УДК 517.5

Н. В. Зорий (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

О ЕМКОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ КОНДЕНСАТОРОВ

We introduce and study an one-parameter family of capacity characteristics of condensers in $\mathbb{R}^p$, $p \geq 3$, that contains some known capacities as elements extremal with respect to the parameter. We establish new equality correlations between capacity characteristics of condensers and sets.

Введено та досліджено однопараметричну сім'ю ємнісних характеристик конденсаторів в $\mathbb{R}^p$, $p \geq 3$, що містить деякі відомі ємності як елементи, екстремальні за параметром. Між ємнісними характеристиками конденсаторів та множин одержано нові співвідношення.

1. Пусть $\mathbb{R}^p$ — евклидово пространство размерности $p \geq 3$ с обычной нормой $|\cdot|$, $A, B \subset \mathbb{R}^p$ — непустые, непересекающиеся, замкнутые множества. Упорядоченную пару $E := (A, B)$ назовем конденсатором. Конденсатор E назовем компактным, если множество $|E| := A \cup B$ ограничено. Для конденсаторов E и $E_1 = (A_1, B_1)$ будем писать $E_1 \prec E$, если $A_1 \subset A$ и $B_1 \subset B$.

Функция $f\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^1$ называется абсолютно непрерывной на линиях (ACL), если для каждого замкнутого p-мерного интервала I в $\mathbb{R}^p$ она абсолютно непрерывна (в обычном смысле) на почти всех линейных сегментах в I, параллельных координатным осям [1, 2]. Обозначим через ACL_2 класс всех ACL функций f таких, что

$$D(f) := \int_{\mathbb{R}^p} |\operatorname{grad} f(x)|^2 \, dx < \infty.$$

Пусть $E = (A, B)$ — конденсатор. Обозначим через $\mathcal{L}(E)$ множество всех функций $f\colon \mathbb{R}^p \to [0, 1]$ из класса $ACL_2 \cap C(\mathbb{R}^p)$, равных 1 на A и 0 на B, а через $\mathcal{L}^*(E)$ — подмножество, состоящее из всех тех $f \in \mathcal{L}(E)$, для которых существует предел

$$\lim_{x \to \infty_p} f(x) =: f(\infty_p)$$

(∞_p — точка Александрова для $\mathbb{R}^p$).

Пусть $\theta \in [0, 1]$. Обозначим

$$\mathcal{L}^*_\theta(E) := \{ f \in \mathcal{L}^*(E) : f(\infty_p) = \theta \}.$$

Для каждого $\theta \in [0, 1]$ определим емкостную характеристику $\operatorname{Cap}_\theta E \equiv \operatorname{Cap}_\theta (A, B)$ конденсатора $E = (A, B)$ равенством

$$\operatorname{Cap}_\theta E := \inf_{f \in \mathcal{L}^*_\theta(E)} D(f),$$

если конденсатор E компактен, и в случае некомпактного E — равенством

$$\operatorname{Cap}_\theta E := \sup \operatorname{Cap}_\theta E_1,$$

где точная верхняя грань берется по множеству всех компактных конденсаторов E_1, $E_1 \prec E$.

В настоящей работе найдены представления теоретико-функциональных емкостей $\operatorname{Cap}_\theta E$, $\theta \in [0, 1]$, через экстремальные характеристики надлежащих вариационных задач теории ньютонова и гринова потенциалов (теоремы 1, 2 и 2′, следствия 1, 3 и 5). Показано, что емкость [3 – 5]

$$\operatorname{Cap} E := \inf_{f \in \mathcal{L}(E)} D(f), \tag{1}$$

вариационная [1, 2]-емкость E [2] и ньютонова емкость E [3, 4] совпадают (последняя с точностью до мультипликативной постоянной) с экстремальным по параметру θ элементом $\operatorname{Cap}_{\theta_E} E$ семейства $\{\operatorname{Cap}_\theta E\}_{\theta \in [0,1]}$ (теорема 3). Дано выражение θ_E через емкости множеств A и B. Как следствия из полученных результатов, найдены представления емкости конденсатора $\operatorname{Cap} E$, а также разности между $\operatorname{Cap} E$ и 2-емкостью E [3, 6, 7] через емкости множеств A и B (следствия 6 и 8).

2. Данный пункт посвящен первоначальному изучению свойств емкостей $\operatorname{Cap}_\theta E$.

Для конденсаторов $E = (A, B)$ и $E_k = (A_k, B_k)$, $k = 1, 2, \ldots,$ будем писать $E_k \nearrow E$, если

$$E_k \prec E_{k+1} \ \forall k, \qquad \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A, \qquad \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = B,$$

и $E_k \searrow E$, если

$$E_{k+1} \prec E_k \ \forall k, \qquad \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = A, \qquad \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k = B.$$

Следующие два утверждения являются простыми следствиями принятых определений.

1. *При каждом фиксированном* θ *емкость* $\operatorname{Cap}_\theta E$ *монотонна по* E *и непрерывна слева*:

$$\operatorname{Cap}_\theta E' \le \operatorname{Cap}_\theta E \ \forall E' \prec E,$$

$$\operatorname{Cap}_\theta E = \lim_{k \to \infty} \operatorname{Cap}_\theta E_k \ \forall E_k \uparrow E. \tag{2}$$

2. *Емкость конденсатора симметрична в смысле следующего равенства*:

$$\operatorname{Cap}_\theta (A, B) = \operatorname{Cap}_{1-\theta} (B, A) \ \forall \theta. \tag{3}$$

Пусть $g_F(x, y)$, $x, y \notin F$, — обобщенная функция Грина открытого множества $\mathbb{R}^p \setminus F$, а $C_{g_F}(Q)$ — емкость множества $Q \subset \mathbb{R}^p \setminus F$ в теории g_F-потенциала [8, 9].

