УДК 517.518

М. В. Лейбов

О сходимости условных средних в норме пространства BMO

1. В настоящей работе будем рассматривать пространство BMO функций, заданных на отрезке $[0, 1]$ вещественной оси, т. е. пространство функций $f \in L_1[0, 1]$, удовлетворяющих условиям

$$\int_0^1 f dm = 0, \quad \|f\|_* = \sup_I \frac{1}{|I|} \int_I |f - f_I| \, dm < \infty.$$

Интегрирование здесь и далее производится по мере Лебега m на $[0, 1]$, верхняя грань берется по всем подынтервалам $I \subset [0, 1]$, $|I|$ обозначает меру Лебега множества I, $f_I = \frac{1}{|I|} \int\limits_I f dm$ [1, с. 224]. Будем рассматривать также введенное в [2] подпространство VMO пространства BMO, состоящее из функций f, для которых

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{|I| \leqslant \varepsilon} \frac{1}{|I|} \int\limits_I |f - f_I| \, dm = 0.$$

Изучение свойств ортонормированных систем функций в пространствах L_p, $1 < p < \infty$, например, базисности, исследование сходимости рядов и т. д. часто существенно облегчается, если рассматриваемая система является последовательностью мартингальных разностей. В этом случае базисность обеспечивается ограниченностью в L_p операторов условного математического ожидания [3] (предложение IV. 3.1), а для сходимости ряда по такой системе достаточно ограниченности в L_p-норме его частичных сумм, образующих мартингал [3] (предложение IV.5.6). Пространство BMO по некоторым свойствам (например, инвариантность относительно преобразования Гильберта) близко пространствам L_p, $1 < p < \infty$. Поэтому естественно рассматривать вопрос о том, насколько «мартингальные» соображения могут оказаться полезными при рассмотрении систем функций в пространстве BMO, т. е. в конечном счете вопрос ограниченности операторов условного математического ожидания и сходимости мартингалов в BMO-норме. Далее, как показывают несложные рассуждения, исследование сходимости мартингалов в BMO-норме сводится к исследованию сходимости последовательностей условных математических ожиданий функции $f \in BMO$ к f в норме BMO. Поскольку каждая функция f из BMO принадлежит $L_1 [0, 1]$, для f и любой σ-алгебры измеримых множеств F на $[0, 1]$ определено условное математическое ожидание $E[f \mid F] \equiv E_F f$.

Ниже будет показано, что в отличие от случая L_p норма оператора E_F, действующего в пространстве BMO, зависит от структуры σ-алгебры F, а сходимость в BMO-норме функций $E[f \mid F_n]$ зависит и от структуры σ-алгебр F_n, и от свойств функции f.

Введем необходимые определения и обозначения. Назовем σ-алгебру F на $[0, 1]$ интервальной, если она порождена конечным или счетным семейством $A = \{I_n\}$ замкнутых интервалов $I_n \subset [0, 1]$, причем $\bigcup I_n = [0, 1]$ и $I_n^0 \cap I_m^0 = \varnothing$, $n \neq m$, где I^0 — внутренность интервала I. Обозначим через $A(F)$ семейство интервалов, порождающее интервальную σ-алгебру F, $\partial F = \bigcup \partial I$, $I \in A(F)$, где $\partial I = I \setminus I^0$, $d(F) = \max\{|I| : I \in A(F)\}$. Для конечной σ-алгебры F обозначим $\delta_0(F) = d(F)/\min\{|I| : I \in A(F)\}$. Положим $\delta(F) = \sup\{|I|/|\mathcal{J}| : I, \mathcal{J} \in A(F), I \cap \mathcal{J} \neq \varnothing\}$ в случае, если ∂F не содержит своих предельных точек; в противном случае $\delta(F) = \infty$.

В дальнейшем будем рассматривать только интервальные σ-алгебры. Это объясняется, с одной стороны, возможностью явной оценки нормы оператора условного математического ожидания относительно σ-алгебры F через величину $\delta(F)$, а с другой — частым появлением интервальных σ-алгебр при изучении конкретных систем функций.

Напомним, что последовательность элементов банахова пространства называется базисной, если она является базисом в своей замкнутой линейной оболочке [4].

2. Теорема 1. *Существуют константы M, $m > 0$, такие, что для любой интервальной σ-алгебры F*

$$m \ln(\delta(F) + 1) \leqslant \| E_F \| \leqslant M \ln(\delta(F) + 1).$$

Заметим, что поскольку оператор E_F замкнут, из теоремы 1 следует, что для любой интервальной σ-алгебры F, $\delta(F) = \infty$, существует функция $f \in BMO$ такая, что $E[f \mid F]$ не принадлежит BMO.

С л е д с т в и е 1. *Пусть* $\{F_n\}$ — *поток интервальных σ-алгебр,* $\{f_n\} \subset BMO$ — *последовательность не равных* 0 (*как элементы пространства* BMO) *мартингальных разностей, согласованная с* $\{F_n\}$. *Если* $\sup \delta(F_n) < \infty$, *то* $\{f_n\}$ — *базисная последовательность в пространстве* BMO.

