УДК 519.21

О. А. Война, канд. фіз.-мат. наук,
М. В.-С. Сидоров, асп. (Київ. ун-т)

РІВНЯННЯ ОПТИМАЛЬНОЇ НЕЛІНІЙНОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ ТА ІНТЕРПОЛЯЦІЇ ДЛЯ ЧАСТКОВО СПОСТЕРЕЖУВАНИХ МАРКОВСЬКИХ ПРОЦЕСІВ

Recurrent relations for problems of optimal filtration and interpolation of partially observed discrete Markov chains are obtained. The differential system for problems of optimal nonlinear filtration and reversable differential system for problems of optimal nonlinear interpolation of Markov processes with continious time are given.

Одержано рекурентні співвідношення для задач оптимальної фільтрації та інтерполяції частково спостережуваних дискретних ланцюгів Маркова. Для задач оптимальної нелінійної фільтрації марковських процесів з неперервним часом наведено систему диференціальних рівнянь, а для задач оптимальної нелінійної інтерполяції — систему обернених диференціальних рівнянь.

Вивчення частково спостережуваних багатовимірних марковських процесів (є можливість спостерігати лише за частиною компонент) є однією з важливих задач статистики випадкових процесів, до розв'язання якої в різних постановках зверталось багато авторів [1 – 3].

Огляд результатів для моделей, близьких до тих, що вивчаються в даній статті, а також розв'язок задачі оптимальної нелінійної фільтрації для частково спостережуваних ланцюгів Маркова наведено в роботах [2, 3]. Деякі результати з оптимальної інтерполяції та екстраполяції для частково спостережуваних дискретних ланцюгів Маркова див. в [4].

Дана робота присвячена знаходженню обернених рівнянь оптимальної нелінійної інтерполяції для розривних марковських процесів.

Нехай $z(t) = \{x(t), y(t)\}$, $t \geq 0$, — неперервний справа однорідний ланцюг Маркова з дискретною множиною станів $\mathbb{U} = \mathbb{E} \times \mathbb{A}$,

$$P_{ia}^{jb}(s) = P\{z(s) = (j, b)/z(0) = (i, a)\}, \quad i, j \in \mathbb{E}, \ a, b \in \mathbb{A},$$

— перехідна функція ланцюга $z(t)$,

$$q_{ia} = P\{x(0) = i, \ y(0) = a\}, \quad (i, a) \in \mathbb{E} \times \mathbb{A},$$

— його початковий розподіл.

Припустимо, що для $z(t)$ виконуються умови

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} P_{ia}^{ja}(t) = \lambda_{ij}(a), \quad i \neq j, \ i, j \in \mathbb{E}, \ a \in \mathbb{A}, \tag{1}$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} P_{ia}^{jb}(t) = \mu_{ab}(i), \quad a \neq b, \ a, b \in \mathbb{A}, \ i \in \mathbb{E}, \tag{2}$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(1 - P_{ia}^{jb}(t)\right) = \delta_{(i,a)}^{(j,b)} (\mu_a(i) + \lambda_i(a)), \ a, b \in \mathbb{A}, \ i, j \in \mathbb{E}, \tag{3}$$

$$\delta_{(i,a)}^{(j,b)} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = j, \ a = b; \\ 0 & \text{— у противному разі} \end{cases}$$

— символ Кронекера і при цьому для будь-яких $a, b \in \mathbb{A}$, $i, j \in \mathbb{E}$

$$\mu_a(i) = \sum_{\substack{b \in \mathbb{A} \\ a \neq b}} \mu_{ab}(i) = -\mu_{aa}(i), \quad \lambda_i(a) = \sum_{\substack{j \in \mathbb{E} \\ j \neq i}} \lambda_{ij}(a) = -\lambda_{ii}(a). \tag{4}$$

Припустимо, що є можливість спостерігати лише другу компоненту $y(t)$ процесу $z(t)$, і за цими спостереженнями необхідно знайти умовний розподіл першої компоненти $x(t)$. Тобто, нехай

$$\tilde{y}^T = \{y(s),\ 0 \le s \le T\}$$

— траєкторія процесу на проміжку часу $[0, T]$,

$$\mathfrak{B}_{[t,T]} = \sigma\{y(s),\ t \le s \le T\}$$

— σ-алгебра, породжена траєкторією процесу $y(t)$ на проміжку часу $[t, T]$.