Свойство симметричности (3) позволяет без ограничения общности исследования всюду далее полагать выполненным условие

$$C_{g_B}(A) \le C_{g_A}(B). \tag{4}$$

Пользуясь представлением гриновых емкостей компактов через классы функций и их интегралы Дирихле [3, 10], с помощью свойства непрерывности (2) получаем следующее утверждение.

3. *Справедливы соотношения*

$$\operatorname{Cap}_0 E = \omega_p C_{g_B}(A), \qquad \operatorname{Cap}_1 E = \omega_p C_{g_A}(B), \tag{5}$$

$$\operatorname{Cap}_\theta E \ge \omega_p \theta^2 C_{g_A}(B) \ \forall \theta \in (0, 1], \tag{6}$$

где ω_p — *умноженная на* $p-2$ *площадь единичной гиперсферы в* $\mathbb{R}^p$.

4. *Для фиксированного* E *равносильны следующие высказывания*:

i$_1$) $\mathrm{Cap}_\theta E \equiv \infty \ \ \forall\, \theta \in (0, 1]$;

ii$_1$) *существует* $\theta' \in [0, 1]$ *с* $\mathrm{Cap}_{\theta'} E = \infty$;

iii$_1$) $C_{g_A}(B) = \infty$.

5. *Для фиксированного* E *равносильны следующие высказывания*:

i$_2$) $\mathrm{Cap}_\theta E \equiv 0 \ \ \forall\, \theta \in [0, 1]$;

ii$_2$) *существует* $\theta'' \in (0, 1]$ *с* $\mathrm{Cap}_{\theta''} E = 0$;

iii$_2$) $C_{g_A}(B) = 0$.

Импликации iii$_1$) $\Rightarrow$ i$_1$) и ii$_2$) $\Rightarrow$ iii$_2$) вытекают из оценки (6), а импликации ii$_1$) $\Rightarrow$ iii$_1$) и iii$_2$) $\Rightarrow$ i$_2$) — из приведенной ниже теоремы 2 (см. следствия 2 и 3).

6. *Если* E_k, $k = 1, 2, \ldots$, — *компактные конденсаторы и* $E_k \searrow E$, *то для каждого фиксированного* $\theta \in [0, 1]$ *выполняется*

$$\mathrm{Cap}_\theta E = \lim_{k \to \infty} \mathrm{Cap}_\theta E_k. \tag{7}$$

Доказательство. Пусть $\theta \in (0, 1)$, ибо в противном случае (7) вытекает из (5) в силу непрерывности гриновых емкостей компактов.

Из свойства монотонности находим, что предел

$$\lim_{k \to \infty} \mathrm{Cap}_\theta E_k =: l$$

существует, причем $l \geq \mathrm{Cap}_\theta E$.

Для доказательства дополнительного неравенства $l \leq \mathrm{Cap}_\theta E$ зафиксируем произвольным образом выбранные $\varepsilon \in (0, \min\{\theta, 1-\theta\})$ и $f \in \mathcal{L}^*_\theta(E)$. Рассмотрим функцию $\psi := \varphi \circ f$, где

$$\varphi(x) := \begin{cases} 0 & \forall\, x \in [0, \varepsilon); \\ \dfrac{\theta(x-\varepsilon)}{\theta-\varepsilon} & \forall\, x \in [\varepsilon, \theta); \\ \dfrac{(1-\theta)(x-\theta)}{1-\theta-\varepsilon} + \theta & \forall\, x \in [\theta, 1-\varepsilon); \\ 1 & \forall\, x \in [1-\varepsilon, 1]. \end{cases}$$

Из принятых определений в силу компактности E и E_k находим, что для всех достаточно больших номеров $k \geq k_0$ верно $\psi \in \mathcal{L}^*_\theta(E_k)$, а поэтому

$$\mathrm{Cap}_\theta E_k \leq D(\psi) \leq q^2 D(f) \quad \forall\, k \geq k_0, \tag{8}$$

где

$$q := \max\left\{ \frac{\theta}{\theta-\varepsilon}, \frac{1-\theta}{1-\theta-\varepsilon} \right\}. \tag{9}$$

Устремляя k к ∞, а затем ε к нулю, из (8) и (9) ввиду произвольности $f \in \mathcal{L}^*_\theta(E)$ получаем искомое неравенство.

Утверждение 6 о непрерывности справа емкостей компактных конденсаторов ниже будет усилено и обобщено (см. следствие 4).

Всюду далее будем рассматривать только такие конденсаторы E, для которых $\mathrm{Cap}_\theta E$, как функция от $\theta \in [0, 1]$, не равна тождественно ∞. В силу соотношений (4), (5) и импликации iii$_1$) $\Rightarrow$ i$_1$) такое требование равносильно выполнению условия

$$C_{g_B}(A) < \infty. \tag{10}$$

Заметим, что при условии (10) ньютонова емкость $C_2(A)$ множества A конечна, а емкости $C_2(|E|)$, $C_2(B)$ и $C_{g_A}(B)$ одновременно принимают либо конечные, либо бесконечные значения.

3. В этом пункте приведены утверждения, дающие представления теоретико-функциональных емкостей $\mathrm{Cap}_\theta E$ через экстремальные характеристики надлежащих вариационных задач теории ньютонова и гринова потенциалов.

