УДК 517. 5, 519.65

Н. П. Корнейчук (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

СЛОЖНОСТЬ АППРОКСИМАЦИОННЫХ ЗАДАЧ*

We consider some aspects of optimal encoding and recovery related to the problem of complexity of ε-definition of functions posed by Kolmogorov in 1962. We present some estimates for the ε-complexity of the problem of recovery of functions in the uniform metric and the Hausdorff metric.

Розглядаються аспекти оптимального кодування і відновлення, пов'язані з поставленою А. М. Колмогоровим у 1962 р. задачею про складність ε-задання функцій. Наведені деякі оцінки для ε-складності задачі відновлення функцій у рівномірній та хаусдорфовій метриках.

1. В 1962 году на Международном конгрессе математиков в Стокгольме А. Н. Колмогоров выступил с докладом „Различные подходы к оценке трудности приближенного задания и вычисления функций". Текст этого доклада опубликован в трудах конгресса [1] и включен в третью книгу [2, с. 199] избранных трудов А. Н. Колмогорова, вышедшую в 1987 году. В комментариях к работам А. Н. Колмогорова по ε-энтропии и ε-емкости, содержащимся в этой книге, В. М. Тихомиров [2, с. 262] пишет: „В докладе [1] намечена лишь программа дальнейших исследований, в которой по замыслу А. Н. Колмогорова должны воссоединиться концепции теории приближения и вычислительной математики".

Своими пионерскими работами А. Н. Колмогоров положил начало ряду магистральных направлений в математике, в том числе и связанных с теорией приближений. В частности, работа [3], в которой сформулирована задача о поперечниках множеств в нормированном пространстве и получены первые точные результаты, положила начало направлению, без которого сейчас немыслима теория приближений. Однако по поводу доклада [1] В. М. Тихомиров в своих комментариях пишет, что „эта работа практически не получила пока развития". Принимая во внимание содержание доклада [1], можно предполагать, что это утверждение относится, в первую очередь, к той его части, где речь идет об оценке сложности задания и вычисления функций. Поэтому будет уместно коротко остановиться на истории этого вопроса.

2. Под сложностью (complexity) задачи, связанной с приближенным восстановлением математического объекта по неполной информации, можно (если говорить совсем кратко) понимать минимальную стоимость построения приближения с заданной точностью. Впервые это понятие в таком смысле появилось, насколько нам известно, в работах А. Г. Витушкина. В его монографии [4], вышедшей в 1959 году, сделана, как пишет автор, „попытка математического определения на примере конкретных задач табулирования (составления таблиц для функций) понятия сложности задачи". Далее поясняется, что если Φ — метрическое пространство функций с расстоянием ρ, F — компактное множество в Φ, то таблица функции $f \in F$ состоит из набора $y = \{y_1, y_2, \ldots, y_p\}$ числовых параметров и расшифровывающего алгоритма $\Gamma(y)$, который набору y ставит в соответствие функцию $\varphi \in \Phi$ такую, что $\rho(f, \varphi) \le \varepsilon$. Сложность таблицы характеризуется двумя факторами: а) ее объемом (общим количеством двоичных разрядов, необходимых для записи всех параметров таблицы); б) сложностью расшифровывающего таблицу алгоритма $\Gamma(y)$. В качестве такого алгоритма рассматривается алгебраический многочлен p переменных, имеющий по каждой из переменных степень не выше $k \ge 0$; сложность его характеризуется величиной чисел p и k. Задача состоит в том, чтобы [4, с. 11] „на основании общих свойств множества F каким-либо образом оценить слож-

* Выполнена при частичной финансовой поддержке Международного научного фонда, грант UB1200.

ность таблиц для элементов из F''. Основными результатами, приведенными в монографии [4], являются неравенства, дающие оценку сложности таблиц через ε-энтропийные характеристики множества F.

В докладе [1] А. Н. Колмогоров вводит понятие сложности ε-задания функции f. Пусть $f(x)$ удовлетворяет на $[-1, 1]$ условию Липшица

$$|f(x') - f(x'')| \le |x' - x''|, \quad x', x'' \in [-1, 1].$$

Любая таблица, которая каждому двоичному числу

$$x = -1 + x_1, x_2, \dots, x_s, \quad x_i = 0, 1,$$

ставит в соответствие двоичное число

$$y = -1 + y_1, y_2, \dots, y_s = f_\varepsilon(x), \quad y_i = 0, 1, \tag{1}$$

удовлетворяющее условию $|f(x) - f_\varepsilon(x)| \le \varepsilon / 2$, может рассматриваться как таблица, задающая значения $y = f(x)$ с точностью до ε для любого $x \in [-1, 1]$. Зависимость (1) интерпретируется как дискретная векторная функция $Y = \Phi(X)$, отображающая s-мерные векторы $X = \{x_1, x_2, \dots, x_s\}$ в s-мерные векторы $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_s\}$, где x_i и y_i принимают значения 0 и 1. Сложностью векторной функции $Y = \Phi(X)$ А. Н. Колмогоров, ссылаясь на [5], называет минимальное число членов в представлении ее в виде суперпозиции элементарных функций $\zeta = f(\xi, \eta)$, где вспомогательные переменные ξ, η, ζ принимают лишь значения 0 и 1, а сложностью ε-задания функции f — минимальную сложность функций алгебры логики Φ, соответствующих таблицам, задающим $y = f(x)$ с точностью до ε.

