УДК 517.5

Ю. И. Мельник

Прямые теоремы приближения регулярных в выпуклых многоугольниках функций экспоненциальными полиномами в интегральной метрике

1. Пусть $\overline{M}$ — замкнутый выпуклый многоугольник с вершинами в точках $\gamma_1, \ldots, \gamma_N$, $N \geqslant 3$, M — открытая часть $\overline{M}$ и $C = \overline{M} \setminus M$ — граница $\overline{M}$. Через $E^p(M)$, $p \geqslant 1$, обозначим пространство всех регулярных в M функций $f(z)$, для которых

$$\sup_{0<r<1} \int_{C_r} |f(z)|^p |dz| < \infty,$$

где C_r — образ окружности $|w| = r$ при конформном отображении круга $|w| \leqslant 1$ на $\overline{M}$. Известно [1], что любая функция $f \in E^p(M)$ имеет почти всюду на C угловые предельные значения, определяющие функцию (сохраним для нее обозначение $f(z)$), p-я степень модуля которой интегрируема на C. В пространстве $E^p(M)$ вводится норма по формуле

$$\|f\|_p \equiv \|f\|_{E^p(M)} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \left\{\int_C |f(z)|^p |dz|\right\}^{1/p},$$

после чего оно становится банаховым.

В работе доказаны прямые теоремы приближения в метрике пространства $E^p(M)$ функций $f \in E^p(M)$ экспоненциальными полиномами специального вида (см. ниже (1)).

2. Пусть $\mathscr{L}(\lambda) = \sum_{k=1}^{N} d_k \exp(\gamma_k \lambda)$, $d_k \neq 0$, — экспоненциальный полином (квазиполином). В дальнейшем потребуются следующие свойства квазиполинома $\mathscr{L}(\lambda)$ (положительные постоянные, различные в разных выражениях, ниже обозначаются буквами a, A, A_k и т. п.):

а) для достаточно больших λ_0 при $|\lambda| > \lambda_0$ все нули $\mathscr{L}(\lambda)$ простые;

б) для достаточно больших λ_0 при $|\lambda| > \lambda_0$ нули $\mathscr{L}(\lambda)$ (обозначим их через $\lambda_m^{(j)}$) имеют вид $\lambda_m^{(j)} = \mathring{\lambda}_m^{(j)} + \varepsilon_m^{(j)}$, где $\mathring{\lambda}_m^{(j)} = 2\pi m i/(\gamma_{j+1} - \gamma_j) + q_j \times \times \exp(i\alpha_j)$, $|\varepsilon_m^{(j)}| \leqslant A \exp(-am)$, $j = 1, \ldots, N$, $\gamma_{N+1} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \gamma_1$; q_j, α_j—некоторые числа;

в) для фиксированных j, $k \geqslant 0$ и любых $z \in \overline{M}$ имеет место оценка

$$|(\lambda_m^{(j)})^k \exp(\lambda_m^{(j)} z)/\mathscr{L}'(\lambda_m^{(j)}) - (\mathring{\lambda}_m^{(j)})^k (-1)^m B_j \times$$

$$\times \exp\{\mathring{\lambda}_m^{(j)}(z - (\gamma_j + \gamma_{j+1})/2)\}| \leqslant A_k \exp(-am),$$

где $B_j \neq 0$ — некоторые числа.

Свойства а), б) имеются в монографии [2, с. 56], свойство в) выводится на основании изложенного в § 2 гл. 1 той же монографии.

В силу свойства б), множество нулей $\mathscr{L}(\lambda)$ можно представить в виде $\Lambda = \{\lambda_m\}_{m=1}^{m_0} \cup \left(\bigcup_{j=1}^{N} \{\lambda_m^{(j)}\}_{m=m(j)}^{\infty}\right)$, где m_0 и $m(j)$, $j = 1, 2, \ldots, N$,— некоторые фиксированные натуральные числа. Учитывая свойство а), ниже для простоты предполагаем, что нули λ_m, $1 \leqslant m \leqslant m_0$, простые. В работе в качестве агрегатов, приближающих функции $f \in E^p(M)$, используются экспоненциальные полиномы вида

$$\mathcal{P}_n(z) = \sum_{m=1}^{m_0} \varkappa_m^{(n)} \exp(\lambda_m z)/\mathcal{L}'(\lambda_m) + \sum_{j=1}^{N} \sum_{m=m(j)}^{n} \varkappa_{jm}^{(n)} \exp(\lambda_m^{(j)} z)/\mathcal{L}'(\lambda_m^{(j)}), \quad (1)$$

