционной экспоненте. Пусть $z(t) = \gamma\left(\overset{\circ}{\exp} tb\right)$. Тогда выполняется групповое соотношение в пространстве $\mathbf{B}$

$$z(t+\tau) = z(t)z(\tau). \tag{7}$$

Рассмотрим производящую матрицу этой группы

$$\pi(b) = \frac{d}{dt}\gamma\left(\overset{\circ}{\exp} tb\right)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\gamma(e+tb)\Big|_{t=0}.$$

Нетрудно с помощью формулы (6) проверить, что

$$\pi(b)_{jk} = \sum_{m=1}^{j}\left(I \otimes \ldots \otimes \overset{(j)}{b_{k-j+1}} \otimes \ldots \otimes I\right), \quad k \geq j. \tag{8}$$

Из (7) следует матричное дифференциальное уравнение

$$z'(t) = \pi(b)z(t), \quad z(0) = I.$$

Это приводит к следующему утверждению.

**Предложение 4.** *Имеет место представление композиционной экспоненты с помощью матричной экспоненты в пространстве* $\mathbf{B}$

$$\left(\overset{\circ}{\exp} b\right)_n = (\exp \pi(b))_{1n}. \tag{9}$$

Полученная формула позволяет провести явное (не рекуррентное) вычисление композиционной экспоненты. Для этого достаточно вычислить матричную экспоненту, стоящую в правой части (9). Воспользуемся известной формулой

$$\exp t(\alpha+\beta) = \exp t\alpha +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ldots \int_0^{t_{n-1}} \{\exp(t-t_1)\alpha\}\beta\{\exp(t_1-t_2)\alpha\}\beta \ldots \beta\{\exp t_n\alpha\}\, dt_n.$$

Пусть $\alpha$ — диагональная часть матрицы $\pi(b)$, $\beta$ — оставшаяся верхнетреугольная часть. Из формулы (8) следует

$$\alpha_{jj} = \sum_{m=1}^{j} I\otimes\ldots\otimes \overset{(m)}{b_1} \otimes\ldots\otimes I, \quad \beta_{jk} = \sum_{m=1}^{j} I\otimes\ldots\otimes \overset{(m)}{b}_{k-j+1} \otimes\ldots\otimes I.$$

После некоторых вычислений получаем формулу

$$\left(\overset{\circ}{\exp}\, tb\right)_k = (\exp t\pi(b))_{1k} = \sum_{m=1}^{k-1} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ldots \int_0^{t_{m-1}} dt_m \exp\{(\tau b_1)\} \times$$
$$\times \sum_{j_0=1<j_1<\ldots<j_m=k} b_{1j_1}(t_1)\circ b_{j_1j_2}(t_2)\circ\ldots\circ b_{j_{m-1}k}(t_m),$$

где

$$b_{jk}(t) = \exp(-tb_1)\sum_{s=1}^{j} \overset{(s)}{b}_{k-j+1} \circ \bigotimes_1^{k-j+1} \exp(tb_1). \tag{10}$$

**4.** Описание различных конструкций, связанных с операдами, удобно проводить с помощью специальных графов — деревьев. Деревом называется ориентированный связный граф, состоящий из ребер и вершин. Каждая вершина $q$ имеет точно одно выходящее ребро и $m = m(q) > 1$ входящих; число $m(q)$ назовем порядком вершины. Ребра могут быть ограничены двумя вершинами (внутренние) и одной (внешние). Дерево $T$ имеет точно одно выходящее внешнее ребро (корень — его ограничивает единственная корневая вершина) и $n(T) > 1$ входящих (листьев). Назовем $n(T)$ порядком дерева. Обозначим через $M(q)$ множество ребер, входящих в вершину $q$, и $M(T)$ — множество листьев дерева $T$.

Будем рассматривать деревья, маркированные следующим образом. Каждой вершине присваивается номер — мультииндекс $k(q)$. Для корневой вершины $k(q) = 1$. Остальные вершины нумеруются лексикографическим образом. Занумеруем входящие в $q$ ребра каким-либо фиксированным способом (например, считая граф плоским, в естественном порядке) и присвоим противоположным вершинам этих ребер (а также и самим этим ребрам) соответствующие номера $k(q') = (k(q), m)$, $m = 1, \ldots, m(q)$. Будем считать способ нумерации фиксированным для всего множества деревьев; деревья с одинаковой нумерацией будем считать изоморфными.