3.1. Пусть ν, ν_1 и ν_2 — вещественные борелевы знакопеременные меры (называемые в дальнейшем зарядами [8]) в $\mathbb{R}^p$; $k_2(x, y) := |x-y|^{2-p}$, $x, y \in \mathbb{R}^p$, — ньютоново ядро;

$$(\nu_1, \nu_2) := \iint\limits_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p} k_2(x, y)\, d\nu_1(x)\, d\nu_2(y)$$

и $\|\nu\|^2 := (\nu, \nu)$ — соответственно взаимная энергия ν_1, ν_2 и энергия ν в теории k_2-потенциала [8]. Если энергия заряда ν конечна, то [8] его ньютонов потенциал

$$\mathcal{U}_2^\nu(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^p} k_2(x, y)\, d\nu(y)$$

принадлежит классу ACL_2, причем

$$D\left(\mathcal{U}_2^\nu\right) = \omega_p \|\nu\|^2. \tag{11}$$

Будем говорить, что заряд ν ассоциирован с конденсатором $E = (A, B)$, и писать $\nu \wedge E$, если (неотрицательные) меры ν^+ и ν^-, образующие его жорданово разложение $\nu = \nu^+ - \nu^-$, сосредоточены соответственно на множествах A и B. Обозначим $|\nu| := \nu^+ + \nu^-$.

Условимся говорить, что утверждение $P(x)$ верно квазивсюду на множестве $Q \subset \mathbb{R}^p$, и писать

$$P(x) \quad \forall_q\, x \in Q,$$

если $P(x)$ верно для всех $x \in Q$, кроме, быть может, некоторого множества точек из Q нулевой ньютоновой емкости.

Теорема 1. *Пусть конденсатор* $E = (A, B)$ *и число* $\theta \in [0, 1]$ *таковы, что*

$$\mathrm{Cap}_\theta E < \infty. \tag{12}$$

Верно представление

$$\mathrm{Cap}_\theta E = \omega_p \left\| \kappa_E^\theta \right\|^2, \tag{13}$$

где κ_E^θ — *ассоциированный с* E *заряд с* $\left|\kappa_E^\theta\right|(\mathbb{R}^p) < \infty$, *ньютонов потенциал* $\mathcal{U}_2^{\kappa_E^\theta}$ *которого удовлетворяет соотношениям*

$$\theta + \mathcal{U}_2^{\kappa_E^\theta}(x) = \begin{cases} 1 & \forall_q\, x \in A; \\ 0 & \forall_q\, x \in B, \end{cases} \tag{14}$$

$$0 \le \theta + \mathcal{U}_2^{\kappa_E^\theta}(x) \le 1 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^p. \tag{15}$$

Заряд κ_E^θ, *удовлетворяющий указанным свойствам, существует и единствен.*

Пусть $a, b \geq 0$. Обозначим

$$\mathfrak{N}^{ab}(E) := \{\nu \wedge E : \nu^+(A) = a,\ \nu^-(B) = b\},$$

$$V^{a,b}(E) := \inf_{\nu \in \mathfrak{N}^{a,b}(E)} \|\nu\|^2. \tag{16}$$

Минимум-проблема (16) исследована в [11, 12].

***Следствие* 1.** *Пусть выполнено* (12). *Существуют неотрицательные числа* $\alpha \equiv \alpha(E, \theta)$ *и* $\beta \equiv \beta(E, \theta)$ *такие, что*

$$\mathrm{Cap}_\theta E = \omega_p V^{\alpha,\beta}(E). \tag{17}$$

3.2. Величина

$$\frac{1}{V^{1,1}(E)} =: c_2(E)$$

называется ньютоновой емкостью конденсатора E [3, 4, 11 – 13].

Всюду в пп. 3.2 и 3.3 предположим, что

$$C_2(|E|) < \infty. \tag{18}$$

Теорема 2. *При условии*

$$C_2(|E|) > 0 \tag{19}$$

для каждого $\theta \in [0, 1]$ *верно тождество*

$$\omega_p^{-1} \mathrm{Cap}_\theta E = c_2(E) + (\theta - \theta_E)^2 C_2(|E|), \tag{20}$$

где θ_E — *число из отрезка* $[0, 1/2]$, *определенное равенством*

$$\theta_E := \frac{1}{2}\left[1 - \frac{C_{g_A}(B) - C_{g_B}(A)}{C_2(|E|)}\right]. \tag{21}$$

Пользуясь свойствами 1 и 6 емкостей $\mathrm{Cap}_\theta E$, из теоремы 2 выводим следующие утверждения.

***Следствие* 2.** *Верны оценки*

$$c_2(E) \leq \omega_p^{-1} \mathrm{Cap}_\theta E \leq C_{g_A}(B) \quad \forall\, \theta \in [0, 1].$$

***Следствие* 3.** *Если* $C_2(A) = 0$, *то*

$$\mathrm{Cap}_\theta E = \omega_p \theta^2 C_2(B) \quad \forall\, \theta \in [0, 1]. \tag{22}$$

В частности, при условии $C_2(|E|) = 0$ *верно*

$$\mathrm{Cap}_\theta E \equiv 0 \quad \forall\, \theta \in [0, 1]. \tag{23}$$

3.3. **Теорема 2′.** *Для каждого* $\theta \in [0, 1]$ *справедливо представление*

$$\omega_p^{-1} \mathrm{Cap}_\theta E = (1-\theta) C_{g_B}(A) + \theta C_{g_A}(B) - \theta(1-\theta) C_2(|E|). \tag{24}$$

***Следствие* 4.** *Пусть конденсатор* E *и число* θ *фиксированы. Для любого* $\varepsilon > 0$ *существуют число* $\delta > 0$ *и (евклидовы) окрестности* $U(A)$ *и* $U(B)$ *множеств* A *и* B *такие, что для всех* $\theta' \in [0, 1] \cap (\theta - \delta, \theta + \delta)$ *и всех* $E' = (A', B')$ *с* $A \subset A' \subset U(A)$, $B \subset B' \subset U(B)$ *выполняется*

$$|\mathrm{Cap}_\theta E - \mathrm{Cap}_{\theta'} E'| < \varepsilon.$$

Если F замкнуто и $C_2(F) < \infty$, то через Ω_F обозначим ту (единственную) компоненту связности $\mathbb{R}^p \setminus F$, ньютонова емкость которой бесконечна.