где $\varkappa_m^{(n)}$, $1 \leqslant m \leqslant m_0$, $\varkappa_{jm}^{(n)}$, $j = 1, 2, \ldots, N$; $m = m(j), m(j)+1, \ldots$,— некоторые (комплексные) коэффициенты. Выбор приближающих квазиполиномов в виде (1) объясняется тем фактом, что, как доказано в [3] (см. также [4, 5]), любая функция $f \in E^p(M)$, $1 < p < \infty$, может быть представлена сходящимся в метрике пространства $E^p(M)$ рядом экспонент вида

$$f(z) = \sum_{m=1}^{m_0} \varkappa(f; \lambda_m) \exp(\lambda_m z)/\mathcal{L}'(\lambda_m) + \sum_{j=1}^{N} \sum_{m=m(j)}^{\infty} \varkappa(f; \lambda_m^{(j)}) \exp(\lambda_m^{(j)} z)/\mathcal{L}'(\lambda_m^{(j)}), \quad (2)$$

где

$$\varkappa(f; \lambda_m^{(j)}) = \sum_{k=1}^{N} d_k \int_{\gamma_{jk}} f(\zeta) \exp\{-\lambda_m^{(j)}(\zeta - \gamma_k)\}\, d\zeta, \quad (3)$$

γ_{jk} — часть ломаной C, соединяющая вершины γ_j и γ_k (на которой $0 \leqslant \leqslant \arg\{(\gamma_k - \zeta)/(\gamma_{j+1} - \gamma_j)\} \leqslant \pi$, так что $|\exp\{-\lambda_m^{(j)}(\zeta - \gamma_k\}| \leqslant A$ на γ_{jk}); аналогичные формулы справедливы для коэффициентов $\varkappa(f; \lambda_m)$ (в качестве контура интегрирования в (3) в этом случае может быть взята любая из двух ломаных γ_{1k}, соединяющих вершины γ_1 и γ_k). Таким образом, если определить оператор (взятия частичной суммы ряда (2)) $S_n : E^p(M) \to \to E^p(M)$ соотношением

$$S_n(f)(z) = \sum_{m=1}^{m_0} \varkappa(f; \lambda_m) \exp(\lambda_m z)/\mathcal{L}'(\lambda_m) + \sum_{j=1}^{N} \sum_{m=m(j)}^{n} \varkappa(f; \lambda_m^{(j)}) \exp(\lambda_m^{(j)} z)/\mathcal{L}'(\lambda_m^{(j)}),$$

то при $1 < p < \infty$ $\| f - S_n(f) \|_p \to 0$, $n \to \infty$. Отметим, что оператор S_n имеет свойства: 1) $S_n(\mathcal{P}_n) = \mathcal{P}_n$; 2) $\| S_n \| \equiv \| S_n \|_{E^p(M), E^p(M)} \leqslant \leqslant A_p$ (т. е. $\| S_n(f) \|_p \leqslant A_p \| f \|_p$). Свойство 1 легко доказывается с использованием биортогональной системы функций $\{\psi_\mu(t), \mu \in \Lambda\}$ к системе функций $\{\exp(\mu z), \mu \in \Lambda\}$ [2]; свойство 2 фактически доказано в [4]. С помощью свойств 1, 2 легко доказываются аналоги неравенства Лебега и теоремы М. Риса.

Теорема 1. (Аналог неравенства Лебега и теоремы М. Риса). *Пусть* $\mathcal{E}_n^{(p)}(f)$, $1 < p < \infty$, *— величина наилучшего приближения функции* $f \in E^p(M)$ *квазиполиномами вида* (1): $\mathcal{E}_n^{(p)}(f) = \inf\limits_{\mathcal{P}_n} \| f - \mathcal{P}_n \|_p$.

Тогда

$$\| f - S_n(f) \|_p \leqslant (1 + \| S_n \|) \mathcal{E}_n^{(p)}(f) \leqslant (1 + A_p) \mathcal{E}_n^{(p)}(f). \quad (4)$$

Доказательство. Второе неравенство в (4) является непосредственным следствием свойства 2 оператора S_n, а первое — свойства 1 и того факта, что, как легко видеть, существует (и единствен) квазиполином $\mathcal{P}_n^*(z)$ вида (1) наилучшего приближения функции $f \in E^p(M)$ (для которого $\| f - \mathcal{P}_n^* \|_p = \mathcal{E}_n^{(p)}(f)$):

$$\| f - S_n(f) \|_p \leqslant \| f - \mathcal{P}_n^* \|_p + \| \mathcal{P}_n^* - S_n(f) \|_p \equiv$$
$$\equiv \| f - \mathcal{P}_n^* \|_p + \| S_n(\mathcal{P}_n^* - f) \|_p \leqslant \mathcal{E}_n^{(p)}(f) + A_p \mathcal{E}_n^{(p)}(f).$$