Введем операцию композиции деревьев. Пусть $T'$, $T''$ — пара деревьев, $j$ — номер одного из листьев дерева $T'$. Тогда по определению $T = T' \circ_j T''$ — дерево, корень которого совпадает с корнем $T'$, множество вершин — объединение множеств вершин деревьев $T'$, $T''$, а корень $T''$ отождествляется с $j$-м листом дерева $T'$, превращая тем самым этот лист во внутреннее ребро. При этом в образе дерева $T''$ меняется нумерация вершин и ветвей: мультииндекс $k$ заменяется на мультииндекс $(j, k)$. Множеством листьев нового дерева оказывается $M(T) = (M(T') \setminus I_j) \cup M(T'')$, а порядок $n(T) = n(T') + n(T'') - 1$.

Дерево $T$ с одной вершиной назовем элементарным, его порядок совпадает с порядком вершины. Легко видеть, что каждое дерево можно представить в виде композиции элементарных. Будем записывать эту операцию в виде $T = \bigcup T_q$. Используя это представление, нетрудно получить следующее утверждение.

**Предложение 5.** *Существует единственное отображение*

$$a \times T \mapsto a(T) \in P(n(T))$$

($a \in P(\infty)$, $T \in \mathbf{T}$ — *множеству всех неэквивалентных деревьев*), *имеющее свойства: для элементарного дерева* $T_n$ *порядка* $n$, $a(T_n) = a_n$ *и для композиции деревьев* $a(T' \circ_j T'') = a(T') \circ_j a(T'')$. *Это отображение сопоставляет каждому дереву* $T$ *подпространство* $P(T) = \{a(T),\ a \in P(\infty)\} \subset P(n(T))$, *причем* $P(T_n) = P(n)$ *и* $P(T') \circ_j P(T'') = P(T' \circ_j T'')$.

В пространстве $P(\infty)$ действуют преобразования

$$V(g, h)a \mapsto a(g, h)\colon\ (a(g, h))_n = g\Big(a_n \circ \overset{n}{\underset{1}{\otimes}} h\Big), \quad g, h \in P(1).$$

Для дерева $T$ с множеством вершин $\{q\}$ можно с помощью композиции элементарных ввести преобразованные компоненты

$$a_T(g, h) = \underset{\{q\}}{\circ} V(g_q, h_q) a_{n(q)}, \quad g = \{g_q\}, \quad h = \{h_q\}.$$

Рассмотрим преобразования двух типов. Первое из них определяется для $V(-I, a_1^{-1})$. Из формулы (3) можно вывести следующее утверждение.

**Предложение 6.** *Для обратной операнты справедливо представление*

$$a_m^{(-1)} = \sum_{T: n(T) = m} a_1^{-1} a_T(-I, a_1^{-1}).$$

Для рассмотрения второго преобразования введем сначала некоторые определения.

Пусть $T$ — маркированное дерево. Определим для вершины с номером $j(q)$ высоту $t_{j(q)}$ так, чтобы сохранялся лексикографический порядок $t > t_1 > \ldots$ $\ldots t_j > \ldots t_{(j,k)} > \ldots > 0$. Будем рассматривать набор $\tau = (t_1, t_{11}, \ldots, t_{111}, \ldots)$ высот всех вершин дерева как точку куба $[0, t]^{r(T)}$ в пространстве размерности, равной количеству $r(T)$ вершин дерева $T$. Приведенные выше неравенства между высотами вершин выделяют в этом кубе многогранник $K(T)$. Определим преобразование

$$a \mapsto a_T(\tau) = \underset{\{q\}}{\circ} V(\exp(-t_{j(q)} a_1), \exp(t_{j(q)} a_1))\, a_{n(q)}.$$

**Предложение 7.** *Для композиционной экспоненты справедливо соотношение*

$$\left(\overset{\circ}{\exp}\, ta\right)_m = \sum_{T: n(T) = m}\ \int\limits_{K(T)} \exp ta_1 a_{T(\tau)}\, d\tau.$$

Это представление можно получить из формулы (10). С другой стороны, можно проверить непосредственно, что полученное выражение представляет собой однопараметрическую группу (см. [4], где подобное вычисление проведено для ветвящихся функциональных интегралов).

Полезно пояснить полученную формулу на простейших примерах (которые можно также получить и непосредственно из (10)). Для $m = 2$ существует лишь одно дерево и ему соответствует формула с одним слагаемым

$$\left(\overset{\circ}{\exp} ta\right)_2 = \int_0^t \exp(t-t_1)a_1 \circ a_2 \circ (\exp t_1 a_1 \otimes \exp t_1 a_1)\,dt_1.$$