Необхідно знайти рівняння для визначення умовних ймовірностей

$$\tilde{P}_i^*(t) = P\{x(t) = i / \mathfrak{B}_{[0,t]}\}, \quad i \in \mathbb{E},\ t \ge 0, \tag{5}$$

$$\tilde{P}_i^*(T,t) = P\{x(t) = i / \mathfrak{B}_{[0,T]}\}, \quad i \in \mathbb{E},\ t \le T,\ T \ge 0. \tag{6}$$

Введемо N_t-рахуючий процес для $y(t)$, тобто

$$N_t = \sum_{s \le t} \chi[y(s) \ne y(s-0)]$$

— кількість змін стану процесом $y(t)$ протягом часу t.

Тоді траєкторія процесу $y(t)$, що спостерігається, є множиною пар

$$\tilde{y}^T = \left\{(a_0, \tau_1), (a_1, \tau_2), \ldots, \left(a_{N_t-1}, \tau_{N_t}\right), \left(a_{N_t}, T\right)\right\},$$

де τ_k — момент k-ї зміни стану процесу $y(t)$, а $a_k = y(\tau_k)$, $a_k \in \mathbb{A}$, $k = 0, 1, \ldots,$ — стан, в якому перебував $y(t)$ після k-ї зміни стану до моменту τ_{k+1}.

Теорема 1. *Якщо для процесу* $z(t)$ *виконуються умови* (1) – (4), *то умовні ймовірності* $\tilde{P}_i^*(t)$ *задовольняють систему диференціальних рівнянь*

$$d\tilde{P}_k^*(s) = \left[\sum_{i \in \mathbb{E}} \tilde{P}_i^*(s)\lambda_{ik}(y(s)) + \tilde{P}_k^*(s)\left(\sum_{i \in \mathbb{E}} \tilde{P}_i^*(s)\mu_{y(s)}(i) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \mu_{y(s)}(k)\right)\right] ds + \left(\frac{\tilde{P}_k^*(s-0)\mu_{y(s-0),\,y(s)}(k)}{\sum_{i \in \mathbb{E}} \tilde{P}_i^*(s-0)\mu_{y(s-0),\,y(s)}(i)} - \tilde{P}_k^*(s-0)\right) dN_s, \quad k \in \mathbb{E}, \tag{7}$$

$$dN_s = \begin{cases} 0, & \text{якщо } y(t) = y(t-0); \\ 1, & \text{якщо } y(t) \ne y(t-0), \end{cases}$$

з початковими умовами

$$\tilde{P}_i^*(0) = \frac{q_{i\,y(0)}}{\sum_{k \in \mathbb{E}} q_{k\,y(0)}}, \quad i \in \mathbb{E},\ y(0) \in \mathbb{A},$$

або в інтегральному вигляді

$$\tilde{P}_k^*(t) = \tilde{P}_k^*(0) + \int_0^t \sum_{i \in \mathbb{E}} \tilde{P}_i^*(t)\lambda_{ik}(y(s)) +$$

$$+ \tilde{P}_k^*(s)\left(\sum_{i \in \mathbb{E}} \tilde{P}_i^*(s)\mu_{y(s)}(i) - \mu_{y(s)}(k)\right) ds +$$

$$+ \sum_{\{l:\tau_l \le t\}} \left(\frac{\tilde{P}_k^*(\tau_l - 0)\mu_{y(\tau_l - 0), y(\tau_l)}(k)}{\sum_{i \in \mathbb{E}} \tilde{P}_i^*(\tau_l - 0)\mu_{y(\tau_l - 0), y(\tau_l)}(i)} - \tilde{P}_k^*(\tau_l - 0) \right), \quad i \in \mathbb{E}.$$

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми* 1. *Тоді для будь-яких* $0 \le t \le T$, $t \in (\tau_k, \tau_{k+1})$ — *проміжок неперервності траєкторії* $\tilde{y}^T$, $k = \overline{1, N_T}$, $\tau_{N_T} = T$, *умовні ймовірності* $\tilde{P}_i^*(T, t)$ *задовольняють систему диференціальних рівнянь*

$$d\tilde{P}_i^*(T, s) = \left(\tilde{P}_i^*(T, s) \frac{\sum_{j \ne i} \tilde{P}_i^*(s)\lambda_{ij}(y(s))}{\tilde{P}_i^*(s)} - \right.$$

$$\left. - \sum_{k \ne i} \frac{\tilde{P}_i^*(s)\lambda_{ik}(y(s))\tilde{P}_k^*(T, s)}{\tilde{P}_k^*(s)} \right) ds \tag{8}$$