В [1] приводятся порядковые оценки сложности ε-задания функций класса

$$W^m = \left\{ f\colon \operatorname*{vraimax}_{-1 \le x \le 1} |f^{(m)}(x)| \le 1 \right\},$$

а также класса A_r функций, допускающих аналитическое продолжение во внутренность эллипса с фокусами в точках -1 и $+1$ и суммой полуосей $r > 1$. Отмечается [2, с. 203], что „незавершенность оценок связана с тем обстоятельством, что до настоящего времени, по-видимому, остается неизвестной асимптотика числа элементарных операций над парами двоичных знаков, необходимого для выполнения умножения двух s-значных чисел".

Можно полагать, что по мнению В. М. Тихомирова „не получило развития" именно направление, связанное с определением сложности ε-задания функции через сложность соответствующих функций алгебры логики. В то же время к понятию сложности задачи приближенного восстановления функций по неполной информации можно подойти, исходя из несколько иных соображений.

В период с 1980 по 1988 год в США вышли три монографии [6–8] (первые две изданы на русском языке издательством „Мир" соответственно в 1983 и 1988 годах), содержащие систематизированное изложение результатов, полученных, главным образом, группой Дж. Трауба, разрабатывающей теорию оптимальных алгоритмов. Одно из центральных мест в этих монографиях занимают вопросы информационной сложности, причем если в [6] предполагается, что информация задается точными данными, то в [7, 8] допускается возможность приближенного задания информации. Пусть N_ρ — заданный на множестве F приближенный информационный оператор (ρ — мера погрешности приближенной информации), P — множество простейших операций p, сложность которых $\operatorname{comp}(p)$ предполагается конечной. Будем также считать, что оператор N_ρ является допустимым по отношению к множеству P, т. е. для любого элемента $f \in F$ существует программа вычисления $N_\rho(f)$, состоящая из конечного числа простейших операций $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Тогда число

$$\operatorname{comp}(N_\rho(f)) = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{comp}(p_i)$$

называется информационной сложностью оператора $N_\rho(f)$.

Пусть, далее, алгоритм восстановления φ, использующий допустимую информацию $N_\rho(f)$, также является допустимым по отношению к P и реализуется программой, состоящей из простейших операций $q_1, q_2, \ldots, q_j$. Тогда

$$\operatorname{comp}(\varphi(N_\rho(f))) = \sum_{i=1}^{j} \operatorname{comp}(q_i),$$

а величина

$$\operatorname{comp}(\varphi) = \sup_{f \in F} [\operatorname{comp}(N_\rho(f)) + \operatorname{comp}(\varphi(N_\rho(f)))]$$

называется сложностью алгоритма φ. Наконец, если $R = R(N_\rho)$ — класс реализуемых алгоритмов, $R(N_\rho, \varepsilon)$ — множество алгоритмов $\varphi \in R(N_\rho)$, обеспечивающих погрешность восстановления не больше ε, а Ψ — класс допустимых информационных операторов N_ρ, то величина

$$\operatorname{comp}(R, \Psi, \varepsilon) = \inf_{N_\rho \in \Psi} \inf \{\operatorname{comp}(\varphi) : \varphi \in R(N_\rho, \varepsilon)\}$$

есть ε-сложность задачи в классе информационных операторов Ψ для класса реализуемых алгоритмов R. В монографиях [6–8] рассмотрен ряд примеров оценки сложности конкретных задач приближенного интегрирования, решения линейных и нелинейных уравнений.

3. Ограничившись рассмотрением тех задач классической теории приближения, которые можно интерпретировать как задачи оптимального восстановления по неполной информации, предпримем попытку изложить подход к исследованию вопросов сложности, тесно связанный с задачей о поперечниках, что позволит, использовав результаты, накопленные в этом направлении, в ряде случаев оценить сложность аппроксимационной задачи.

Будем исходить из введенного А. Н. Колмогоровым понятия сложности ε-задания, определяя его в более общей ситуации и следуя, в основном, идеологии книг [6–8]. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, F — фиксированное множество в X. Задать элемент $x \in F$ с точностью ε означает предъявить дополнительную (кроме $x \in F$) информацию об элементе x, которая дает возможность восстановить элемент x с погрешностью не превышающей ε, т. е. указать элемент $y_x \in X$ такой, что $\rho(x, y_x) \le \varepsilon$. Сложность ε-задания элемента $x \in F$ естественно измерять минимальным объемом (или минимальной ценой) информации, позволяющей восстановить с точностью $\le \varepsilon$ любой элемент $x \in F$. Более конкретно об этом можно говорить, если определить вид информационного оператора. Постулируем следующие условия:

1. Информационный оператор $M = M_N$ отображает элементы $x \in X$ в N-мерное евклидово пространство $\mathbb{R}^N$, т. е. $M_N(x)$ — точка в $\mathbb{R}^N$.

2. Информационный оператор $M_N(x)$ непрерывен на X.

В обоснование условия 1 следует сказать, что построение элемента y_x по значению информационного оператора обычно осуществляется с помощью некоторого алгоритма, реализуемого на ЭВМ и, следовательно, выполняющего операции над числами. Условие 2 продиктовано стремлением обеспечить устойчивость решения задачи восстановления как относительно малых изменений x, так и относительно погрешностей информации.

