УДК 519.21

В. Н. Супрун, В. М. Шуренков

Предельное распределение положения в момент выхода из интервала полунепрерывного процесса с отрицательным бесконечным средним

Пусть $\xi(t)$, $t \geqslant 0$,— однородный процесс с независимыми приращениям и отрицательными скачками, такой, что

$$Me^{s[\xi(t)-\xi(0)]} = \exp[tk(s)],$$

где

$$k(s) = as + bs^2 + \int_{-\infty}^{0} \left(e^{sy} - 1 - \frac{sy}{1+y^2}\right) \Pi(dy), \qquad (\,$$

$s \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, а Π — мера на $(-\infty, 0)$.

Тогда $k'(0) = m$ — среднее значение, а $k''(0) = \sigma^2$ — дисперсия пр ращения процесса $\xi(t)$. Будем предполагать, что процесс $\xi(t)$ немонотонны и его траектории непрерывны справа.

В работе [1] изучалось распределение положения процесса $\xi(t)$ в мо мент выхода из интервала в предположении, что среднее значение — и дисперсия приращения — σ^2 конечны, в [2] — при $m = 0$, $\sigma^2 = \infty$ Будем рассматривать ситуацию, когда $m = -\infty$ и

$$k(s) = -s^{\alpha} L(1/s), \quad s \to 0, \qquad (\,$$

где $0 < \alpha < 1$, L — положительная медленно меняющаяся на бесконе ности функция.

Пусть ζ— момент первого выхода процесса $\xi(t)$ из интервала $(0, \infty$ т. е. $\zeta = \inf\{t : \xi(t) \leqslant 0\}$.

Справедлива следующая лемма.

Л е м м а. *Пусть неубывающая при* $x \to \infty$ *функция* $R(x)$ *определена уравнением*

$$\int_0^\infty e^{-sx} R(x)\,dx = \frac{1}{k(s)}, \quad s > 0. \tag{3}$$

Тогда если $m > 0$, *то при* $x > 0$, $z < 0$

$$P_x\{\xi(\zeta) < z\} = R(x)\int_0^\infty e^{-\rho y}\,\Pi(-\infty, z-y)\,dy - \int_0^x R(x-y)\,\Pi(-\infty, z-y)\,dy, \tag{4}$$

где P_x *— условная вероятность при условии* $\xi(0) = x$, ρ *— положительный корень уравнения* $k(s) = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы можно найти в [3]. Далее, в [4] показано, что для $R(x)$ справедливо следующее представление:

$$R(x) = \int_0^x e^{\rho(x-y)} dH(y), \tag{5}$$

где $H(y)$ — неубывающая функция, определяемая соотношением

$$\int_0^\infty e^{-sy} dH(y) = \frac{s-\rho}{k(s)}. \tag{6}$$

Целью статьи является доказательство следующей теоремы.

Т е о р е м а. *Если выполняется условие* (2), *то*

$$\lim_{x\to\infty} P_x\left\{\frac{\xi(\zeta)}{x} < z\right\} = \frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int_0^1 \frac{v^{\alpha-1}}{(1-v-z)^\alpha}\,dv.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учитывая (5), путем несложных выкладок преобразуем (4) к виду

$$P_x\{\xi(\zeta) < z\} = \int_0^x [R(x)\,e^{-\rho y} - R(x-y)]\,\Pi(-\infty, z-y)\,dy +$$

$$+ R(x)\int_x^\infty e^{-\rho y}\Pi(-\infty, z-y)\,dy = \int_0^x\int_{x-y}^x e^{\rho(x-y-v)} dH(v)\,\Pi(-\infty, z-y)\,dy +$$

$$+ \int_0^x e^{\rho(x-v)}\,dH(v)\int_x^\infty e^{-\rho y}\Pi(-\infty, z-y)\,dy = \int_0^x {}^{\rho(x-v)}\,dH(v)\times$$

$$\times \int_{x-v}^\infty e^{-\rho y}\Pi(-\infty, z-y)\,dy.$$

Вводя нормировку и замену переменных в этих интегралах, получаем

$$P_x\left\{\frac{\xi(\zeta)}{x} < z\right\} = \int_0^x e^{\rho(x-v)} dH(v)\,e^{-\rho z}\int_{x-v-z}^\infty e^{-\rho y}\Pi(-\infty, -y)\,dy =$$

$$= \int_0^1 d_v H(vx)\,e^{\rho(1-v-z)x}\int_{x(1-v-z)}^\infty e^{-\rho y}\tilde{\Pi}(y)\,dy, \tag{7}$$

где $\tilde{\Pi}(y) = \Pi(-\infty, -y)$.