з початковими умовами

$$\tilde{P}_i^*(T, T) = \tilde{P}_i^*(T), \quad i \in \mathbb{E},$$

де $\tilde{P}_i(t)$ *описані в* (5), *або в інтегральному вигляді*

$$\tilde{P}_i^*(T, t) = \int_t^T \tilde{P}_i^*(T, s) \frac{\sum_{j \ne i} \tilde{P}_i^*(s)\lambda_{ij}(y(s))}{\tilde{P}_i^*(s)} -$$

$$- \sum_{k \ne i} \frac{\tilde{P}_i^*(s)\lambda_{ik}(y(s))\tilde{P}_k^*(T, s)}{\tilde{P}_k^*(s)} ds + \tilde{P}_i^*(T).$$

***Доведення теореми* 1.** Нехай $\xi(t)$, $t \gtrsim 0$, — сепарабельний однорідний ланцюг Маркова з неперервним часом і дискретною множиною станів $\mathbb{E} = \{1, 2, \ldots, N\}$. Перехідна функція процесу $\xi(t)$ —

$$P_{ij}(t) = P\{\xi(t) = j/\xi(0) = i\}.$$

Позначимо через $\xi_n(k)$, $k \ge 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, однорідний ланцюг Маркова з дискретним часом, причому

$$\xi_n(k) = \xi\left(\frac{k}{2^n} t\right), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \ n = 1, 2, \ldots .$$

Тоді $\xi_n(k)$, $k \ge 0$, — однорідний ланцюг Маркова з дискретним часом і матрицею перехідних ймовірностей

$$P_n(i, j) = P\{\xi_n(k+1) = j/\xi_n(k) = i\} = P_{ij}\left(\frac{k}{2^n}\right), \quad i, j \in \mathbb{E}.$$

Нехай

$$P_n(k, i, j) = P\{\xi_n(k) = j/\xi_n(0) = i\}$$

— перехідна ймовірність ланцюга $\xi_n(k)$ за k кроків. Оскільки, як випливає з умов, накладених на процес $\xi(t)$, $t \geq 0$, перехідні функції $P_{ij}(t)$ неперервні, то

$$\lim_{n\to\infty} P_n(2^n, i, j) = \lim_{n\to\infty} P\{\xi_n(2^n) = j/\xi_n(0) = i\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} P\left\{\xi\left(\frac{t2^n}{2^n}\right) = j \,/\, \xi(0) = i\right\} = \lim_{n\to\infty} P_{ij}\left(\frac{t2^n}{2^n}\right) = P_{ij}(t)$$

для будь-якого t і будь-яких $i, j \in \mathbb{E}$.

Нехай

$$\mathfrak{B}_t = \sigma\{\xi(s),\ 0 \leq s \leq t\}$$

— σ-алгебра, породжена значеннями ланцюга $\xi(s)$ на проміжку часу $[0, t]$, і

$$\mathfrak{B}_{n,N_t} = \sigma\{\xi_n(k),\ 0 \leq k \leq N_t\}$$

— σ-алгебра, породжена значеннями ланцюга $\xi_n(k)$ на проміжку $0 \leq k \leq N_t$.

Тоді на підставі сепарабельності процесу $\xi(t)$, як випливає із результатів [5], для будь-якого $t \geq 0$ знайдеться $n = n(t)$ таке, що

$$\mathfrak{B}_{n(t),2^{n(t)}} = \mathfrak{B}_t.$$

Дійсно, із визначення $\xi_n(k)$ випливає, що для будь-якого $k \geq 0$ виконується

$$\mathfrak{B}_{n,2^n} \subseteq \mathfrak{B}_{n+1,2^{n+1}} \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{B}_t.$$

Крім того, існує таке $n = n(k)$, що для всіх $n \geq n(k)$

$$\mathfrak{B}_{n(k),2^{n(k)}} = \mathfrak{B}_t.$$

Зафіксуємо час t і позначимо через η деяку випадкову величину, вимірну відносно σ-алгебри $\mathfrak{B}_t$. Нехай ξ — деяка випадкова величина, така, що $M|\xi| < \infty$. Тоді неважко переконатись у справедливості таких тверджень.