Таким образом, будем считать, что информационный оператор задается набором

$$M_N = \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N\} \tag{2}$$

из N заданных на X непрерывных функционалов, который элементу $x \in X$ ставит в соответствие вектор

$$M_N(x) = \{\mu_1(x), \mu_2(x), \ldots, \mu_N(x)\} \in \mathbb{R}^N. \tag{3}$$

Условимся здесь множество заданных на X непрерывных функционалов обозначать через X' и заметим, что мы рассматриваем неадаптивный способ задания информационного оператора, когда все функционалы $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N$ набора $M_N \in X'$ предъявляются одновременно.

Под возможностью восстановления элемента x с точностью ε по информации $M_N(x)$ понимается существование оператора $\varphi: M_N(x) \to X$ такого, что

$$\rho(x, \varphi(M_N(x))) \le \varepsilon. \tag{4}$$

Если, как в [1], сложность ε-задания определять через минимальный объем информации, гарантирующий возможность ε-восстановления, то в данной ситуации под сложностью ε-задания элемента $x \in F$ следует понимать наименьшее число $N = N(\varepsilon)$, при котором существуют набор $M_N \subset X'$ и оператор $\varphi:$ $M_N(x) \to X$ такие, что неравенство (4) выполняется для всех $x \in F$.

В таком определении сложность ε-задания связана с информационными поперечниками. Пусть $M_N \subset X'$ и для $x \in F$

$$Q(x, M_N) = \{y: y \in F, M_N(y) = M_N(x)\}. \tag{5}$$

Обозначив через $r(Q)_X$ чебышевский радиус множества $Q \subset X$, т. е. радиус наименьшего шара в X, содержащего Q, положим

$$r(F, M_N)_X = \sup_{x \in F} r(Q(x, M_N))_X. \tag{6}$$

Величину

$$\gamma_r^N(F, X) = \inf_{M_N \subset X'} r(F, M_N)_X \tag{7}$$

будем называть информационным поперечником множества F в метрическом пространстве X. Если X — линейное метрическое (в частности, нормированное) пространство, X' — множество заданных на X линейных непрерывных функционалов, то правую часть (7) будем обозначать $\lambda_r^N(F, X)$ и называть линейным информационным поперечником множества F в X. В силу известных соображений [9, с. 219], если F — выпуклое центрально-симметричное множество в X, то супремум в (6) реализуется при $x = \theta$, и тогда величина $r(F, M_N)_X$ совпадает с чебышевским радиусом множества $Q_0(F, M_N) = \{x: x \in F,$ $M_N(x) = 0\}$, так что в этом случае

$$\lambda_r^N(F, X) = \inf_{M_N \subset X'} r(Q_0(F, M_N))_X = \frac{1}{2}\lambda^N(F, X), \tag{8}$$

где $\lambda^N(F, X)$ — информационный линейный поперечник, при определении которого за численную характеристику размеров множества принимается не чебышевский радиус, а диаметр:

$$\lambda^N(F,X) = \inf_{M_N \subset X'} \sup \{ \rho(x,y) : x, y \in F, M_N(x) = M_N(y) \}.$$

Предложение 1. *Задача* ε*-восстановления любого элемента* $x \in F$ *по информации* $M_N(x)$, $M_N \subset X'$, *имеет решение тогда и только тогда, когда*

$$\gamma_r^N(F,X) \le \varepsilon. \tag{9}$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть существует набор $M_N^* \subset X'$ и отображение $M_N^*(x) \to y_x \in X$ такие, что $\rho(x, y_x) \le \varepsilon$ для всех $x \in F$. Из определения (5) следует, что для любого $z \in Q(x, M_N^*)$ $M_N^*(z) = M_N^*(x)$, так что $M_N^*(z)$ отображается в тот же элемент y_x и $\rho(z, y_x) \le \varepsilon$. Это значит, что $r(Q(x, M_N^*))_X \le \varepsilon$, а так как это верно для любого элемента $x \in F$, то $r(F, M_N^*)_X \le \varepsilon$, и в силу определения (7) тем более выполняется (9).

Достаточность. Пусть выполняется неравенство (9). Тогда для некоторого набора $M_N^* \subset X'$ будет $r(F, M_N^*)_X \le \varepsilon$ и, значит, для любого $x \in F$ $r(Q(x, M_N^*))_X \le \varepsilon$. Введем оператор, отображающий $M_N(x)$ в чебышевский центр y_x множества $Q(x, M_N)$. Тогда для любого $x \in F$ будет $\rho(x, y_x) \le \varepsilon$.

В силу предложения 1 сложность ε-задания $N_\varepsilon(F,X)$ элементов множества F в метрическом пространстве X можно определить следующим образом:

$$N_\varepsilon(F,X) \doteq \min \{ N : \gamma_r^N(F,X) \le \varepsilon \}. \tag{10}$$

Теперь заметим, что стоимость добытой информации (3) определяется не только числом N единиц информации, но и ценой, которую надо заплатить за вычисление значения $\mu_k(x)$ каждого из функционалов μ_k, $k = 1, 2, \ldots, N$. Идеализируя ситуацию, будем считать, что речь идет о вычислении точного значения функционала $\mu \in X'$ на элементе x. Обозначим стоимость этой операции $\operatorname{cost}(\mu(x))$.