З а м е ч а н и я. 1. Существуют последовательности мартингальных разностей, не являющиеся в пространстве BMO базисными.

2. Условие $\sup \delta(F_n) < \infty$ не является необходимым для базисности последовательности мартингальных разностей, согласованной с $\{F_n\}$: пусть $\{f_n\}$ — некоторая подпоследовательность системы Хаара, F_n — минимальная интервальная σ-алгебра, относительно которой измеримы $f_1, \ldots, f_n$. Тогда выбором $\{f_n\}$ можно добиться, чтобы $\delta(F_n) \to \infty$, $n \to \infty$. С другой стороны, $\{f_n\}$ является базисной как подпоследовательность базисной последовательности.

Т е о р е м а 2. *Пусть* $f \in BMO$. *Следующие условия эквивалентны*:

1) $f \in VMO$;

2) $\| f - E[f \mid F_n] \|_* \to 0$, $n \to \infty$, *для любого потока интервальных σ-алгебр* $\{F_n\}$, *для которого* $d(F_n) \to 0$, $\sup \delta(F_n) < \infty$;

3) $\| f - E[f \mid F_n] \|_* \to 0$, $n \to \infty$, *для любого потока конечных интервальных σ-алгебр* $\{F_n\}$, *для которого* $d(F_n) \to 0$, $\sup \delta_0(F_n) < \infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) влечет 2), так как непрерывные функции плотны в VMO [2], нормы операторов E_{F_n} ограничены в совокупности и для непрерывной функции f функции $E[f \mid F_n]$ сходятся к f равномерно для потоков, удовлетворяющих условиям п. 2. 2) влечет 3) тривиально. Доказательство импликации 3) ⇒ 1) основывается на следующем утверждении.

Л е м м а 1. *Если* $f \in BMO \setminus VMO$, *то существует* $\varepsilon > 0$ *и последовательность интервалов* $I_n = [x_n, y_n] \subset [0, 1]$ *таких, что* $f_*(I_n) \geqslant \varepsilon$, $\lim x_n = \lim y_n = a$, $2 | I_n | < | I_{n-1} |$ *и выполняется одно из следующих условий*:

a) $x_1 < x_2 < \ldots < a < \ldots < y_2 < y_1$ *и* $2(y_n - x_n) \leqslant \min(x_n - x_{n-1}, y_{n-1} - y_n)$, $n = 1, 2, \ldots$;

b) $x_n = a$, $n = 1, 2, \ldots$, $a < \ldots < y_2 < y_1$ *и* $y_{n-1} - y_n \geqslant 2(y_n - a)$, $n = 1, 2, \ldots$, *либо* $y_n = a$, $n = 1, 2, \ldots$, $x_1 < x_2 < \ldots < a$ *и* $x_n - x_{n-1} \geqslant 2(a - x_n)$, $n = 1, 2, \ldots$;

c) $x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \ldots < a$, $a - x_n \leqslant 2(x_n - y_{n-1})$, $y_n - x_n \leqslant c(a - y_n)$ *либо* $a < \ldots < x_2 < y_2 < x_1 < y_1$, $y_n - a \leqslant 2(x_{n-1} - y_n)$, $y_n - x_n \leqslant c(x_n - a)$ *для некоторого* $c > 0$.

Условие п. 2 теоремы 2 — в некотором смысле слабейшее из условий, характеризующих (в смысле теоремы 2) функции из VMO.

Т е о р е м а 3. *Для любого потока интервальных σ-алгебр* $\{F_n\}$, *удовлетворяющих условию* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \delta(F_n) = \infty$, *существует функция* $f \in VMO$, *для которой*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \| f - E[f \mid F_n] \|_* > 0. \tag{1}$$

Отсюда с учетом теоремы 1 [5] получаем такое следствие.

С л е д с т в и е 2. *Для любой разрывной* (*с точностью до множества меры* 0) *функции* $f \in VMO$ *существует поток конечных интервальных алгебр* $\{F_n\}$, *для которого* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \delta(F_n) = \infty$ *и выполняется неравенство* (1) *и, обратно, для любого потока конечных интервальных алгебр* $\{F_n\}$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \delta(F_n) = \infty$, *существует разрывная функция* $f \in VMO$, *для которой выполняется неравенство* (1).

1. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции. М. : Мир, 1984.— 469 с.
2. *Sarason D.* Functions of vaniching mean oscillation // Trans. Amer. Math. Soc.— 1975.— **207**.— P. 391—405.
3. *Неве Ж.* Математические основы теории вероятностей.— М. : Мир, 1969.— 309 м.
4. *Lindenstrauss J., Tsafriri L.* Classical Banach spaces. 1. Sequence spaces.— Berlin : Springer, 1977.— 190 p.

5. *Лейбов М. В.* Характеризация непрерывных функций в терминах сходимости условных средних в норме пространства *BMO*.— Харьков, 1984.— 12 с. — Деп. ВИНИТИ, № 7690-84.

ВНИИ по охране вод, Харьков

Получено 20.01.86,
после доработки — 19.08.87