УДК 517.922.51

В. Г. Городецкий, преп. (Киев. политехн. ин-т)

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ РЕШЕНИЙ И АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Conditions of boundedness of solutions and their asymptotic properties are obtained for some systems of differential equations.

Одержано умови обмеженості розв'язків та їх асимптотичних властивостей для деяких систем диференціальних рівнянь.

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} dx_1/dt = X_1(x_1, \dots, x_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ dx_n/dt = X_n(x_1, \dots, x_n), \end{cases} \tag{1}$$

где $X_1, \dots, X_n$ — непрерывные функции. В работе [1] рассматривались условия (теорема 4), при которых для асимптотической устойчивости системы (1) допускается соотношение $\dot V \le 0$ (где V — положительно определенная функция) в отличие от известного критерия Ляпунова [2], где требуется выполнение неравенства $\dot V < 0$.

В настоящей статье предлагаются критерии оценки поведения решений некоторых систем дифференциальных уравнений, допускающие производную $\dot V$ любого знака.

Определение 1. *Положительно определенную функцию $V(x_1, \dots, x_n)$ будем называть бесконечно большой, если для всякого положительного числа A можно указать число N настолько большое, что при $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 > N$ будем иметь $V(x_1, \dots, x_n) > A$.*

Определение 2. *Решения системы* (1) *будем называть ограниченными, если для любой начальной точки движения существует сфера конечного радиуса, внутри которой содержится траектория при любом $t > t_0$, где t_0 — время начала движения.*

Теорема 1. *Для того чтобы решения системы* (1) *были ограничены при любых начальных возмущениях, достаточно, чтобы существовала бесконечно большая положительно определенная функция V, для производной которой выполняются соотношения $\dot V \ge 0$ на K, $\dot V < 0$ вне K, где K — ограниченное множество значений переменных $x_1, \dots, x_n$.*

Доказательство. Так как множество K по условию теоремы ограничено, то можно указать сферу η такую, что вся область K окажется внутри нее. Пусть

$$\max_{\eta} V = l. \tag{2}$$

Выберем также сферу ε, охватывающую η и удовлетворяющую условию

$$\min_{\varepsilon} V = L, \tag{3}$$

где $L > l$. Очевидно, выполнение (3) возможно в силу определения 1.

Покажем, что если движение начинается в точке $M_0 \in I_\eta$ (где I_η — множество точек, лежащих внутри сферы η), то тректория никогда не выйдет за пределы сферы ε.

Пусть вначале $M_0 \in K$. Так как в этом случае $\dot{V} \geq 0$, то V может возрастать до величины (2) в силу того, что сфера η полностью охватывает область K. Как только траектория выходит за пределы K, значение V уменьшается, так как вне K $\dot{V} < 0$.

Если же движение начинается в точке $M_0 \in I_\eta \backslash K$, то V будет убывать. В этом случае траектория может либо асимптотически приближаться к 0 в силу критерия асимптотической устойчивости Ляпунова, либо попасть в область K. Последний случай рассмотрен выше.

Таким образом, при начале движения внутри сферы η для всех $t \geq t_0$ справедливо соотношение

$$V \leq l. \tag{4}$$

Если же предположить, что траектория при этом выйдет за пределы сферы ε, то при ее пересечении в силу (3) должно выполняться неравенство

$$V \geq L. \tag{5}$$

Но так как $L > l$, то (5) противоречит (4). Следовательно, в приведенном случае траектория не покинет пределы сферы ε, и, таким образом, решения системы (1) будут ограничены.

***Пример* 1.** Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = x - x^3 - 2y, \\ \dot{y} = 2x - y - y^3. \end{cases} \tag{6}$$

Для ее исследования выберем бесконечно большую положительно определенную функцию $V = (x^2 + y^2)/2$. Тогда в силу уравнений (6)

$$\dot{V} = -x^4 + x^2 - y^4 - y^2. \tag{7}$$

Функция (7) не является отрицательно определенной, так как возможно соотношение $\dot{V} > 0$ при соблюдении условия $x^2 > x^4 + y^2 + y^4$. Но очевидно, что за пределами квадрата $|x| = 1$, $|y| = 1$ всегда $\dot{V} < 0$. Следовательно, область, где $\dot{V} \geq 0$, ограничена, а значит, и решения системы (6) ограничены при любых начальных возмущениях.