Лема 1. *Якщо виконуються наведені вище умови, то*

$$M\{\xi/\mathfrak{B}_{n,2^n}\} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{м. н.}} M\{\xi/\mathfrak{B}_t\}.$$

Лема 2. *Нехай* ξ_n, $n = 1, 2, \ldots$, *— деяка послідовність випадкових величин, така, що* $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{м. н.}} \xi$, *причому* $|\xi| \leq \eta$ *і* $M\eta < \infty$. *Тоді*

$$M\{\xi_n/\mathfrak{B}_{n,2^n}\} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{м. н.}} M\{\xi/\mathfrak{B}_t\}.$$

Лема 3. *Для будь-яких* $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_m \leq t$ *і* $E_1 \subseteq E$, $E_2 \subseteq E$, $E_3 \subseteq E$, $\ldots, E_m \subseteq E$,; $m \geq 1$ *виконується*

$$\chi[\xi_n([t_1 2^n/t]) \in E_1,\ \xi_n([t_2 2^n/t]) \in E_2, \ldots, \xi_n([t_m 2^n/t]) \in E_m] \xrightarrow[n\to\infty]{\text{м. н.}}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{\text{м. н.}} \chi[\xi(t_1) \in E_1,\ \xi(t_2) \in E_2, \ldots, \xi(t_m) \in E_m],$$

де

$$\chi[A] = \begin{cases} 1, & \text{якщо подія } A \text{ відбулась;} \\ 0 & \text{— у противному разі} \end{cases}$$

— *індикатор події* A.

Нехай тепер $z(t) = (x(t), y(t))$, $t \geq 0$, — випадковий процес, описаний у теоремі 1. Побудуємо послідовність випадкових процессів $z_n(k)$, де $k = 0, 1, \ldots$, з дискретним часом таким чином. Нехай

$$\Delta_n = \frac{t}{2^n}, \quad n = 1, 2, \ldots, \ z_n(k) = z(k\Delta_n), \ k = 0, 1, \ldots . \tag{9}$$

Тоді при будь-якому n $z_n(k)$, $k = 0, 1, \ldots$, утворює однорідний ланцюг Маркова з дискретним часом і матрицею перехідних ймовірностей за один крок

$$P_n = \left\| P_{ia}^{jb} \right\|, \quad i, j \in \mathbb{E}, \ a, b \in \mathbb{A}. \tag{10}$$

Якщо

$$\mathcal{B}^{(n)} = \sigma\{y_n(0), y_n(1), \ldots, y_n(n),\}$$

— σ-алгебра, породжена величинами $\left\{y_n(k), \ k = \overline{0, n}\right\}$, а

$$\tilde{P}_i(k) = P\{x_n(k) = i / \mathcal{B}^{(k)}\},$$

то на підставі сформульованих вище лем

$$\tilde{P}_i(2^n) \xrightarrow[n \to \infty]{м.\,н.} \tilde{P}_i^*(t), \quad i \in \mathbb{E}, \ t \geq 0.$$

Але, як неважко переконатись за індукцією, умовні ймовірності

$$\tilde{P}_{ij}(k) = P\{x_n(k) = j / x_n(0) = i, \ \mathcal{B}^{(k)}\}, \quad i, j \in \mathbb{E}, \ k \leq 2^n,$$

задовольняють рекурентне співвідношення

$$\begin{gathered} \tilde{P}_{ij}(2^n + 1) = \frac{\sum_{k \in \mathbb{E}} \tilde{P}_{ik}(2^n) P_{ka}^{jb}}{\sum_{l \in \mathbb{E}} \sum_{k \in \mathbb{E}} \tilde{P}_{ik}(2^n) P_{ka}^{lb}}, \\ \tilde{P}_i(2^n) = \sum_{k \in \mathbb{E}} q_k \tilde{P}_{ki}(2^n), \end{gathered} \tag{11}$$