3. В следующей ниже теореме 2 дается оценка сверху скорости сходимости к нулю величины $\| f - S_n(f) \|_p$, $1 < p < \infty$. Для функции $f \in$

$\in E^p(M)$ определим интегральный модуль непрерывности по формуле

$$\omega_p(f; h) = \sup_{|t| \leqslant h} \left\{ \int_0^L |f(z(u+t)) - f(z(u))|^p \, du \right\}^{1/p}, \tag{5}$$

где $z(u)$ — параметрическое уравнение контура C: $z(u) = \gamma_j + (\gamma_{j+1} - \gamma_j)(u - L_{j-1})/l_j$ при $L_{j-1} \leqslant u \leqslant L_j$, $j = 1, \ldots, N$, где $l_j = |\gamma_{j+1} - \gamma_j|$ — длина стороны $[\gamma_j; \gamma_{j+1}]$, $L_0 = 0$, $L_j = \sum_{k=1}^{j} l_k$, $L = L_N = \sum_{k=1}^{N} l_k$. Ясно, что $\omega_p(f; h)$ обладает всеми свойствами (первого) модуля непрерывности (т. е. функция $\omega_p(f; h)$ определена при $h > 0$, возрастает, непрерывна, полуаддитивна и $\omega_p(f; +0) = 0$). Положим далее ($f \in E^p(M)$)

$$\delta_p(f; h) = \sum_{j=1}^{N} \left[\left\{ \int_0^h |f(\gamma_j + (\gamma_{j+1} - \gamma_j)\theta/2\pi)|^p d\theta \right\}^{1/p} + \right.$$

$$\left. + \left\{ \int_{2\pi-h}^{2\pi} |f(\gamma_j + (\gamma_{j+1} - \gamma_j)\theta/2\pi)|^p d\theta \right\}^{1/p} \right], \quad 0 < h < 2\pi. \tag{6}$$

Ясно, что $\delta_p(f; h)$ — непрерывная возрастающая функция при $0 < h < 2\pi$, для которой $\delta_p(f; h) \to 0$, $h \to 0$.

Теорема 2 (прямая). *Пусть $f \in E^p(M)$, $1 < p < \infty$. Тогда*

$$\| f - S_n(f) \|_p \leqslant A_p \{ \omega_p(f; 1/n) + \delta_p(f; 1/n) \}. \tag{7}$$

Доказательство опирается на следующую лемму.

Лемма. *При фиксированном j, $1 \leqslant j \leqslant N$, коэффициенты $\varkappa(f; \lambda_m^{(j)})$, $m \geqslant m(j)$, ряда (2) являются коэффициентами Фурье некоторой функции $F_j \in L^p(0, 2\pi)$, т. е.*

$$\varkappa(f; \lambda_m^{(j)}) = c_m(F_j) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_j(\theta) \exp(-im\theta) \, d\theta.$$

При этом

$$\omega_p(F_j; h) \equiv \omega_{L^p(0,2\pi)}(F_j; h) \leqslant A_p \{ \omega_p(f; h) + \delta_p(f; h) \}, \tag{8}$$

где $\omega_p(F; h) \stackrel{\text{df}}{=} \sup_{|t| \leqslant h} \left\{ \int_0^{2\pi} |F(u+t) - F(u)|^p du \right\}^{1/p}$ — *интегральный модуль непрерывности функции* $F \in L^p(0, 2\pi)$.

Здесь и далее функции, определенные на интервале $(0, 2\pi)$, считаются периодически продолженными на всю ось.

Доказательство. Положим

$$\varkappa_{jm} = \sum_{k=1}^{N} d_k \int_{\gamma_{jk}} f(\zeta) \exp\{ -\overset{0}{\lambda}{}_m^{(j)} (\zeta - \gamma_k) \} \, d\zeta.$$

Из свойства б) квазиполинома легко следует, что утверждение леммы достаточно доказать для последовательности $\{\varkappa_{jm}\}_{m=m(j)}^{\infty}$. Повторяя далее рассуждения работы [5] (см. доказательство предложения 1) и учитывая (5), (6), нетрудно убедиться, что для доказательства последнего утверждения достаточно показать, что при $\operatorname{Re} v > 0$, $\varphi \in L^p(0, 2\pi)$ и

$$\omega_{L^p(0,2\pi)}(\varphi; h) \leqslant A \omega_{E^p(M)}(f; h), \ \ \delta_p'(\varphi; h) \stackrel{\text{df}}{=} \left\{ \int_0^h |\varphi(\zeta)|^p d\zeta \right\}^{1/p} +$$

$$+ \left\{ \int_{2\pi-h}^{2\pi} |\varphi(\zeta)|^p d\zeta \right\}^{1/p} \leqslant A \delta_p(f; h)$$