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x, y), \\ \dot{y} = Y(x, y). \end{cases} \tag{8}$$

Теорема 2. *Если для системы* (8) *выполняются условия теоремы* 1, *а также на всей фазовой плоскости нет замкнутых траекторий и начало координат — единственная особая точка, то система* (8) *асимптотически устойчива при любых начальных возмущениях.*

Доказательство. Пусть выполняются условия теоремы 1. Это означает, что траектория все время остается внутри некоторой сферы. Известно [3], что в этом случае она либо стремится к какой-либо особой точке, либо к замкнутой траектории, либо сама является замкнутой траекторией. Но если по условию теоремы 2 на всей плоскости нет замкнутых траекторий и других особых точек, кроме 0, то начало координат — единственная точка, к которой будут стремиться все траектории.

***Пример* 2.** Проверим, является ли асимптотически устойчивой при любых начальных возмущениях система (6), решения которой ограничены, как было показано в примере 1.

Во-первых, необходимо выяснить, возможны ли для этой системы замкнутые траектории. Для этого воспользуемся критерием Бендиксона, согласно которому в области отсутствуют замкнутые траектории, если в ней выражение $\partial X/\partial x + \partial Y/\partial y$ сохраняет знак. После подстановки уравнений (6) и преобразований получаем

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = -3(x^2 + y^2) < 0.$$

Убедимся также в том, что 0 — единственная особая точка. Для этого достаточно, чтобы только в начале координат выполнялись условия

$$\begin{cases} X = 0, \\ Y = 0. \end{cases}$$

С учетом системы (6) получим

$$\begin{cases} x - x^3 - 2y = 0, \\ 2x - y - y^3 = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Преобразуем уравнения (9) к виду

$$\begin{cases} y = (x - x^3)/2, & (9\text{а}) \\ x = (y + y^3)/2. & (9\text{б}) \end{cases}$$

Определим область возможных значений для кривых (9а) и (9б) в правой полуплоскости.

Для функции (9а) справедливо следующее: 1) она обращается в 0 при $x = 0$ и $x = 1$; 2) в пределах

$$0 < x < 1 \tag{10}$$

y принимает значения

$$0 < y < x/2; \tag{11}$$

3) при $x > 1$ $y < 0$.

Из анализа функции (9б) можно установить, что в правой полуплоскости она полностью лежит в 1-м квадранте и, следовательно, при $x > 1$ у нее не может быть общих точек с кривой (9а).

Кроме того, для уравнения (9б) справедливо: $x = 0$ при $y = 0$ и $x = 1$ при $y = 1$. Так как для интервала $0 < y < 1$ (или $0 < x < 1$) $y^3 < y$, то можно записать

$$x = (y + y^3)/2 = y/2 + y^3/2 < y/2 + y/2 = y.$$

Т. е. в этом случае

$$y > x. \tag{12}$$

Сравнивая (11) и (12), делаем вывод, что и в этом случае кривые (9а) и (9б) не могут пересечься. Таким образом, в правой полуплоскости не может быть решений системы (9), а так как функции (9а) и (9б) нечетные, то этот же вывод справедлив и для левой полуплоскости.

Следовательно, 0 — единственная особая точка во всем пространстве переменных x и y. Это означает, что все условия теоремы 2 выполняются, и система (6) асимптотически устойчива при любых начальных возмущениях.

1. *Барбашин Е. А., Красовский Н. Н.* Об устойчивости движения в целом // Докл. АН СССР. – 1952. – **86**, № 3. – С. 453–456.
2. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. – М.–Л.: Гостехиздат, 1950. – 471 с.
3. *Бендиксон И.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями // Успехи мат. наук. – 1941. – Вып. 9. – С. 191–211.

Получено 29.03.93