УДК 519.41/47

Н. С. Черников

Бесконечные локально конечные простые группы с нетривиальным ядром централизатора элементарной абелевой 2-подгруппы

Основной результат фундаментальной работы Уолтера [1] (первоначально анонсированный им в [2]) — теорема 1, в частности, содержит в себе классификацию конечных простых групп, обладающих элементарной абелевой 2-подгруппой, централизатор которой имеет неединичную инвариантную подгруппу без элементов порядка 2. Наличие этой классификации побудило автора настоящей работы перейти к рассмотрению бесконечных локально конечных простых групп с отмеченным выше свойством централизатора некоторой элементарной абелевой 2-подгруппы. В результате им была получена следующая теорема, анонсированная в [3], доказательство которой излагается ниже.

Теорема. *Пусть G — бесконечная локально конечная простая группа с условием минимальности для 2-подгрупп, обладающая такой элементарной абелевой 2-подгруппой E, что $O(C_G(E)) \neq 1$. Тогда группа G изоморфна группе Шевалле над бесконечным локально конечным полем нечетной характеристики. В случае, когда $|E| = 2$, подгруппа $O(C_G(E))$ является локально циклической.*

В доказательстве теоремы существенно используется то обстоятельство, что ввиду теоремы 1 из [1] все конечные простые группы с отмеченным свойством централизатора некоторой элементарной абелевой 2-подгруппы содержатся среди известных (конечных) простых групп (см., например, [4]). Сама же классификация такого рода групп в доказательстве не используется.

Приведем определения и обозначения, используемые в настоящей работе. Локально конечное поле — это алгебраическое расширение простого конечного поля. Под группами Шевалле понимаются простые группы Шевалле и их скрученные аналоги (см., например, [4]). Элементарная абелева группа — это такая неединичная группа, все отличные от единицы элементы которой имеют один и тот же простой порядок. Линейная группа — это группа, представимая матрицами над каким-либо полем. $C_X(Y)$ — централизатор подгруппы Y в группе X, $|X|$ — порядок конечной группы X, $O(X)$ — ядро группы X, т. е. ее максимальная инвариантная периодическая подгруппа без элементов порядка 2.

Лемма. *Пусть G — нелинейная простая группа и A — какая-нибудь ее конечная или счетная подгруппа. Тогда группа G обладает счетной простой нелинейной подгруппой, содержащей A.*

Доказательство леммы. В силу теоремы Мальцева (см. [5], теорема 1. L. 9) для каждого натурального n в группе G найдется некоторая конечнопорожденная подгруппа B_n, не представимая матрицами степени n ни над каким полем. Рассмотрим подгруппу C, порожденную подгруппами A и B_1, B_2, B_3, ... Нетрудно видеть, что C — счетная нелинейная группа. Так как группа G простая, то подгруппа C содержится в некоторой ее счетной простой подгруппе D (см. [5], доказательство теоремы 4.4 П. Неймана). Очевидно, подгруппа D нелинейна. Лемма доказана.

Из доказательства леммы легко вытекает следующее предложение.

Следствие. *Пусть G — нелинейная простая группа и A — какая-нибудь ее конечная или счетная подгруппа. Тогда группа G обладает локальной системой нелинейных счетных простых подгрупп, содержащих A.*

Доказательство теоремы. Прежде всего заметим, что в группе G все элементарные абелевы 2-подгруппы конечны. Зафиксируем какую-нибудь отличную от единицы конечную подгруппу K группы $O(C_G(E))$.

1. Докажем справедливость теоремы в предположении, что группа G счетна. Ввиду леммы 4.5 из [5] G обладает таким возрастающим рядом $1 = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_i \subset G_{i+1} \subset \ldots \subset \bigcup\limits_{i=0,1,2,\ldots} G_i = G$ конечных подгрупп, для каждого i группа G_{i+1} имеет инвариантную подгруппу N_{i+1}, пересекающуюся по единице с подгруппой G_i, фактор-группа G_{i+1}/N_{i+1} по которой проста.

Покажем, что для некоторого натурального k при каждом $i \geqslant k$ порядок подгруппы N_i нечетен. Обозначим для произвольного $i \geqslant 1$ через B_i подгруппу, порожденную подгруппами N_i, N_{i+1}, N_{i+2}, ... Очевидно, подгруппы B_i, $i = 1, 2, \ldots$, составляют убывающий ряд, пересекаются по единице, и при любом $i > 1$ подгруппа B_i имеет конечный индекс в группе B_1 и инвариантна в ней. Пусть S — какая-нибудь максимальная 2-подгруппа группы B_1. Так как подгруппа S удовлетворяет условию минимальности, а подгруппы $B_i \cap S$, $i = 1, 2, \ldots$, очевидно, составляют в ней убывающий ряд с единичным пересечением членов, то для некоторого натурального k $B_k \cap S = 1$. Отсюда ввиду конечности индекса подгруппы B_k в B_1 следует, что подгруппа S конечна. Пусть C произвольная 2-подгруппа из какой-нибудь подгруппы N_i с $i \geqslant k$, и D — подгруппа, порожденная S и C. По теореме Силова $d^{-1}Sd \supseteq C$ для некоторого $d \in D$. Поскольку подгруппа B_k инвариантна в B_1, то $d^{-1}Sd \cap B_k = 1$ и, значит, $C \cap B_k = C = 1$. Поэтому ввиду произвольности C подгруппа N_i, $i \geqslant k$, имеет нечетный порядок.