последовательность

$$d_m \equiv d_m(\varphi) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \int\limits_0^{2\pi} \varphi(\zeta) \exp(-mv\zeta)\, d\zeta, \;\; m \geqslant m(j),$$

является последовательностью коэффициентов Фурье некоторой функции $\tilde{\varphi} \in L^p(0, 2\pi)$, для которой

$$\omega_p(\tilde{\varphi}; h) \leqslant A\{\omega_p(\varphi; h) + \delta_p'(\varphi; h)\}. \tag{9}$$

Отметим, что в [5] доказано, что для любой функции $\Phi \in L^p(0, 2\pi)$ ряд $\tilde{\Phi}(t) = \sum\limits_{m=m(j)}^{\infty} d_m(\Phi) \exp(imt)$ принадлежит $L^p(0, 2\pi)$ и

$$\| \hat{\Phi} \|_p \leqslant A_p \| \Phi \|_p. \tag{10}$$

Для действительного α имеем

$$(1 - \exp\{-nv|\alpha|\}) \int\limits_0^{2\pi} \varphi(u) \exp(-nvu)\, du =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \varphi(u) - \varphi(u - |\alpha|)] \exp(-nvu)\, du +$$

$$+ (1 - \exp\{-2\pi n v\}) \int\limits_0^{|\alpha|} \varphi(u - |\alpha|) \exp(-nvu)\, du,$$

откуда, обозначая через T_α оператор сдвига: $T_\alpha(\varphi)(t) = \varphi(t - \alpha)$, находим

$$\tilde{\varphi}(t + \alpha) - \tilde{\varphi}(t) = \sum_{m=m(j)}^{\infty} d_m(\varphi)(\exp(im\alpha) - 1) \exp(imt) =$$

$$= \sum_{m=m(j)}^{\infty} \{d_m(\varphi)(\exp(-mv|\alpha|) - 1)\} \{(\exp(im\alpha) - 1)/(\exp(-mv|\alpha| -$$

$$- 1)\} \exp(imt) = \sum_{m=m(j)}^{\infty} d_m [T_{|\alpha|}\varphi - \varphi] \mu_m \exp(imt) +$$

$$+ \sum_{m=m(j)}^{\infty} \left\{\int\limits_0^{|\alpha|} \varphi(u - |\alpha|) \exp(-mvu)\, du\right\} \mu_m' \exp(imt), \tag{11}$$

где $\mu_m = (1 - \exp(im\alpha))/(1 - \exp(-mv|\alpha|))$, $\mu_m' = \mu_m(1 - \exp(-2\pi m|v|))$.

Покажем, что μ_m, μ_m' является мультипликаторами в L^p. Действительно, пусть $\tilde{\Phi} \in L^p(0, 2\pi)$, $\tilde{\Phi}(t) = \sum\limits_{m=m(j)}^{\infty} c_m(\tilde{\Phi}) \exp(imt)$. Имеем

$$\mu_{m+1} - \mu_m = \int\limits_m^{m+1} \left(\frac{d}{dx} \frac{1 - \exp(ix\alpha)}{1 - \exp(-xv|\alpha|)} \right) dx.$$

При $m|\alpha| < \varepsilon$, используя разложение экспоненты в степенной ряд, после простых вычислений получаем $\left| \frac{d}{dx} \{(1 - \exp(ix\alpha))/(1 - \exp(-xv|\alpha|))\} \right| \leqslant$ $\leqslant A|\alpha|$, где $A = A(\varepsilon) = \mathrm{const}$ не зависит от $\alpha \in \mathbb{R}$, $x > 0$.

Из двух последних соотношений следует

$$\sum_{m < \varepsilon/|\alpha|} |\mu_{m+1} - \mu_m| \leqslant A. \tag{12}$$

Из (12), учитывая еще, что, как легко видеть, $|\mu_m| \leqslant A$, в силу теоремы Марцинкевича [6, с. 346] находим

$$\Big\| \sum_{m<\varepsilon/|\alpha|} c_m(\tilde{\Phi})\mu_m \exp(imt)\Big\|_p \leqslant A_p' \Big\| \sum_{m<\varepsilon/|\alpha|} c_m(\tilde{\Phi})\exp(imt)\Big\|_p \leqslant A_p \|\tilde{\Phi}\|_p. \quad (13)$$

Пусть теперь $m \geqslant \varepsilon|\alpha|$, $|\alpha|<1$. Положим $\mu_m'' = 1/(1-\exp(-mv|\alpha|))$. С помощью элементарных оценок имеем

$$|\mu_{m+1}'' - \mu_m''| = |1-\exp(-v|\alpha|)|\exp(-m|\alpha|\operatorname{Re} v)/\{|1-\exp(-(m+1)\times$$
$$\times v|\alpha|)||1-\exp(-mv|\alpha|)|\} \leqslant A_\varepsilon|\alpha|\exp\{-m|\alpha|\operatorname{Re} v\},$$