***Следствие* 5.** *При условии*

$$C_2(A \cap \Omega_B) = 0 \tag{25}$$

справедливо тождество

$$\omega_p^{-1} \operatorname{Cap}_\theta E = \theta^2 C_2(|E|) + C_{g_B}(A) \ \ \forall \theta.$$

Действительно, при условии (25) верно равенство

$$C_{g_A}(B) - C_{g_B}(A) = C_2(|E|),$$

в силу чего из (24) находим искомое.

4. Пусть $\mathcal{E}_2$ — предгильбертово пространство всех зарядов ν в $\mathbb{R}^p$ с конечной ньютоновой энергией, евклидово произведение элементов ν_1 и ν_2 которого тождественно их взаимной ньютоновой энергии (ν_1, ν_2) [8]. Сходимость зарядов по норме $\mathcal{E}_2$ назовем сильной сходимостью.

В этом пункте приведен ряд утверждений теории ньютоновых емкостей конденсаторов, используемых ниже в доказательствах. Как и всюду в работе, условия (4), (10) предполагаются выполненными.

Следующие ниже утверждения 7 – 10 содержатся в [11, 12]. При дополнительном условии отделимости

$$\operatorname{dist}(A, B) > 0$$

($\operatorname{dist}(\cdot, \cdot)$ — евклидово расстояние) эти и все остальные утверждения данного пункта получены в [4, 13].

7. $c_2(E) \in [0, \infty)$, *причем равенства* $c_2(E) = 0$ *и* $C_2(A) = 0$ *равносильны.*

8. **Теорема А.** *Пусть* $c_2(E) > 0$. *Существует и единствен заряд* $\lambda \equiv \lambda_E$ *такой, что для всякой последовательности* $\{\nu_k\} \subset \mathfrak{N}^{1,1}(E) \cap \mathcal{E}_2$ *с*

$$\lim_{k \to \infty} \|\nu_k\|^2 = \frac{1}{c_2(E)}$$

выполняется

$$\nu_k \to \lambda \ \textit{сильно}.$$

9. *Экстремальный заряд* λ *ассоциирован с* E, *имеет энергию, равную* $1 / c_2(E)$, *и удовлетворяет соотношениям*

$$\lambda^+(A) = 1, \quad \lambda^-(B) \le 1.$$

При этом существуют (некомпактные) конденсаторы, для которых выполняется строгое неравенство $\lambda^-(B) < 1$, *или, что равносильно, для которых не существует в классе* $\mathfrak{N}^{1,1}(E)$ *заряда с минимальной ньютоновой энергией. Полное описание класса таких конденсаторов дано в* [12]. *Для целей настоящей работы достаточно отметить, что* $\lambda \in \mathfrak{N}^{1,1}(E)$ *при условии* $C_2(|E|) < \infty$.

10. *Пусть* $E_k \nearrow E$. *Тогда*

$$c_2(E) = \lim_{k \to \infty} c_2(E_k). \tag{26}$$

Если, к тому же, $c_2(E) > 0$, *то заряды* $\lambda_k := \lambda_{E_k}$ *сходятся к* λ *сильно и выполняются равенства*

$$(\lambda^+, \lambda) = \lim_{k\to\infty} (\lambda_k^+, \lambda_k), \qquad (\lambda^-, \lambda) = \lim_{k\to\infty} (\lambda_k^-, \lambda_k). \tag{27}$$

Для замкнутого множества F через I_F обозначим совокупность всех его иррегулярных точек [8]. Конденсатор E назовем регулярным, если множество $I_{|E|}$ пусто.

Основываясь на результатах из [11, 12] и рассуждая аналогично доказательству теоремы 8 из [13], убеждаемся в справедливости следующего утверждения.

11. **Теорема В.** *Потенциал экстремального заряда* λ *непрерывен в* $\mathbb{R}^p \setminus I_{|E|}$ *и удовлетворяет соотношениям*

$$\mathcal{U}_2^{\lambda}(x) = \begin{cases} (\lambda^+, \lambda) & \forall\, x \in A \setminus I_A; \\ (\lambda^-, \lambda) & \forall\, x \in B \setminus I_B, \end{cases} \tag{28}$$

$$(\lambda^-, \lambda) \le \mathcal{U}_2^{\lambda}(x) \le (\lambda^+, \lambda) \;\; \forall\, x \in \mathbb{R}^p, \tag{29}$$

$$-\infty < (\lambda^-, \lambda) \le 0 \le (\lambda^+, \lambda) < +\infty. \tag{30}$$

***Следствие* А.** *Следующие утверждения равносильны*:

i) *верно равенство* $c_2(E) = C_{g_B}(A)$;

ii) *справедлива импликация* (18) $\Rightarrow$ (25).