При $m=3$ трем деревьям третьего порядка соответствует представление в виде суммы трех слагаемых

$$\left(\overset{\circ}{\exp} ta\right)_3 = \int_0^t \exp(t-t_1)a_1 \circ a_3 \circ (\exp t_1 a_1 \otimes \exp t_1 a_1 \otimes \exp t_1 a_1)dt_1 +$$

$$+ \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_{11} \exp(t-t_1)a_1 \circ a_2 \circ (\exp t_1 a_1 \otimes$$

$$\otimes \exp(t_1 - t_{11})a_1 \circ a_2 \circ \ (\exp t_{11} a_1 \otimes \exp t_{11} a_1)) +$$

$$+ \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_{11} \exp(t-t_1)a_1 \circ a_2 \circ (\exp(t_1 - t_{11})a_1 \circ$$

$$\circ\, a_2 \circ \ (\exp t_{11} a_1 \otimes \exp t_{11} a_1) \otimes \exp t_1 a_1).$$

**5.** Определим в пространстве $P(\infty)$ операцию дифференцирования операнты $a$ вдоль операнты $b$:

$$a \# b = D_b a = \frac{d}{dt} a \circ (e+tb)\Big|_{t=0}.$$

Используя представление в пространстве $\mathbf{B}$, получаем

$$\gamma(a \# b) = \gamma(a)\frac{d}{dt}\gamma(e+tb)\Big|_{t=0} = \gamma(a)\pi(b)$$

и, следовательно,

$$(a \# b)_k = \sum_{j=1}^{k} a_j \pi_{jk}(b) = \sum_{j=1}^{k}\sum_{m=1}^{j} a_j \circ_m b_{k+1-j}.$$

Заметим, что операция $\#$ не ассоциативна, но нетрудно проверить, что ее ассоциатор $a\#(b,c) = (a\#b)\#c - a\#(b\#c)$ симметричен относительно пары $b$, $c$. Из этого следует такое утверждение.

**Предложение 8.** *Пространство $P(\infty)$ имеет структуру алгебры Ли со скобками*

$$[a,b] = a\#b - b\#a. \tag{11}$$

*При этом $P(\infty)$ оказывается правым модулем над полученной алгеброй Ли с действием*

$$L_b\colon a \mapsto a\#b\colon L_a L_b - L_b L_a = L_{[a,b]}.$$

Модуль над алгеброй Ли является основой для конструкции формальной дифференциальной геометрии (см. [7 – 9]). Такие конструкции можно развивать на основании предложения 8. Эти конструкции становятся более естественными при использовании действия в операде симметрических групп.

Будем рассматривать операду $P_s = \{P_s(n)\}$, пространства которой — подпространства пространств исходной операды, состоящие из элементов, инвариантных относительно действия групп $\Sigma_n$. Введем пространство симметричных оперант $P_s(\infty)$. Обозначим через $Q_n\colon P(n) \to P_s(n)$ канонический оператор проектирования — симметризацию. В симметризованном пространстве $P_s(\infty)$ можно ввести модификации операций композиции и дифференцирования $\circ_s = Q\,\circ$, $\#_s = Q\,\#$. При этом, очевидно, сохранятся структурные свойства этих операций, в частности верен аналог предложения 8. Ниже для упрощения записи будем опускать в обозначениях операций нижний значок $s$.

Пусть $\sigma \mapsto S_\sigma$ — представление группы $\Sigma_n$ в пространстве $P(n)$. Рассмотрим для некоторого $l$ вложение $\Sigma'_l \times \Sigma''_n \to \Sigma_{l+n}$, где $\Sigma_l$ — подгруппа перестановок чисел $1, 2, \ldots, l$, а $\Sigma''_n$ — чисел $l+1, \ldots, l+n$. Пусть $S^{l,n} \subset S^{l+n}$ — соответствующая этому вложению подгруппа операторов представления. Обозначим через $A_{\ln} = \{ f \in P(l+n)\colon S^{\ln}_{\sigma'\sigma''} f = (-1)^{\tau(\sigma')} f \}$ подпространство, состоящее из элементов, антисимметричных относительно действия $\Sigma'_l$ и симметричных относительно действия $\Sigma''_n$ и пусть $Q^{\ln}_{n+l}$ — канонический проектор на это подпространство.

Введем в рассмотрение линейные пространства

$$\Omega_0 = P_s(\infty), \qquad \Omega_l = P_l(\infty) = \mathop{\times}_{n=0}^{\infty} A_{\ln} \ (l \geq 1).$$

Обозначим для $\omega_l \in \Omega_l$: $\omega_l = (\omega_{l0}, \omega_{l1}, \ldots, \omega_{\ln}, \ldots)$, $\omega_{\ln} \in A_{\ln} \subset P(l+n)$, $\omega_{00} = 0$ Пусть $d = d_l\colon \Omega_l \to \Omega_{l+1}$ $(l \geq 0)$ — отображение, определяемое формулой

$$(d\omega_l)_{l+1,n} = (n+1) Q^{l+1,n}_{l+n+1} \omega_{l,n+1}. \tag{12}$$

Из свойств операции антисимметризации следует утверждение.