откуда

$$\sum_{m\geqslant\varepsilon/|\alpha|} |\mu_{m+1}''-\mu_m''| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |\mu_{[\varepsilon/|\alpha|]+k+1}'' - \mu_{[\varepsilon/|\alpha|]+k}''| \leqslant$$
$$\leqslant A_\varepsilon|\alpha|\sum_{k=0}^{\infty}\exp\{-([\varepsilon/|\alpha|]+k)|\alpha|\operatorname{Re} v\} \leqslant$$
$$\leqslant A_\varepsilon|\alpha|/(1-\exp(-|\alpha|\operatorname{Re} v)) \leqslant A_\varepsilon \operatorname{Re} v$$

(здесь $[x]$ обозначает целую часть x). Отсюда, учитывая, что $|\mu_m''| \leqslant A_\varepsilon$, и опять используя теорему Марцинкевича, находим

$$\Big\| \sum_{m\geqslant\varepsilon/|\alpha|} c_m(\tilde{\Phi})\mu_m''\exp(imt)\Big\|_p \leqslant A_p' \Big\| \sum_{m\geqslant\varepsilon/|\alpha|} c_m(\tilde{\Phi})\exp(imt)\Big\|_p \leqslant A_p\|\Phi\|_p.$$

Полагая $\tilde{\tilde{\Phi}}_\varepsilon = \sum_{m\geqslant\varepsilon/|\alpha|} c_m(\tilde{\Phi})\mu_m''\exp(imt)$ (так что $c_m(\tilde{\Phi})\mu_m'' = c_m(\tilde{\tilde{\Phi}}_\varepsilon)$), из последнего соотношения получаем

$$\Big\| \sum_{m\geqslant\varepsilon/|\alpha|} c_m(\tilde{\Phi})\mu_m\exp(imt)\Big\|_p = \Big\| \sum_{m\geqslant\varepsilon/|\alpha|} c_m(\tilde{\tilde{\Phi}}_\varepsilon)(1-\exp(im\alpha))\exp imt\Big\|_p =$$
$$= \Big\| \sum_{m\geqslant\varepsilon/|\alpha|} c_m(\tilde{\tilde{\Phi}}_\varepsilon - T_\alpha\tilde{\tilde{\Phi}}_\varepsilon)\exp(imt)\Big\|_p = \|\tilde{\tilde{\Phi}}_\varepsilon - T_\alpha\tilde{\tilde{\Phi}}_\varepsilon\|_p \leqslant$$
$$\leqslant 2\|\tilde{\tilde{\Phi}}_\varepsilon\|_p \leqslant A_p\|\tilde{\Phi}\|_p \quad (14)$$

Из (13), (14) окончательно имеем

$$\Big\| \sum_{m=m(j)}^{\infty} c_m(\tilde{\Phi})\mu_m\exp(imt)\Big\|_p \leqslant \Big\| \sum_{m<\varepsilon/|\alpha|} c_m(\tilde{\Phi})\mu_m\exp(imt)\Big\|_p +$$
$$+ \Big\| \sum_{m\geqslant\varepsilon/|\alpha|} c_m(\tilde{\Phi})\mu_m\exp(imt)\Big\|_p \leqslant A_p\|\tilde{\Phi}\|_p. \quad (15)$$

Учитывая теперь, что $|\mu_{m+1}' - \mu_m'| < |\mu_{m+1}-\mu_m|(1+\exp(-2\pi m\operatorname{Re} v)) + |\mu_{m+1}|\exp(-2\pi m\operatorname{Re} v)(1-\exp(-2\pi\operatorname{Re} v)) \leqslant A(|\mu_{m+1}-\mu_m| + \exp(-am))$, тем же способом находим

$$\Big\| \sum_{m=m(j)}^{\infty} c_m(\tilde{\Phi})\mu_m'\exp(imt)\Big\|_p \leqslant A_p\|\tilde{\Phi}\|_p. \quad (16)$$

При $|\alpha|<h$ из (11), (15), (16), (10) следует

$$\|\tilde{\varphi}(t+\alpha) - \tilde{\varphi}(t)\|_p \leqslant A_\varepsilon''\Big\{\Big\| \sum_{m=m(j)} d_m[T_{|\alpha|}\varphi - \varphi]\exp(imt)\Big\|_p +$$

$$+\Big\| \sum_{m=m(j)}^{\infty} \Big(\int_0^{|\alpha|} \varphi(u-|\alpha|) \exp(-mvu)\, du\Big) \exp(imt) \Big\|_p\Big\} \leqslant$$

$$\leqslant A'_p \Big\{\| T_{|\alpha|}\varphi - \varphi \|_p + \Big[\int_0^{|\alpha|} |\varphi(u-|\alpha|)|^p du\Big]^{1/p}\Big\} \leqslant A_p \{\omega_p(\varphi;\, h) + \delta'_p(\varphi;\, h)\}. \tag{17}$$