12. **Теорема С.** *Пусть* $E_k \searrow E$ *и, каковы бы ни были окрестности* $U(A)$ *и* $U(B)$ *множеств* A *и* B, *существует номер* k_0 *такой, что* $A_{k_0} \subset U(A)$, $B_{k_0} \subset U(B)$. *Тогда*

$$c_2(E) = \lim_{k\to\infty} c_2(E_k). \tag{31}$$

Если, к тому же, $c_2(E) > 0$ *и* $\lambda_k := \lambda_{E_k}$, *то*

$$\lambda_k \to \lambda \text{ сильно}, \tag{32}$$

$$(\lambda^+, \lambda) = \lim_{k\to\infty} (\lambda_k^+, \lambda_k), \qquad (\lambda^-, \lambda) = \lim_{k\to\infty} (\lambda_k^-, \lambda_k). \tag{33}$$

Доказательство. Пусть сначала $c_2(E) = 0$. Тогда $C_{g_B}(A) = 0$, и потому в условиях теоремы С для каждого натурального n выполняется

$$C_{g_{B_k}}(A_k) < \frac{1}{n} \quad \forall\, k \ge k(n).$$

Отсюда и из оценки

$$c_2(E_k) \le C_{g_{B_k}}(A_k)$$

получаем (31).

Пусть $c_2(E) > 0$. Предположим сначала, что $C_2(|E|) < \infty$. Тогда для всех достаточно больших номеров $k \ge k_1$ выполняется $C_2(|E_k|) < \infty$, и потому (см. утверждение 9)

$$\lambda_k \in \mathfrak{N}^{1,1}(E_k) \quad \forall\, k \ge k_1. \tag{34}$$

Пользуясь последним соотношением, упорядоченностью конденсаторов E_k, $k = 1, 2, \ldots$, и выпуклостью классов $\mathfrak{N}^{1,1}(E_k)$, находим, что последовательность зарядов $\{\lambda_k\}$ фундаментальна в норме пространства $\mathcal{E}_2$, и потому в силу теоремы о полноте классов ассоциированных с конденсаторами зарядов [11] сходится в $\mathcal{E}_2$ к некоторому заряду ν, $\nu \wedge E$.

Пусть γ — равновесная мера A_{k_1} относительно гринова ядра $g_{B_{k_1}}$, а γ' — ее ньютоново выметание на B_{k_1} [8]. Заряд $\gamma - \gamma'$ ассоциирован с E_{k_1}, имеет конечную ньютонову энергию, а его ньютонов потенциал квазивсюду на A_{k_1} и B_{k_1} равен соответственно 1 и 0. Отсюда в силу (34) и свойства C-абсолютной непрерывности [8] зарядов λ_k и ν находим

$$\nu(A) = (\nu, \gamma - \gamma') = \lim_{k\to\infty} (\lambda_k, \gamma - \gamma') = \lim_{k\to\infty} \lambda_k\left(A_{k_1}\right) = 1,$$

что доказывает равенство $\nu(A) = 1$.

Из соображений симметрии находим, что $|\nu(B)| = 1$, и потому верно включение

$$\nu \in \mathfrak{N}^{1,1}(E).$$

Следовательно, справедлива цепочка неравенств

$$V^{1,1}(E) \le \|\nu\|^2 = \lim_{k\to\infty} \|\lambda_k\|^2 = \lim_{k\to\infty} V^{1,1}(E_k) \le V^{1,1}(E),$$

доказывающая искомое соотношение (31) и, кроме того, равенство

$$\|\nu\|^2 = V^{1,1}(E).$$

Поэтому в силу единственности экстремального заряда имеем $\nu = \lambda$, что доказывает (32).

Из (32) вытекает [8], что последовательность потенциалов $\left\{\mathcal{U}_2^{\lambda_k}\right\}$ квазивсюду в $\mathbb{R}^p$ поточечно сходится к $\mathcal{U}_2^{\lambda}$. Отсюда на основании равенств (28), выписанных для λ и λ_k, получаем (33).

В случае $C_2(|E|) = \infty$ доказательство теоремы С основано на следствии А.

5. ***Доказательства теорем* 1, 2 *и* 2′.** Прежде всего заметим, что если ассоциированный с конденсатором E заряд κ_E^θ, удовлетворяющий соотношениям (14) и (15), существует, то в силу теоремы единственности ньютонова потенциала [8] он единствен.

Пусть выполнены условия (18) и

$$C_2(A) > 0. \tag{35}$$

Через $\gamma_F^{\mathcal{K}}$ обозначим решение (если оно существует) проблемы равновесия на $F \subset \mathbb{R}^p$ в теории $\mathcal{K}$-потенциала ($\mathcal{K}(x, y)$ — ядро) [8, 9], а через β_F — оператор ньютонова выметания на F. Из свойств равновесных и выметенных мер и их потенциалов вытекает, что заряд

$$\kappa_E^\theta := (1-\theta)\left(\gamma_A^{g_B} - \beta_B \gamma_A^{g_B}\right) - \theta\left(\gamma_B^{g_A} - \beta_A \gamma_B^{g_A}\right), \qquad \theta \in [0, 1], \tag{36}$$

удовлетворяет соотношениям (14) и (15). Более того, если конденсатор E компактен и регулярен, то выполняется

$$\theta + \mathcal{U}_2^{\kappa_E^\theta} \in \mathcal{L}_\theta^*(E). \tag{37}$$

Покажем справедливость представления (13).