**Предложение 9.** *Набор пространств с отображениями* $\{\Omega_l, d_l\}$, $l = 0, 1, \ldots, j$, *образует комплекс:* $d_{l+1} d_l = 0$. *Элементы пространств* $\Omega_l$, $l \geq 1$, *реализуются как полилинейные отображения пространства* $\Omega_0 = P_s(\infty)$:

$$\omega_l \times (a^1, \ldots, a^l) \mapsto b = \omega_l(a^1, \ldots, a^l),$$

$$b_n = \sum_{r+m_1+\ldots+m_l = n} \omega_{lr} \circ \left( a^1_{m_1} \otimes \ldots a^l_{m_l} \otimes I^{\otimes r} \right).$$

Назовем элементы пространства $\Omega_l$ дифференциальными формами порядка $l$, а элементы алгебры Ли $(P_s(\infty), [\,,])$ — векторными полями. Определим операцию внутреннего умножения дифференциальных форм на векторные поля (при правом действии):

$$\omega \times a \mapsto \omega i_a\colon (\omega i_a)_{l-1,n} = \sum_{r+k=n} \omega_{l,n} \circ_l a_k, \quad \omega \in \Omega_l,\ a \in \Omega_0.$$

Введем операцию дифференцирования Ли $L_a = d i_a + i_a d$. Заметим, что для $b \in \Omega_0$: $b L_a = b \# a$. Прямое вычисление показывает, что выполняется соотношение

$$L_a i_b - i_b L_a = L_{[a,b]}.$$

Это приводит к следующей теореме (см. [7–9]).

**Теорема.** *Комплекс* $\{\Omega_l, d_l\}$ *является комплексом над алгеброй Ли* $\{(P_s(\infty), [\,,])$ *со скобками* (11). *Для дифференциала* (12) *справедлива формула Картана*

$$(d\omega)_{l+1}(a^1, \ldots, a^{l+1}) = \sum_k (-1)^k \omega_l(a^1, \ldots, a^{k-1}, a^{k+1}, \ldots, a^l) \# a^k +$$

$$+ \sum_{j<k} (-1)^{j+k} \omega_l(a^1, \ldots, a^l, [a^j, a^k]).$$

Автор благодарен Б Цыгану, обратившему его внимание на аналогию между описанием операд и приведенной в работах [4, 5] диаграммной техникой вычислений формальных рядов, связанных с нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных и функциональными интегралами по ветвящимся траекториям, за полезную дискуссию в области теории операд.

1. *Арасланов М. Н., Далецкий Ю. Л.* Композиционный логарифм в классе формальных операторных степенных рядов // Функцион. анализ и его прил. – 1992. – **26,** № 2. – С. 57–60.
2. *Баранович А. М., Далецкий Ю. Л.* Некоторые дифференциально-геометрические модели в классе формальных операторных степенных рядов // Укр. мат. журн. – 1996. – **48,** № 6. – С. 739–746.
3. *Ginzburg V. A., Kapranov M. M.* Koszul duality for operads // Duke Math. J. – 1994. – **76.** — P. 203–272.
4. *Далецкий Ю. Л., Фомин С. В.* Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах. – М.: Наука, 1983. – 384 с. (Англ. изд.: *DaleckyYu. L., Fomin S. V.* Measures and differential equations in finite dimensional space. – Kluwer Acad. Publ., 1991. – 337 p.)
5. *Daletskii Yu. L.* Algebra of compositions and non-linear equations // Algebraic and Geometric Methods in Math.-Phys. – 1995. – P. 277–291.
6. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 534 с. (Англ. изд.: *Daletskii Yu. L., Krein M. G.* Stability of solutions of differential equations in Banach space // Amer. Math. Soc. – Providence, Rhode Island, 1973. – 386 p.)
7. *Гельфанд И. М., Дорфман И. Я.* Гамильтоновы операторы и бесконечномерные алгебры Ли // Функцион. анализ и его прил. – 1981. – **15,** № 1. – С. 23–40.
8. *Gelfand I. M., Daletskii Yu. L.* Lie superalgebras and Hamiltonian operators // Repts Math. Univ. Stockholm, Sem. Supermanifolds, No 16. – 1987. – № 20. – P. 1–26.
9. *Гельфанд И. М., Далецкий Ю. Л., Цыган Б. Л.* Об одном варианте некоммутативной дифференциальной геометрии // Докл. АН СССР. – 1989. – **308,** № 6. – С. 1293–1299.

Получено 05.09.96