Так как подгруппа EK конечна, то для некоторого натурального l при каждом $i \geqslant l$ $EK \subseteq G_i$. Очевидно, при любом $i \geqslant l$ $K \subseteq O(C_{G_i}(E))$. Будем считать далее, что $l \geqslant k$. Покажем, что при каждом $i \geqslant l+1$ фактор-группа G_i/N_i изоморфна одной из известных конечных простых групп. Для произвольной подгруппы X группы G_i, $i \geqslant l+1$, подгруппу XN_i/N_i фактор-группы G_i/N_i обозначим через $\overline{X}$. Ввиду теоремы 1 из [1] достаточно установить, что $O(C_{\overline{G}_i}(\overline{E})) \neq \overline{1}$. Докажем это.

Пользуясь нечетностью порядка подгруппы N_i, нетрудно убедиться в том, что $C_{\overline{G}_i}(\overline{E}) = \overline{C_{G_i}(E)}$. Поэтому, очевидно, $\overline{K} \subseteq O(C_{\overline{G}_i}(\overline{E}))$. Так как $K \subseteq G_{i-1}$ и $G_{i-1} \cap N_i = 1$, то $\overline{K} \neq \overline{1}$. Следовательно, $O(C_{\overline{G}_i}(\overline{E})) \neq \overline{1}$.

Итак, группа G обладает возрастающим рядом $G_l \subset G_{l+1} \subset \ldots \subset G_{l+j} \ldots \subset \bigcup\limits_{j=0,1,2,\ldots} G_{l+j} = G$ конечных подгрупп таким, что для каждого j группа G_{l+j+1} имеет инвариантную подгруппу N_{l+j+1}, пересекающуюся по единице с подгруппой G_{l+j}, фактор-группа G_{l+j+1}/N_{l+j+1} по которой изоморфна одной из известных конечных простых групп.

Теперь, пользуясь предложением 4.7 из [5], учитывая соображения, изложенные в [5, с. 120—121], убеждаемся в следующем: группа G изоморфна группе матриц над некоторым полем F ненулевой характеристики и для некоторого натурального $m \geqslant l+1$ при каждом $i \geqslant m$ фактор-группа G_i/N_i изоморфна группе Шевалле. Поскольку группа G линейна, то для некоторого натурального n ввиду предложения 4.6 из [5] при каждом $i \geqslant n$ подгруппа G_i проста. Таким образом, группа G обладает возрастающим рядом $G_r \subset G_{r+1} \subset \ldots \subset G_{r+j} \subset \ldots \subset \bigcup\limits_{j=0,1,2,\ldots} G_{r+j} = G$, $r = \max(m, n)$ конечных подгрупп, изоморфных группам Шевалле. Далее, характеристика поля F нечетна. Действительно, иначе группа G ввиду леммы 1. L. 3 из [5] удовлетворяла бы условию минимальности для примарных подгрупп и потому в силу следствия 1. L. 5 из [5] обладала бы инвариантной абелевой подгруппой конечного индекса, что невозможно.

Из доказанного ввиду результатов любой из работ [6—9] следует, что группа G изоморфна группе Шевалле над некоторым локально конечным полем нечетной характеристики.

Рассмотрим теперь случай, когда $|E| = 2$. Так как подгруппа G_r изоморфна одной из известных конечных простых групп, то согласно предложению 4.34 из [4] подгруппа $O(C_{G_r}(E))$ циклическая. Но тогда и содержащаяся в $O(C_{G_r}(E))$ подгруппа K циклическая. Следовательно, ввиду произвольности подгруппы K подгруппа $O(C_G(E))$ является локально циклической.

2. Докажем, что группа G счетна. Пусть U — произвольная счетная подгруппа группы G, содержащая подгруппу EK. Подгруппа $O(C_U(E))$ содержит подгруппу K и, значит, отлична от единицы. Поэтому если подгруппа U проста, то согласно п. 1 она линейна. Следовательно, ввиду леммы из настоящей работы группа G линейна. Тогда она, будучи периодической (см. [5], теорема 1. L. 2), счетна. Теорема доказана.

1. *Walter J. H.* The B-conjecture; characterization of Chevalley groups // Mem. Amer. Math. Soc.— 1986.— **61**, № 345.— P. 1—196.
2. *Walter J. H.* The *B*-conjecture: 2-components in finite simple groups // The Santa Cruz Conf. Finite Groups. (Santa Cruz, Calif., 1979): Proc. Symp. Pure Math.— Providence, Rhode Island : Amer. Math. Soc.— 1980.— P. 57—66.
3. *Черников Н. С.* О бесконечных локально конечных группах // VIII Всесоюз. симп. по теории групп (Сумы; 25—27 мая 1982 г.): Тез. докл.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1982.— С. 135—136.
4. *Горенстейн Д.* Конечные простые группы. Введение в их классификацию.— М. : Мир, 1985.— 352 с.
5. *Kegel O. H., Wehrfritz B. A. F.* Locally finite groups.— Amsterdam; London : North-Holland Publ. Co., 1973.— 210 p.
6. *Thomas S.* The classification of simple periodic linear groups // Arch. Math.— 1983.— **41**, N 2.— P. 103—116.
7. *Боровик А. В.* Вложения конечных групп Шевалле и периодические линейные группы // Сиб. мат. журн.— 1983.— **24**, № 6.— С. 26—35.
8. *Беляев В. В.* Локально конечные группы Шевалле // Исследования по теории групп.— Свердловск : УНЦ АН СССР, 1984.— С. 39—50.
9. *Hartley B., Shute G.* Monomorphisms and direct limits of finite groups of Lie type // Quart. J. Math.— 1984.— **35**, N 137.— P. 49—71.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 04.09.86