Относительно оценки этой величины можно говорить лишь в конкретных случаях, принимая во внимание как природу элементов пространства X, так и вид функционала μ. Оставаясь же в общей ситуации, мы можем ввести лишь следующие определения. Величину

$$\operatorname{cost}(M_N, F) = \sup_{x \in F} \sum_{k=1}^{N} \operatorname{cost}(\mu_k(x)) \tag{11}$$

можно назвать вычислительной стоимостью информационного оператора M_N относительно множества $F \subset X$. При заданном $\varepsilon > 0$ обозначим через $\mathcal{M}^\varepsilon = \mathcal{M}^\varepsilon(F)$ множество всех наборов $M_N \subset X'$, для которых при любом $x \in F$ существует решение задачи ε-восстановления. Ясно, что если $M_N \in \mathcal{M}^\varepsilon$, то $N \ge N_\varepsilon(F,X)$. Величину

$$\operatorname{comp}(\mathcal{M}^\varepsilon, F) = \inf \{ \operatorname{cost}(M_N, F) : M_N \in \mathcal{M}^\varepsilon \}$$

будем называть вычислительной ε-сложностью информационного оператора, задаваемого в виде (2), относительно множества F.

Перейдем к обсуждению вопроса об ε-сложности оператора восстановления.

Пусть $M_N \in \mathcal{M}^\varepsilon$ и $\Phi^\varepsilon(M_N)$ — множество всех операторов $\varphi: M_N(x) \to y_x \in X$ таких, что $\rho(x, y_x) \le \varepsilon$ для любого $x \in F$. Таким образом, на основании априорной $(x \in F)$ и дискретной $(M_N(x))$ информации оператор φ предъявляет некоторый элемент $y_x = \varphi(M_N(x))$ из ε-окрестности элемента x. Априорная информация учитывается при выборе элемента y_x, которым и задается оператор восстановления φ. Так как оператор φ определен на множестве числовых векторов $M_N(x)$, то элемент y_x должен однозначно определяться некоторым числовым вектором P — результатом преобразований вектора $M_N(x)$. Поэтому стоимость $\operatorname{cost}(\varphi, x, M_N)$ оператора восстановления $\varphi: M_N(x) \to P \to y_x$ естественно определять минимальным числом арифметических операций, необходимых для реализации алгоритма $M_N(x) \to P$. Положим

$$\operatorname{cost}(\varphi, F, M_N) = \sup_{x \in F} \operatorname{cost}(M_N(x) \to P). \tag{12}$$

Тогда величина

$$\operatorname{comp}(\Phi^\varepsilon(M_N), F) = \inf\{\operatorname{cost}(\varphi, F, M_N): \varphi \in \Phi^\varepsilon(M_N)\}$$

есть сложность ε-восстановления элементов $x \in F$ при использовании информационного оператора $M_N \in \mathcal{M}^\varepsilon$.

Общая ε-сложность решения аппроксимационной задачи складывается из стоимости (11) вычисления значения информационного оператора $M_N \in \mathcal{M}^\varepsilon$ и стоимости (12) вычисления оператора восстановления $\varphi \in \Phi^\varepsilon(M_N)$ для элементов $x \in F$ при оптимальном выборе как M_N, так и φ:

$$\operatorname{comp}(\varepsilon, F, X) = \inf_{M_N \in \mathcal{M}^\varepsilon} \inf_{\varphi \in \Phi^\varepsilon(M_N)} [\operatorname{cost}(M_N, F) + \operatorname{cost}(\varphi, F, M_N)].$$

4. Ниже мы рассмотрим вопросы оценки сложности аппроксимационных задач в конкретных функциональных пространствах, но сначала отметим некоторые особенности в постановке задачи ε-восстановления функций в пространствах с различной метрикой.

Пусть X — нормированное пространство функций $C = C[a, b]$ или $L_p = L_p[a, b]$, $p \ge 1$, с обычной нормой, F — фиксированное множество в X. Когда говорим, что функция $y_x(t)$ из X есть ε-восстановление функции $x(t) \in F$ по информации $M_N(x)$, то имеется в виду, что функция $y_x(t)$ предъявлена аналитическим выражением и $\|x - y_x\|_X \le \varepsilon$. Что это добавляет к априорной информации о том, что $x(t) \in F$? ε-Близость функций в метрике L_p, $1 \le p < \infty$, и C имеет существенно различный смысл. В случае L_p-метрики мы можем говорить только о близости норм $x(t)$ и $y_x(t)$:

$$\|y_x\|_{L_p} - \varepsilon \le \|x\|_{L_p} \le \|y_x\|_{L_p} + \varepsilon, \tag{13}$$

хотя значения функций $y_x(t) \in C$ и $x(t) \in F$ в отдельных точках отрезка $[a, b]$ могут сильно отличаться даже при сколь угодно малом $\varepsilon > 0$. Так что наличие аналитического выражения функции $y_x(t)$ и двусторонние оценки (13) оставляют для $x(t)$ большую неопределенность в понимании близости графиков функций.