з початковими умовами

$$\tilde{P}_{ij}(1) = \frac{P_{ia}^{jb}}{\sum_{k \in \mathbb{E}} P_{ia}^{kb}}, \quad i, j \in \mathbb{E}, \ a, b \in \mathbb{A}, \ k \in \mathbb{E},$$

де

$$P_{ia}^{jb} = P\{z_n(k) = (j, b) / z_n(k-1) = (i, a)\}, \quad i, j \in \mathbb{E}, \ a, b \in \mathbb{A}, \ k = 1, 2, \ldots,$$

$$q_i = P\{z_n(0) = (i, a)\}, \quad (i, a) \in \mathbb{E} \times \mathbb{A}.$$

Використовуючи умови (1) – (4), розглядаючи приріст $\tilde{P}_i(2^n + 1) - \tilde{P}_i(2^n)$, з урахуванням зміни стану процесу $y(t)$ на проміжку часу $(t, t + \Delta_n)$, переходячи до границі при $n \to \infty$, завершуємо доведення теореми 1.

Для доведення теореми 2 знову введемо дискретний ланцюг Маркова $z_n(k)$, $k = 0, 1, \ldots$, згідно з (9) і визначимо крім умовної ймовірності $\tilde{P}_i(n)$ ймовірність

$$\tilde{P}_n^*(k, i) = P\left\{x(k) = i / \mathcal{B}^{(2^n)}\right\}, \quad i \in \mathbb{E}, \ k \leq 2^n. \tag{12}$$

Тоді, як випливає з наведених вище лем, якщо $K_n(s) = [s 2^n / t]$, то

$$\tilde{P}_n^*(K_n(s), i) \xrightarrow[n \to \infty]{м.\,н.} \tilde{P}_i^*(T, s).$$

Але, з іншого боку, якщо позначити

$$\Phi_k(i) = P\{x_n(k) = i,\ y_n(0) = y(0),\ y_n(1) = y(\Delta_n), \ldots, y_n(k) = y(k\Delta_n)\},$$

то для умовної ймовірності $\tilde{P}_n^*(k, i)$, $k = 0, 1, \ldots$, $i \in \mathbb{E}$, можна записати рекурентне рівняння

$$\tilde{P}_n^*(k, i) = \sum_{j \in \mathbb{E}} \tilde{P}_n^*(k+1, j) \frac{P_{iy_n(k)}^{iy_n(k+1)} \Phi_k(i)}{\Phi_{k+1}(i)}, \tag{13}$$

або з використанням введених умовних ймовірностей $\tilde{P}_i^*(n)$

$$\tilde{P}_n^*(k, i) = \sum_{j \in \mathbb{E}} \tilde{P}_n^*(k+1, j) \frac{P_{iy_n(k)}^{iy_n(k+1)} \tilde{P}_i^*(k)}{\sum_{l \in \mathbb{E}} P_{ly_n(k)}^{jy_n(k+1)} \tilde{P}_l^*(k)}, \quad k = \overline{0, 2^n}, \tag{14}$$

з початковою умовою

$$\tilde{P}_n^*(2^n, i) = \tilde{P}_i^*(2^n). \tag{15}$$

Враховуючи умови (1) – (4), а також властивості перехідної ймовірності P_{ia}^{jb}, розглядаючи різницю $\tilde{P}_n^*(K_n(s)+1, i) - \tilde{P}_n^*(K_n(s), i)$, а також приймаючи до уваги траєкторію процесу $y(t)$ на проміжку часу $[K_n(s), K_n(s)+1]$, переходом до границі при $n \to \infty$ одержуємо рівняння (8).

1. *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Статистика случайных процессов. – М.: Наука, 1974. – 696 с.
2. *Mats Rudemo.* State estimation for partially observed Markov chains // J. Math. Anal. and Appl. – 1973. – **44**, № 3. – P. 581 – 611.
3. *Rabiner R.* A tutorial on hidden Markov models and selected applications in speach recognition // Proc. IEEE. – 1989. – **77**, № 2. – P. 86 – 120.
4. *Война О. А.* Умовні марківські процеси та задачі оптимального оцінювання для напівмарківських процесів // Вісн. Київ. ун-ту. – 1993. – № 2. – С. 16 – 27.
5. *Дуб. Дж.* Вероятностные процессы. – М.: Изд-во иностр. лит., 1956. – 605 с.

Одержано 01.07.93