Первое неравенство в (17) выполняется на основании (15), (16); второе—на основании (10), где для оценки первого слагаемого положено $\Phi(t) = T_{|\alpha|}(\varphi)(t) - \varphi(t)$, а второго — $\Phi(t) = \mathrm{X}_{|\alpha|}(t)\varphi(t-|\alpha|)$, где $\mathrm{X}_{|\alpha|}(t) = 1$ при $0 \leqslant t \leqslant |\alpha|$ и $\mathrm{X}_{|\alpha|}(t) = 0$ при $|\alpha| < t < 2\pi$, так что

$$\int_0^{|\alpha|} \varphi(u-|\alpha|) \exp(-mvu)\, du = d_m(\Phi);$$

третье неравенство в (17) очевидно. Из (17) следует соотношение (9), а вместе с ним и утверждение леммы.

Следствие. *Ряд* $\sum_{m=m(j)}^{\infty} \varkappa(f;\, \lambda_m^{(j)}) \exp(imt)$ *принадлежит* $L^p(0, 2\pi)$ *и если его сумму обозначить через* $F_j(t)$, *то модуль непрерывности* $F_j(t)$ *удовлетворяет условию* (8).

Доказательство теоремы 2. Представим $f(z)$ в виде

$$f(z) = \sum_{j=1}^{N} \Phi_j(z) + \Phi(z), \tag{18}$$

где

$$\Phi_j(z) = B_j \sum_{m=m(j)}^{\infty} (-1)^m \varkappa(f;\, \lambda_m^{(j)}) \exp\{\overset{0}{\lambda}{}_m^{(j)}(z - (\gamma_j + \gamma_{j+1})/2)\},\ \ j = 1, 2, \ldots, N, \tag{19}$$

$$\Phi(z) = \sum_{m=1}^{m_0} \varkappa(f;\, \lambda_m) \exp(\lambda_m^{(j)} z)/\mathscr{L}'(\lambda_m) + \sum_{j=1}^{N} \sum_{m=m(j)}^{\infty} \varkappa(f;\, \lambda_m^{(j)}) \{\exp(\lambda_m^{(j)} z)/\mathscr{L}'(\lambda_m^{(j)}) -$$

$$- (-1)^m B_j \exp(\overset{0}{\lambda}{}_m^{(j)}(z - (\gamma_j + \gamma_{j+1})/2))\}, \tag{20}$$

и аналогичным образом $S_n(f)(z)$:

$$S_n(f)(z) = \sum_{j=1}^{N} S_n(\Phi_j)(z) + S_n(\Phi)(z), \tag{21}$$

где $S_n(\Phi_j)$, $S_n(\Phi)$ — n-е частичные суммы рядов (19), (20) соответственно. Из (18)—(21) и того факта, что в силу свойства в) квазиполинома $\Phi(z) - S_n(\Phi)(z) = O(\exp(-an))$, $z \in \overline{M}$, для доказательства теоремы достаточно показать, что

$$\| \Phi_j - S_n(\Phi_j) \|_{E^p(M)} \leqslant A_p \{\omega_p(f;\, 1/n) + \delta_p(f;\, 1/n)\},\ \ j = 1, 2, \ldots, N. \tag{22}$$

Имеем

$$\| \Phi_j - S_n(\Phi_j) \|^p_{E^p(M)} \leqslant A''' \int_{\gamma_j}^{\gamma_{j+1}} \Big| B_j \sum_{m=n+1}^{\infty} (-1)^m \varkappa(f;\, \lambda_m^{(j)}) \exp\{\overset{0}{\lambda}{}_m^{(j)}(z -$$

$$- (\gamma_j + \gamma_{j+1})/2)\} \Big|^p |dz| = A''' |B_j| (|\gamma_{j+1} - \gamma_j|/2\pi) | \exp\{q_j \exp(i\alpha_j)(\gamma_{j+1} -$$

$$-\gamma_j)/2\} \left| \int\limits_0^{2\pi} \right| \sum_{m=n+1}^{\infty} \varkappa(f;\ \lambda_m^{(j)}) \exp(im\theta) \Big|^p \left| \exp\{q_j \exp(i\alpha_j)(\gamma_{j+1}-\gamma_j)\,\theta/2\pi\} \right|^p d\theta \leqslant$$