Обозначим $\gamma := \gamma_{|E|}^{k_2}$ и заметим, что для всех $\theta_1, \theta_2 \in [0, 1]$

$$\kappa_E^{\theta_1} = \kappa_E^{\theta_2} + (\theta_2 - \theta_1)\gamma. \tag{38}$$

Действительно, заряд $\kappa_E^{\theta_1} - \kappa_E^{\theta_2}$ C-абсолютно непрерывен, сосредоточен на множестве $|E|$, а его ньютонов потенциал, согласно (14), квазивсюду на $|E|$ равен $\theta_2 - \theta_1$. Отсюда в силу теоремы единственности [8] находим (38).

Пусть $\lambda = \lambda_E$ — заряд, однозначно определенный теоремой A в силу условия (35). Благодаря условию (18), для него выполняется

$$\lambda(\mathbb{R}^p) = 0.$$

Отсюда и из включения $\operatorname{supp}\lambda \subset |E|$ получаем

$$(\lambda, \gamma) = 0. \tag{39}$$

Обозначим

$$\tilde{\theta} := -\frac{(\lambda^-, \lambda)}{\|\lambda\|^2}. \tag{40}$$

Из соотношений (28) – (30), равенства $\|\lambda\|^2 = (\lambda^+, \lambda) - (\lambda^-, \lambda)$ и утверждения единственности из теоремы 1 находим, что $\tilde{\theta} \in [0, 1]$ и

$$\tilde{\kappa} = \frac{\lambda}{\|\lambda\|^2}, \tag{41}$$

где $\tilde{\kappa} := \kappa_E^{\tilde{\theta}}$. Кроме того, в силу (38) верно

$$\kappa_E^{\theta} = \tilde{\kappa} - (\theta - \tilde{\theta})\gamma \quad \forall\, \theta \in [0, 1]. \tag{42}$$

Из соотношений (39) – (42) находим тождество

$$\|\kappa_E^{\theta}\|^2 = \|\tilde{\kappa}\|^2 + (\theta - \tilde{\theta})^2 \|\gamma\|^2 =$$

$$= \frac{1}{\|\lambda\|^2} + \left[\theta + \frac{(\lambda^-, \lambda)}{\|\lambda\|^2}\right]^2 C_2(|E|) \quad \forall\, \theta. \tag{43}$$

Дальнейшие рассуждения в доказательстве (13) проведем в три этапа.

Пусть сначала конденсатор E компактен и регулярен, а $f \in \mathcal{L}_\theta^*(E)$ — произвольная фиксированная функция. В силу (37) функция $\varphi := f - \mathcal{U}_2^{\tilde{\kappa}} - \theta$ принадлежит классу $ACL_2 \cap C(\mathbb{R}^p)$, равна $\tilde{\theta} - \theta$ на $|E|$ и стремится к нулю при $x \to \infty_p$. Пользуясь представлением ньютоновых емкостей компактов через классы функций и их интегралы Дирихле [3, 7, 10], из указанных свойств функции φ находим

$$D(\varphi) \geq \omega_p (\tilde{\theta} - \theta)^2 \|\gamma\|^2. \tag{44}$$

Далее, из соотношений, полученных в [3] при доказательстве леммы 3, и указанных свойств функции φ получаем

$$\int_{\mathbb{R}^p} \left(\operatorname{grad} \mathcal{U}_2^{\tilde{\kappa}}(x), \operatorname{grad} \varphi(x)\right) dx = 0.$$

Отсюда имеем

$$D(f) = D(\varphi) + D\left(\mathcal{U}_2^{\tilde{\kappa}}\right). \tag{45}$$

Из соотношений (43) – (45) и (11), в силу произвольности функции $f \in \in \mathcal{L}^*_\theta(E)$ находим

$$\mathrm{Cap}_\theta E \geq \omega_p \left\| \kappa_E^\theta \right\|^2.$$

Дополнительное к полученному неравенство вытекает из соотношений (11) и (37). Это доказывает справедливость представления (13) в предположениях компактности и регулярности E.

Если конденсатор E компактен, но не регулярен, рассмотрим последовательность $\{E_k\}$ компактных регулярных конденсаторов такую, что $E_k \searrow E$. Согласно доказанному, для всех $k \in \mathbb{N}$ и $\theta \in [0, 1]$ выполняется

$$\omega_p^{-1} \mathrm{Cap}_\theta E_k = \frac{1}{\|\lambda_k\|^2} + \left[\theta + \frac{(\lambda_k^-, \lambda_k)}{\|\lambda_k\|^2} \right]^2 C_2(|E_k|),$$

где $\lambda_k := \lambda_{E_k}$. Переходя здесь к пределу по $k \to \infty$, на основании соотношений (7), (31), (33) и (43) получаем (13).

И наконец, для некомпактного E рассмотрим последовательность компактных конденсаторов $E'_k \nearrow E$. Искомое соотношение (13) в этом случае вытекает из его уже установленной справедливости для E'_k и равенств (2), (26), (27) и (43).

Таким образом, при условиях (18) и (35) заряд κ_E^θ, определенный равенством (36), удовлетворяет всем утверждениям теоремы 1.

Покажем, что в этих условиях выполняется (20). Из соотношений (13) и (43) находим, что для всех $\theta \in [0, 1]$ верно

$$\omega_p^{-1} \mathrm{Cap}_\theta E = c_2(E) + (\theta - \tilde{\theta})^2 C_2(|E|).$$

Подставим сюда последовательно значения θ, равные 1 и 0, воспользовавшись при этом соотношениями (5), а затем одно из найденных равенств вычтем из другого. В результате получим, что $\tilde{\theta}$ равно определенному равенством (21) числу θ_E, что и требовалось.