Значительно больше информации о поведении функции $x(t)$ мы будем иметь, восстанавливая ее в равномерной метрике пространства C (или в метрике L_∞, если допустить, что функция $y_x(t)$ может быть разрывна). Неравенство $\| x - y_x \|_C \le \varepsilon$ означает, что

$$y(t) - \varepsilon \le x(t) \le y(t) + \varepsilon, \quad a \le t \le b,$$

т. е. график $x(t)$ лежит в ε-окрестности графика $y_x(t)$. Зная значение $y_x(t)$ в каждой точке $t \in [a, b]$, мы с точностью ε знаем в любой точке и значение $x(t)$. Естественно под ε-восстановлением функции $x(\cdot t)$ в равномерной метрике понимать восстановление ее значения в каждой точке $t \in [a, b]$ с погрешностью не больше ε. Следовательно, ε-сложность восстановления в этом случае должна включать и стоимость вычисления $y_x(t)$ в любой точке. Функция $y_x(t)$ строится на базе N-мерного вектора $M_N(x)$, и, как правило, является элементом некоторого конечномерного линейного многообразия. Поэтому вычисление значения $y_x(t)$ в фиксированной точке t требует конечного числа арифметических операций; минимальным числом этих операций, достаточным для вычисления $y_x(t)$ в любой точке $t \in [a, b]$, измеряется стоимость $\operatorname{cost}(y_x)$.

Таким образом, в случае равномерной метрики стоимость восстановления функции $x(t) \in F \subset C$ с помощью оператора $\varphi: M_N(x) \to P \to y_x$ будет выражаться величиной

$$\operatorname{cost}(\varphi, F, M_N) = \sup_{x \in F} [\operatorname{cost}(M_N(x) \to P) + \operatorname{cost}(y_x)].$$

Теперь применим общую схему рассуждений п. 3 в двух конкретных ситуациях.

5. Пусть $C_{2\pi}$ — линейное пространство непрерывных на всей действительной оси 2π-периодических функций $x(t)$ с нормой $\| x \|_C = \max_t |x(t)|$, $C^*_{2\pi}$ — множество заданных на $C_{2\pi}$ линейных непрерывных функционалов. Пусть, далее, W^m_∞, $m = 1, 2, \ldots$, — класс функций $x(t) \in C_{2\pi}$, у которы $(m-1)$-я производная локально абсолютно непрерывна и $\| x^{(m)} \|_{L_\infty} \le 1$. Известно [9] (гл. 4), [10], что

$$\gamma^{2n-1}(W^m_\infty, C_{2\pi}) = \lambda^{2n-1}(W^m_\infty, C_{2\pi}) =$$
$$= \lambda^{2n}(W^m_\infty, C_{2\pi}) = 2 K_m n^{-m}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где K_m — константа Фавара. Так как W^m_∞ — выпуклое центрально-симметричное множество функций, то в силу (8)

$$\gamma^{2n-1}_r(W^m_\infty, C_{2\pi}) = \lambda^{2n-1}_r(W^m_\infty, C_{2\pi}) = \lambda^{2n}_r(W^m_\infty, C_{2\pi}) = K_m n^{-m}.$$

Положим аналогично (10) $N^\lambda_\varepsilon(F, X) = \min\{N: \lambda^N_r(F, X) \le \varepsilon\}$. Тогда

$$N^\lambda_\varepsilon(W^m_\infty, C_{2\pi}) = \min\{N: N = 2n-1, n \in \mathbb{N}, K_m n^{-m} \le \varepsilon\}$$

и, следовательно,

$$2n_\varepsilon - 2 \le N_\varepsilon(W^m_\infty, C_{2\pi}) \le N^\lambda_\varepsilon(W^m_\infty, C_{2\pi}) = 2n_\varepsilon - 1, \tag{14}$$

где

$$n_\varepsilon = \min\{n: n \in \mathbb{N}, n \ge K^{1/m}_m \varepsilon^{-1/m}\}. \tag{15}$$

(Через $\mathbb{N}$ обозначено множество всех натуральных чисел.)

Пусть

$$M^\Phi_{2n-1} = \{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}; b_1, \ldots, b_{n-1}\}$$

— набор линейных функционалов, определяющих первые $2n-1$ коэффициента Фурье по тригонометрической системе. Набор M_{2n-1}^{Φ} ставит в соответствие функции $x(t) \in C_{2\pi}$ числовой вектор

$$M_{2n-1}^{\Phi}(x) = \{ a_0(x), a_1(x), \ldots, a_{n-1}(x); b_1(x), \ldots, b_{n-1}(x) \} \tag{16}$$

ее коэффициентов Фурье. От вектора (16) перейдем к другому числовому вектору

$$P_{2n-1}(x) = \left\{ \frac{\theta_0 a_0(x)}{2}, \theta_1 a_1(x), \ldots, \theta_{n-1} a_{n-1}(x); \theta_1 b_1(x), \ldots, \theta_{n-1} b_{n-1}(x) \right\}, \tag{17}$$

где $\theta_k = \theta_k^n$ — коэффициенты Фавара [11, с. 161], которыми однозначно определяется тригонометрический полином

$$U_{n-1}(x, \theta, t) = \frac{\theta_0 a_0(x)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \theta_k \big(a_k(x) \cos kt + b_k(x) \sin kt \big). \tag{18}$$

Известно [11, с. 165; 12, с. 112], что

$$\sup_{x \in W_\infty^m} \| x - U_{n-1}(x, \theta) \|_{C_{2\pi}} = K_m n^{-m}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{19}$$

и, следовательно, при $n = n_\varepsilon$ левая часть равенства (19) не превышает ε. Это значит, что при $n = n_\varepsilon$ информация (16) позволяет восстановить любую функцию $x(t) \in W_\infty^m$ с погрешностью $\le \varepsilon$.