$$\leqslant A'' \int\limits_0^{2\pi} \Big| \sum_{m=n+1}^{\infty} \varkappa(f;\ \lambda_m^{(j)}) \exp(.m\theta) \Big|^p d\theta \leqslant A' \omega^p_{L^p(0,2\pi)}(F_j;\ 1/n) \leqslant$$

$$\leqslant A \{\omega_p(f;\ 1/n) + \delta_p(f;\ 1/n)\}^p. \qquad (23)$$

Первое неравенство в (23) фактически доказано в [4]; второе получается после замены $z = \gamma_j + (\gamma_{j+1} - \gamma_j)\,\theta/2\pi$ с использованием свойства б) квазиполинома; третье очевидно; четвертое неравенство справедливо на основании прямой теоремы приближения в периодическом случае (см., например, [7, с. 137]) с учетом следствия из леммы; последнее неравенство в (23) получено на основании того же следствия. Этим доказано соотношение (22), а вместе с ним и теорема 2.

Замечание. Слагаемое $\delta_p(f;\ 1/n)$ в (7) отбросить, вообще говоря, нельзя. Рассмотрим соответствующий пример. Пусть $p = 2$, $f(z) \equiv 1$, $\mathscr{L}(0) = 1$. Тогда [2, с. 237, 242] $\varkappa(f;\ \lambda_m^{(j)}) = -1/\lambda_m^{(j)}$ и мы имеем

$$\| f - S_n(f) \|_2 = \Big\| \sum_{j=1}^{N} \sum_{m=n+1}^{\infty} (\lambda_m^{(j)})^{-1} \exp(\lambda_m^{(j)} z)/\mathscr{L}'(\lambda_m^{(j)}) \Big\|_2 \asymp$$

$$\asymp \Big\{ \sum_{j=1}^{N} \sum_{m=n+1}^{\infty} |\lambda_m^{(j)}|^{-2} \Big\}^{1/2} \asymp \Big\{ \sum_{m=n+1}^{\infty} m^{-2} \Big\}^{1/2} \asymp 1/\sqrt{n} \qquad (24)$$

здесь запись $a_n \asymp b_n$ означает, как обычно, что $A_1 |a_n| \leqslant |b_n| \leqslant A_2 |a_n|$). Второе соотношение в (24) является аналогом равенства Парсеваля, оно доказано в [8] (см. также [4]); третье соотношение в (24) справедливо в силу свойства б)квазиполинома. С другой стороны, из (5), (6) следует, что в рассматриваемом случае $\omega_2(f;\ h) \equiv 0$, $\delta_2(f;\ h) \asymp h^{1/2}$ и соотношение (7) дает $\| f - S_n(f) \|_{E^2(M)} \leqslant A/\sqrt{n}$.

Теорема 2 допускает следующее естественное обобщение.

Теорема 3. *Пусть* $f^{(r)} \in E^p(M)$, r *натуральное* $1 < p < \infty$, *и выполняются условия*

$$\sum_{k=1}^{N} d_k f^{(q)}(\gamma_k) = 0,\ q = 0,\ 1, \ldots, r-1. \qquad (25)$$

Тогда для любого натурального $s \leqslant r$

$$\| f^{(s)} - S_n(f^{(s)}) \|_{E^p(M)} \leqslant A n^{-r+s} \{\omega_p(f^{(r)};\ 1/n) + \delta_p(f^{(r)};\ 1/n)\}. \qquad (26)$$

Доказательство. Заметим, что в условиях теоремы функции $f^{(q)}(z)$, $q = 0, \ldots, r-1$, непрерывны на $\overline{M}$ (см., например, [9, с. 395]), так что условия (25) имеют смысл. Представим $f^{(s)}(z)$ в виде (18): $\Phi^{(s)}(z) = \sum_{j=1}^{N} \Phi_{js}(z) + \Phi_s(z)$, где $\Phi_{js}(z)$, $\Phi_s(z)$ определяются по формулам (19), (20), в которых $\varkappa(f;\ \lambda_m^{(j)})$ $\varkappa(f;\ \lambda_m)$ следует заменить на $\varkappa(f^{(s)},\ \lambda_m^{(j)})$, $\varkappa(f^{(s)};\ \lambda_m)$. Положим $\sigma_n^{(j,r)}(z) = \Phi_{jr}(z) - S_n(\Phi_{jr})(z)$. По доказанному в теореме 2

$$\| \sigma_n^{(j,r)} \|_p \leqslant A \{\omega_p(f^{(r)};\ 1/n) + \delta_p(f^{(r)};\ 1/n)\}. \qquad (27)$$