Для завершения доказательства теоремы 2 рассмотрим оставшийся неисследованным случай $C_2(A) = 0$ (условия (18) и (19) предполагаются выполненными). Тогда верно $c_2(E) = 0$, $\theta_E = 0$, и потому тождество (20) равносильно (22). Если при этом конденсатор E компактен, то (20) и (22) доказываются аппроксимацией E последовательностью компактных конденсаторов $E_k = (A_k, B_k)$, $E_k \searrow E$, с $C_2(A_k) > 0$. (При такой аппроксимации все емкостные характеристики конденсаторов и множеств, входящие в (20) и (21), непрерывны.) В случае некомпактного E тождество (22) получаем аппроксимацией $E'_k \nearrow E$, где E'_k компактны.

Завершим доказательство теоремы 1. Пусть верно (12), но хотя бы одно из условий (18), (35) не выполнено. Если при этом $C_2(A) = 0$ и $C_2(|E|) < \infty$, то справедливость теоремы 1 вытекает из соотношений (22) и (23): искомый заряд κ_E^θ равен $-\theta \gamma_{|E|}^{k_2}$, если $C_2(|E|) > 0$, и нулю — в противном случае. Если же $C_2(|E|) = \infty$, то тогда $C_{g_A}(B) = \infty$ и в силу свойств 3 и 4 емкостей $\mathrm{Cap}_\theta E$ необходимо выполняется

$$\theta = 0, \qquad \mathrm{Cap}_\theta E = \omega_p C_{g_B}(A) \ (< \infty),$$

и потому искомый заряд κ_E^θ равен $\gamma_A^{g_B} - \beta_B \gamma_A^{g_B}$, если $C_2(A) > 0$, и нулю — в противном случае.

Докажем теорему 2′. В случае $C_2(|E|)=0$ правая и левая части в (24) равны нулю. Поэтому пусть $C_2(|E|)\in(0,\infty)$. Из тождества (20), взятого при $\theta=0$, и (5) находим

$$c_2(E) = C_{g_B}(A) - \theta_E^2 C_2(|E|). \tag{46}$$

Подставляя (46) и (21) в (20), получаем (24).

Теоремы 1, 2 и 2′ доказаны.

6. *Доказательство следствия* 1. Пусть выполнено (12). Обозначим

$$\alpha := \kappa_E^\theta(A), \quad \beta := -\kappa_E^\theta(B),$$

где κ_E^θ — заряд, однозначно определенный теоремой 1. Тогда числа α и β конечны и неотрицательны, а κ_E^θ принадлежит классу $\mathfrak{N}^{\alpha\beta}(E)$ и имеет минимальную в этом классе энергию:

$$\left\|\kappa_E^\theta\right\|^2 = V^{\alpha,\beta}(E). \tag{47}$$

Действительно, пусть $\kappa_E^\theta\neq 0$, ибо в противном случае равенство (47) очевидно. Для произвольного заряда $\nu\in\mathfrak{N}^{\alpha\beta}(E)$ с конечной энергией верна цепочка соотношений

$$\|\nu\|\left\|\kappa_E^\theta\right\| \geq (\nu,\kappa_E^\theta) = \int_A \mathcal{U}_2^{\kappa_E^\theta}(x)\,d\nu^+(x) -$$

$$-\int_B \mathcal{U}_2^{\kappa_E^\theta}(x)\,d\nu^-(x) = (1-\theta)\alpha + \theta\beta = \left\|\kappa_E^\theta\right\|^2,$$

откуда находим (47).

Из равенств (13) и (47) получаем (17). Следствие 1 доказано.

7. Вариационной [1, 2]-емкостью конденсатора E называется величина

$$C_2^1(E) := \inf D(f),$$

где f пробегает множество всех функций из класса ACL_2, равных 1 и 0 в некоторых, зависящих от f, евклидовых окрестностях соответственно A и B [2].

Покажем, что теоретико-функциональные емкости $C_2^1(E)$, $\operatorname{Cap}_\theta E$, $\operatorname{Cap} E$ (см. (1)) и ньютонова емкость $c_2(E)$ конденсатора E связаны между собой следующими равенствами.

Теорема 3. *Верны равенства*

$$\omega_p c_2(E) = C_2^1(E) = \operatorname{Cap} E = \operatorname{Cap}_{\theta_E} E = \min_{\theta\in[0,1]} \operatorname{Cap}_\theta E, \tag{48}$$

где θ_E *определено равенством* (21) *при условии*

$$0 < C_2(|E|) < \infty \tag{49}$$

и равно нулю в других случаях.

Доказательство. Для конденсаторов, удовлетворяющих условию отделимости, и, в частности, для компактных конденсаторов, равенство

$$\operatorname{Cap} E = \omega_p c_2(E) \tag{50}$$

установлено в [4] (см. также [3]). Докажем его для произвольного E.

Если $E_k\nearrow E$ — последовательность компактных конденсаторов, то

$$\operatorname{Cap} E \geq \operatorname{Cap} E_{k+1} \geq \operatorname{Cap} E_k \quad \forall\, k,$$

и потому имеем (см. (26))

$$\operatorname{Cap} E \geq \lim_{k \to \infty} \operatorname{Cap} E_k = \omega_p \lim_{k \to \infty} c_2(E_k) = \omega_p c_2(E).$$

Для доказательства дополнительного к полученному неравенства

$$\operatorname{Cap} E \leq \omega_p c_2(E) \tag{51}$$

рассмотрим последовательность регулярных конденсаторов $E'_k \searrow E$, удовлетворяющую условиям теоремы С. Обозначая $\lambda_k := \lambda_{E'_k}$, в силу теоремы В имеем

$$\frac{\mathcal{U}_2^{\lambda_k} - (\lambda_k^-, \lambda_k)}{\|\lambda_k\|^2} \in \mathcal{L}(E'_k),$$

и потому (см. (11))

$$\operatorname{Cap} E'_k \leq \omega_p c_2(E'_k) \quad \forall\, k.$$

Устремляя в последнем соотношении k к ∞, из свойства монотонности

$$\operatorname{Cap} E \leq \operatorname{Cap} E'_{k+1} \leq \operatorname{Cap} E'_k \quad \forall\, k$$

и теоремы С о непрерывности ньютоновых емкостей конденсаторов находим искомое неравенство (51), а потому и (50).