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Предложение 2. *Для сложности ε-задания функций класса W_∞^m с помощью информационного оператора M_N из $C'_{2\pi}$ или $C^*_{2\pi}$ справедливы соотношения* (14), *где n_ε определено в* (15). *Равенство в* (14) *реализует набор* (16) *при $n = n_\varepsilon$.*

Существует информационный оператор, задаваемый набором $M_{2n} \subset C^*_{2\pi}$, который при $n = n_\varepsilon$ также осуществляет ε-задание функций $x(t) \in W_\infty^m$, но вектор $M_{2n}(x)$ доставляет о поведении $x(t)$ существенно больше информации, чем вектор $M_{2n-1}^{\Phi}(x)$. Пусть M_{2n}^{τ} — набор функционалов $\{\mu_k^\tau\}_1^{2n} \subset C^*_{2\pi}$, определяемых для $x(t) \in C_{2\pi}$ равенствами

$$\mu_k^\tau(x) = x(\tau_k), \quad \tau_k = \frac{k\pi}{n} - \beta, \quad k = 1, 2, \ldots, 2n, \tag{20}$$

где число β выбирается для $x(t) \in W_\infty^m$ в зависимости от m: $\beta = 0$, если m четно, и $\beta = \pi/(2n)$, если m нечетно. Вектором

$$M_{2n}^{\tau}(x) = \{ x(\tau_1), x(\tau_2), \ldots, x(\tau_{2n}) \} \tag{21}$$

однозначно определен 2π-периодический полиномиальный сплайн $s(x, t)$ порядка $m-1$ дефекта 1, совпадающий с функцией $x(t)$ в точках $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{2n}$. Известно [12, с. 288; 11, с. 216], что для любой функции $x(t) \in W_\infty^m$ справедлива оценка

$$| x(t) - s(x, t) | \le | \varphi_{n,m}(t) |, \quad -\infty < t < +\infty, \tag{22}$$

где $\varphi_{n,m}(t)$ — стандартный сплайн Эйлера периода $2\pi/n$ [11, с. 72], причем $\varphi_{n,m}(\tau_k) = 0$ и $\| \varphi_{n,m} \|_{C_{2\pi}} = K_m n^{-m}$. Ясно, что при $n = n_\varepsilon$ сплайн $s(x, t)$ осуществляет ε-восстановление функции $x(t)$ по информации $M_{2n_\varepsilon}^{\tau}(x)$, причем погрешность восстановления вблизи точек интерполяции τ_k существенно меньше, чем ε. Так как (22) означает, что в каждой точке t

$$s(x, t) - |\varphi_{n,m}(t)| \le x(t) \le s(x, t) + |\varphi_{n,m}(t)|, \tag{23}$$

то можно сказать, что график $x(t)$ находится в $|\varphi_{n,m}(t)|$-окрестности графика $s(x, t)$. Более того, известно [11, с. 221; 13], что

$$\| x' - s'(x) \|_{C_{2\pi}} \le K_{m-1} n^{-m+1} = \lambda_r^{2n-1}(W_\infty^{m-1}, C_{2\pi}).$$

Следовательно, вектор $M_{2n}^{\tau}(x)$ при $n = n_\varepsilon$ осуществляет не только ε-задание самой функции $x(t) \in W_\infty^m$, но и ε_1-задание $(\varepsilon_1 = \varepsilon K_{m-1} n / K_m)$ ее производной, а сплайн $s'(x, t)$ с минимально возможной точностью восстанавливает в метрике $C_{2\pi}$ и производную $x'(t)$.

Перейдем к вопросу об оценке вычислительной сложности информационного оператора, задаваемого набором $M_N = \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N\} \subset C_{2\pi}^*$, относительно класса функций W_∞^m. Функционал $\mu \in C_{2\pi}^*$ задается равенством

$$\mu(x) = \int_0^{2\pi} x(t)\, dg(t), \quad x(t) \in C_{2\pi}, \tag{24}$$

где $g(t)$ — функция, имеющая ограниченное изменение на $[0, 2\pi]$, причем без ограничения общности можно считать, что $\int_0^{2\pi} dg(t) = 1$. Вычислить $\mu(x)$ — значит вычислить значение интеграла в (24), где функция $g(t)$ задана, а относительно $x(t)$ известно только, что $x(t) \in W_\infty^m$. Ясно, что даже вычисление приближенного значения этого интеграла путем замены его квадратурной суммой требует дополнительной информации о функции $x(t)$, например, в виде значений ее в отдельных точках. Существует единственный вид функционала $\mu \in C_{2\pi}^*$, когда для вычисления $\mu(x)$ требуется знать значение $x(t)$ лишь в одной точке. Эти функционалы, определяемые функциями $g_\tau(t) = 0$, если $0 \le \le t \le \tau$, и $g_\tau(t) = 1$ для $\tau < t \le 2\pi$, будем обозначать μ^τ, причем

$$\mu^\tau(x) = x(\tau). \tag{25}$$

Вычисление значения $\mu(x)$ любого иного функционала потребует вычисления значений $x(t)$ не менее, чем в двух точках, поэтому мы можем постулировать следующее утверждение:

Если функционал μ из $C_{2\pi}^*$ определяется функцией $g(t) \ne g_\tau(t)$ то, по крайней мере, для некоторой функции $x(t) \in W_\infty^m$ выполняется неравенство

$$\operatorname{cost}(\mu(x)) \ge 2 \operatorname{cost}(\mu^\tau(x)). \tag{26}$$

В силу этого утверждения для любого набора $M_N = \{\mu_k\}_1^N \subset C_{2\pi}^*$, $\mu_k \ne \mu^\tau$,

$$\operatorname{cost}(M_N, W_\infty^m) \ge 2 \operatorname{cost}(M_N^\tau, W_\infty^m), \tag{27}$$

где M_N^τ — набор функционалов вида (25).

Замечание. Разумеется, те же соображения позволяют считать неравенства (26) и (27) справедливыми не только для W_∞^m, но и для других содержательных классов функций.

Выше установлено, что сложность ε-задания функций класса W_∞^m в равномерной метрике измеряется числом $N_\varepsilon = 2n_\varepsilon - 1$, где n_ε определено в (15). Таким образом, ни один набор $M_N \subset C_{2\pi}^*$ с $N < 2n_\varepsilon - 1$ не обеспечивает восстановления функций класса W_∞^m с погрешностью не больше ε; в то же время набор $M_{2n_\varepsilon}^\tau$ функционалов, определенных равенствами (20), гарантирует ε-восстановление с помощью интерполяционного сплайна $s(x, t)$. Поэтому, учитывая (14) и (27), получаем следующее утверждение.

Предложение 3. *При ε-восстановлении функций класса W_∞^m в равномерной метрике вычислительная ε-сложность информационного оператора, задаваемого в виде набора $M_N \subset C_{2\pi}^*$, определяется соотношениями*

$$\operatorname{comp}(\mathcal{M}^\varepsilon, W_\infty^m) = \operatorname{cost}(M_{2n_\varepsilon}^\tau, W_\infty^m) = \sup_{x \in W_\infty^m} \sum_{k=1}^{2n_\varepsilon} \operatorname{cost}(\mu_k^\tau(x)),$$

где функционалы μ_k^τ заданы равенствами (20) *при $n = n_\varepsilon$, а $\mathcal{M}^\varepsilon$ — множество всех наборов M_N, обеспечивающих возможность ε-восстановления.*

Что касается сложности оператора ε-восстановления, то мы здесь приведем лишь некоторые соображения, связанные со сравнением в этом смысле тригонометрического полинома (18) и интерполяционного сплайна $s(x, t)$. Для построения полинома (18) надо сначала выполнить операции по переходу от вектора M_{2n-1}^Φ к вектору (17); интерполяционный же сплайн $s(x, t)$ строится с помощью фундаментальных сплайнов непосредственно по вектору информации $M_{2n}^\tau(x)$ и, кроме того, доставляет более точную, чем полином, информацию о поведении функции $x(t)$ (см. (23)).

Остается найти минимальную стоимость вычисления в произвольной точке t значений полинома (18) и сплайна $s(x, t)$, т. е. минимальное число арифметических операций, необходимых для достижения этой цели. В [14] приведены некоторые результаты исследований в этом направлении для сплайнов минимального дефекта с подсчетом числа операций. Есть основания предполагать, что стоимость вычисления сплайна (при одинаковой размерности) должна быть существенно меньше, чем полинома. Если коротко, то дело в том, что в подпространстве сплайнов по фиксированному разбиению существуют, в отличие от многочленов, базисы с конечными носителями (например, B-сплайны), и это дает сплайнам существенное преимущество перед многочленами именно с точки зрения числа операций, необходимых для их вычисления (см., например, [11, 14].

6. Остановимся конспективно еще на одной конкретной ситуации. Пусть X_h — пространство векторнозначных функций (параметрически заданных кривых в $\mathbb{R}^m$)

$$\bar{x}(t) = \{x_1(t), x_2(t), \ldots, x_m(t)\}, \quad 0 \le t \le 1, \quad m \ge 2,$$

с хаусдорфовой метрикой

$$h(\bar{x}, \bar{y}) = \max\left\{\sup_{a \in \bar{x}} \inf_{b \in \bar{y}} r(a, b), \sup_{b \in \bar{y}} \inf_{a \in \bar{x}} r(a, b)\right\},$$

где a и b — точки соответственно кривых $\bar{x}$ и $\bar{y}$, $r(a, b)$ — евклидово расстояние между ними. Через H_m^ω обозначим класс кривых $\bar{x}(t) \in X_h$, у которых координатные функции удовлетворяют условию

$$|x_i(t') - x_i(t'')| \le \omega(|t' - t''|), \quad t', t'' \in [0, 1], \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

где $\omega(\delta)$ — заданный модуль непрерывности. В [15] рассмотрена задача оптимального восстановления функций $\overline{x}(t) \in H_m^\omega$ при условии, что информационный оператор задается набором $M_N = \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N\}$ определенных на $C[0, 1]$ линейных функционалов, который функции $\overline{x}(t)$ ставит в соответствие числовой вектор

$$M_N(\overline{x}) = \{\mu_k(x_i)\}, \quad k = 1, 2, \ldots, N, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{28}$$