Тогда, учитывая, что в условиях теоремы [10] $\varkappa(f^{(s)};\ \lambda_m^{(j)}) = \varkappa(f^{(r)};\ \lambda_m^{(j)})(\lambda_m^{(j)})^{-r+s}$, при любом натуральном Q и $s < r$ имеем

$$\sum_{m=n+1}^{n+Q} \varkappa(f^{(s)};\ \lambda_m^{(j)}) \exp(\lambda_m^{(j)} z)/\mathscr{L}'(\lambda_m^{(j)}) =$$

$$= \sum_{m=n+1}^{n+Q} (\lambda_m^{(j)})^{-r+s} \{\varkappa(f^{(r)}; \lambda_m^{(j)}) \exp(\lambda_m^{(j)} z)/\mathscr{L}'(\lambda_m^{(j)})\} =$$

$$= \sum_{m=n+1}^{n+Q} (\lambda_m^{(j)})^{-r+s} \{\sigma_m^{(j,r)}(z) - \sigma_{m-1}^{(j,r)}(z)\} = -\sigma_n^{(j,r)}(z) (\lambda_{n+1}^{(j)})^{-r+s} +$$

$$+ \sigma_{n+Q}^{(j,r)}(z) (\lambda_{n+Q+1}^{(j)})^{-r+s} + \sum_{m=n+1}^{n+Q} \sigma_m^{(j,r)}(z) \{(\lambda_m^{(j)})^{-r+s} - (\lambda_m^{(j)})^{-r+s}\},$$

откуда, используя (27) и свойство б) квазиполинома, получаем

$$\left\| \sum_{m=n+1}^{n+Q} \varkappa(f^{(r)}; \lambda_m^{(j)}) \exp(\lambda_m^{(j)} z)/\mathscr{L}'(\lambda_m^{(j)}) \right\|_p \leqslant A_1 n^{-r+s} \{\omega_p(f^{(r)}; 1/n) +$$

$$+ \delta_p(f^{(r)}; 1/n)\} + A_2 \sum_{m=n+1}^{n+Q} \{\omega_p(f^{(r)}; 1/m) + \delta_p(f^{(r)}; 1/m)\} (m^{-r+s} -$$

$$- (m+1)^{-r+s}) + A_1 (n+Q-1)^{-r+s} \{\omega_p(f^{(r)}; 1/(n+Q)) +$$

$$+ \delta_p(f^{(r)}; 1/(n+Q))\}.$$

Отсюда, устремляя Q к ∞, находим

$$\|\Phi_{js} - S_n(\Phi_{js})\|_p \leqslant A_1 n^{-r+s} \{\omega_p(f^{(r)}; 1/n) + \delta_p(f^{(r)}; 1/n)\} +$$

$$+ A_2 \sum_{m=n+1}^{\infty} \{\omega_p(f^{(r)}; 1/m) + \delta_p(f^{(r)}; 1/m)\} (m^{-r+s} - (m+1)^{-r+s}) \leqslant$$

$$\leqslant A_1 n^{-r+s} \{\omega_p(f^{(r)}; 1/n) + \delta_p(f^{(r)}; 1/n)\} + A_2 \{\omega_p(f^{(r)}; 1/n) +$$

$$+ \delta_p(f^{(r)}; 1/n)\} \sum_{m=n+1}^{\infty} (m^{-r+s} - (m+1)^{-r+s}) \leqslant A n^{-r+s} \{\omega_p(f^{(r)}; 1/n) +$$

$$+ \delta_p(f^{(r)}; (1/n)\}$$

откуда, как и при доказательстве теоремы 2, следует (26). Теорема доказана.

1. *Привалов И. И.* Граничные свойства аналитических функций.— М.; Л. : Гостехиздат, 1950.— 336 с.
2. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент.— М. : Наука, 1976.— 536 с.
3. *Седлецкий А. М.* Базисы из экспонент в пространствах E^p на выпуклых многоугольниках // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1978.— **42**, № 5.— С. 1101—1119.
4. *Мельник Ю. И.* О рядах Дирихле функций, регулярных в выпуклых многоугольниках // Укр. мат. журн.— 1980.— **32**, № 6.— С. 837—843.
5. *Мельник Ю. И.* Некоторые свойства рядов экспонент, представляющих регулярные в выпуклых многоугольниках функции // Некоторые вопросы аппроксимации функций.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1985.— С. 69—81.
6. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2-х т.— М. : Мир, 1965.— Т. 2.— 537 с.
7. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды.— М. : Наука, 1984.— 495 с.
8. *Левин Б. Я., Любарский Ю. И.* Интерполяция целыми функциями специальных классов и связанные с нею разложения в ряды экспонент // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1975.— **39**, № 3.— С. 657—702.
9. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного.— М.: Наука, 1966.— 628 с.
10. *Мельник Ю. И.* О скорости сходимости рядов экспонент, представляющих регулярные в выпуклых многоугольниках функции / Укр. мат. журн.— 1985.— **37**, № 6.— С. 719—722.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 16.04.87