Для компактного конденсатора E равенство

$$C_2^1(E) = \operatorname{Cap} E$$

установлено в [2], а для некомпактного E оно доказывается с помощью аппроксимации E последовательностью компактных конденсаторов $E_k \nearrow E$ и с использованием результатов о непрерывности емкостей $\operatorname{Cap} E$ (см. (26) и (50)) и $C_2^1(E)$ [2].

Справедливость последних двух равенств в (48) вытекает из соотношений (20) и (50) в случае (49) и из тождества (23) в случае $C_2(|E|) = 0$. При условии $C_2(|E|) = \infty$ имеем $C_{g_A}(B) = \infty$ и

$$\operatorname{Cap} E = \omega_p C_{g_B}(A)$$

(см. (50) и следствие А), а потому искомое утверждение вытекает из (5) и утверждения 4 из п. 2.

8. Пусть $\mathbb{C}(\cdot)$ — функция от E, равная

$$\frac{\left[C_2(|E|) + C_{g_B}(A) - C_{g_A}(B) \right]^2}{4 C_2(|E|)}$$

при условии (49), и нулю — в других случаях.

Справедливо следующее представление ньютоновой емкости $c_2(E)$ конденсатора E (и равных ей в силу теоремы 3 емкостей $\omega_p^{-1} \operatorname{Cap} E$, $\omega_p^{-1} C_2^1(E)$) через ньютоновы и гриновы емкости его пластин A и B.

***Следствие* 6.** *Для произвольного* E *верно равенство*

$$c_2(E) = C_{g_B}(A) - \mathbb{C}(E). \tag{52}$$

Доказательство. Подставляя (21) в равенство (46), убеждаемся в справедливости (52) в случае (49). В других случаях это равенство следует из утверждения 7 и следствия А из п. 4.

***Следствие* 7.** *Каждое из утверждений* i), ii) *следствия* А *равносильно утверждению*

iii) $\mathbb{C}(E) = 0$.

9. Если одна из пластин конденсатора E (пусть, для определенности, A) ограничена, то наряду с емкостями $\operatorname{Cap} E$ и $C_2^1(E)$ для E определена 2-емкость $\Gamma_2(E)$ [6, 7],

$$\Gamma_2(E) := \inf_{f \in \mathcal{L}^*(E)} D(f).$$

В работе [3] дано теоретико-потенциальное описание емкости $\Gamma_2(E)$, показано, что в случае некомпактного E емкости $\Gamma_2(E)$ и $\operatorname{Cap} E$, вообще говоря, не совпадают, а также получены условия на $\dot{E}$, необходимые и достаточные для их равенства.

Следующее утверждение (см. также следствие 7) дополняет упомянутые результаты из [3].

***Следствие* 8.** *Верны равенства*

$$\Gamma_2(E) - \operatorname{Cap} E = \begin{cases} 0, & \textit{если } E \textit{ компактен;} \\ \omega_p \mathbb{C}(E) & \textit{— в противном случае.} \end{cases}$$

1. *Gehring F. W.* Symmetrization of rings in space // Trans. Amer. Math. Soc. – 1961. – **101**, № 3. – P. 499–519.
2. *Гольдштейн В. М., Решетняк Ю. Г.* Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения. – М.: Наука, 1983. – 284 с.
3. *Зорий Н. В.* Функциональные характеристики пространственных конденсаторов: их свойства, соотношения между ними // Укр. мат. журн. – 1987. – **39**, № 5. – С. 565–573.
4. *Зорий Н. В.* О ньютоновых емкостях конденсаторов // Вопросы анализа и приближения. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1989. – С. 67–75.
5. *Григорьян А. А.* О лиувиллевых теоремах для гармонических функций с конечным интегралом Дирихле // Мат. сб. – 1987. – **132**, № 4. – С. 496–516.
6. *Ziemer W. P.* Extremal length and p-capacity // Mich. Math. Z. – 1969. – **16**, № 1. – P. 43–51.
7. *Hesse Z.* A p-extremal length and p-capacity equality // Ark. mat. – 1975. – **13**, № 1. – P. 131–144.
8. *Ландкоф Н. С.* Основы современной теории потенциала. – М.: Наука, 1966. – 515 с.
9. *Fuglede B.* On the theory of potentials in locally compact spaces // Acta Math. – 1960. – **103**, № 3–4. – P. 139–215.
10. *Fuglede B.* Extremal length and functional completion // Ibid. – 1957. – **98**, № 3–4. – P. 171–219.
11. *Зорий Н. В.* Одна некомпактная вариационная задача теории рисова потенциала. I // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 10. – С. 1350–1360.
12. *Зорий Н. В.* Одна некомпактная вариационная задача теории рисова потенциала. II // Там же. – 1996. – **48**, № 5. – С. 603–613.
13. *Зорий Н. В.* Задача о минимуме энергии для пространственных конденсаторов и ядер Рисса // Там же. – 1989. – **41**, № 1. – С. 34–41.

Получено 13.10.95