В [15] получены двусторонние оценки для информационных поперечников класса H_m^ω в X_h, а в случае $\omega(\delta) = K\delta$ (тогда $H_m^\omega = KH_m$) доказано, что

$$\gamma^N(KH_m, X_h) = \lambda^N(KH_m, X_h) = \frac{K\sqrt{m}}{2N}. \tag{29}$$

Поскольку H_m^ω — выпуклое центрально-симметричное множество в X_h, то в силу (8)

$$\lambda_r^N(KH_m, X_h) = \frac{K\sqrt{m}}{4N},$$

причем этот поперечник (как и (29)) реализуется набором M_N^τ функционалов μ_k^τ вида

$$\mu_k^\tau(x) = x(\tau_k), \quad \tau_k = \frac{2k-1}{2N}, \quad k = 1, 2, \ldots, N.$$

В силу предложения 1 сложность ε-задания функции $\overline{x}(t) \in KH_m$ определяется числом

$$N_\varepsilon = N_\varepsilon(KH_m, X_h) = \min\left\{N\colon N \in \mathbb{N}, N \geq \frac{K\sqrt{m}}{4\varepsilon}\right\}.$$

Соотношение (26) позволяет утверждать, что вычислительная ε-сложность информационного оператора вида (28) относительно класса KH_m определяется максимальной стоимостью вычисления вектора

$$M_N^\tau(\overline{x}) = \{x_i(\tau_k)\}, \quad k = 1, 2, \ldots, N, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

на функциях класса KH_m.

Зададим оператор восстановления отображением

$$\varphi : M_N^\tau(\overline{x}) \to \overline{y}_x, \tag{30}$$

где $\overline{y}_x(t) = \{y_1(t), \ldots, y_m(t)\}$ — векторнозначная функция, у которой каждая координатная функция $y_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, является чебышевским центром множества

$$Q_i = \{z(t)\colon z(t) \in KH_1, z(\tau_k) = x_i(\tau_k)\}, \tag{31}$$

т. е. $y_i(t) = [\Psi_i(t) + \psi_i(t)]/2$, где $\Psi_i(t)$ и $\psi_i(t)$ — соответственно верхняя и нижняя граничные функции множества (31), представляющие собой ломаные, имеющие по одному узлу на каждом из интервалов (τ_{k-1}, τ_k), $k = 1, 2, \ldots, N$. Нетрудно проверить, что для любой функции $\overline{x}(t) \in KH_m$ выполняется неравенство

$$h(\overline{x}, \overline{y}_x) \leq \frac{K\sqrt{m}}{4N},$$

и, следовательно, при $N = N_\varepsilon$ справедливо $h(\overline{x}, \overline{y}_x) \leq \varepsilon$.

При вычислении значения $\bar{y}_x(t)$ в фиксированной точке $t \in [0, 1]$ следует учесть, что каждая координатная функция $y_i(t)$ является ломаной с не более чем двумя узлами на каждом из промежутков (τ_{k-1}, τ_k), причем координаты этих узлов легко находятся по значениям $x_i(\tau_k)$. По-видимому, не существует оператора восстановления, гарантирующего заданную погрешность при меньшем числе арифметических операций, и весьма правдоподобной является гипотеза, что общая ε-сложность решения задачи реализуется информационным оператором M_N^τ и оператором восстановления (30), где $\bar{y}_x$ задается чебышевскими центрами множеств (31).

1. *Колмогоров А.* Различные подходы к оценке трудности приближенного задания и вычисления функций // Proc. Intern. Congr. Math. – Stockholm, 1963. – P. 369–376.
2. *Колмогоров А. Н.* Теория информации и теория алгоритмов. – М.: Наука, 1987. – 304 с.
3. *Kolmogoroff A.* Uber die besste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionenklasse // Ann. Math. – 1936. – **37**. — S. 107–110.
4. *Витушкин А. Г.* Оценка сложности задачи табулирования. – М.: Изд-во физ.-мат. лит-ры, 1959. – 228 с.
5. *Офман Ю.* Об алгоритмической сложности дискретных функций // Докл. АН СССР. – 1962. – **145**. № 1. — С. 48–51.
6. *Traub J. F., Wozniakowski H.* A general theory of optimal algorithms. – New York: Acad. press, 1980. – 382 p.
7. *Traub J. F., Wasilkowski G. W., Wozniakowski H.* Information, uncertainty, complexity. – Mass: Addison-Wesley, 1983. – 184 p.
8. *Traub J. F., Wozniakowski G. W., Wozniakowski H.* Information-based complexity. – London: Acad. press, 1988. – 524 p.
9. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 304 с.
10. *Рубан В. И.* Поперечники некоторых множеств в функциональных пространствах: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Днепропетровск, 1974. – 12 с.
11. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 424 с.
12. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближений. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
13. *Корнейчук Н. П.* О получении точных оценок для производной погрешности сплайн-интерполирования // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 2. — С. 206–210.
14. *Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.* Методы сплайн-функций. – М.: Наука, 1980. – 352 с.
15. *Корнейчук Н. П.* Об оптимальном кодировании вектор-функций // Укр. мат. журн. – 1988. – **40**, № 6. — С. 737–743.

Получено 10.04.96