Обозначим через $F(x)$ функцию

$$F(x) = e^{\rho x}\int_x^\infty e^{-\rho y}\tilde{\Pi}(y)\,dy. \tag{8}$$

Тогда (7) запишется так:

$$P_x\left\{\frac{\xi(\zeta)}{x}<z\right\}=\int_0^1 d_vH(vx)\,F[x(1-v-z)]. \tag{9}$$

Таким образом, изучение предельного распределения положения процесса $\xi(t)$ в момент выхода из интервала свелось к изучению асимптотического поведения функций $H(x)$, $F(x)$ при $x\to\infty$. В равенстве

$$\frac{k(s)}{s-\rho}=bs+\int_0^\infty(1-e^{-sy})\,dy\int_{-\infty}^{-y}e^{\rho(x+y)}\,d\Pi(x)$$

положим

$$bs+\int_0^\infty(1-e^{-sy})\,\Phi(y)\,dy=\Psi(s),\quad \Phi(y)=\int_{-\infty}^{-y}e^{\rho(x+y)}\,d\Pi(x).$$

Из (6) получаем $k(s)/(s-\rho)=\Psi(s)$. В силу (2) функция $\Psi(s)$ имеет вид $\Psi(s)\sim\frac{1}{\rho}\,s^\alpha L\left(\frac{1}{s}\right)$, $s\to 0$. Отсюда и из тауберовой теоремы (см. [5, с. 501]) находим асимптотическое представление для функции H, т. е.

$$H(x)\sim\frac{\rho x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}L^{-1}(x),\quad x\to\infty, \tag{10}$$

где $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция Эйлера.

Из (8) следует, что функцию $F(x)$ можно представить в виде

$$F(x)=\frac{1}{\rho}\tilde\Pi(x)-\frac{1}{\rho}e^{\rho x}\int_x^\infty e^{-\rho y}d\tilde\Pi(y). \tag{11}$$

С другой стороны, путем несложных преобразований получаем

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{-x}e^{\rho(x+y)}\,d\Pi(y)=e^{\rho x}\int_x^\infty e^{-\rho y}d\tilde\Pi(y). \tag{12}$$

Сравнивая теперь (11) и (12), имеем

$$F(x)=\frac{1}{\rho}\tilde\Pi(x)-\frac{1}{\rho}\Phi(x). \tag{13}$$

Из (2) находим

$$\int_0^\infty e^{-sx}\tilde\Pi(x)\,dx\sim s^{\alpha-1}L\left(\frac{1}{s}\right),\quad s\to 0$$

и поскольку $\tilde\Pi$ монотонна, по тауберовой теореме получаем $\tilde\Pi(x)\sim\frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\times L(x)$, $x\to\infty$. Далее, для как угодно малого ε, $1>\varepsilon>0$,

$$\int_{x(1-\varepsilon)}^x\Phi(t)\,dt\geqslant\frac{1-e^{-\rho x\varepsilon}}{\rho}\Phi(x).$$

Так как

$$\lim_{x\to\infty}\{\Phi(x)-\Phi[x(1-\varepsilon)]\}\frac{x^\alpha\rho\Gamma(1-\alpha)}{L(x)}=\alpha\int_{(1-\varepsilon)}u^{-\alpha-1}du,$$

то

$$\rho\Gamma(1-\alpha)\,\overline{\lim_{x\to\infty}}\,\Phi(x)\frac{x^\alpha}{L(x)}\leqslant\alpha\int_{1-\varepsilon}^1u^{-\alpha-1}du.$$

В силу произвольности $\varepsilon>0$ получаем

$$\frac{x^\alpha}{L(x)}\Phi(x)\to 0,\quad x\to\infty,$$

а это означает, что для функции $F(x)$ при $x \to \infty$ справедливо асимптотическое представление

$$F(x) \sim \frac{1}{\rho\Gamma(1-\alpha)} x^{-\alpha} L(x). \tag{14}$$

Подставляя теперь (10) и (14) в (9), получаем

$$P_x\left\{\frac{\xi(\zeta)}{x} < z\right\} = \int_0^1 d_v \left[\frac{x^\alpha v^\alpha \rho}{\Gamma(1+\alpha) L(xv)}\right] \frac{L[x(1-v-z)]}{\rho\Gamma(1-\alpha) x^\alpha (1-v-z)^\alpha} \approx$$

$$= \frac{\alpha}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 \frac{v^{\alpha-1}}{(1-v-z)^\alpha} \frac{L[x(1-v-z)]}{L(xv)} dv.$$

Совершая в этом равенстве предельный переход при $x \to \infty$ и используя свойства медленно меняющихся функций, окончательно имеем

$$\lim_{x\to\infty} P_x\left\{\frac{\xi(\zeta)}{x} < z\right\} = A \int_0^1 \frac{v^{\alpha-1}}{(1-v-z)^\alpha} dv,$$

где $A = \dfrac{\alpha}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1-\alpha)} = \dfrac{\sin \pi\alpha}{\pi}$. Теорема доказана.

1. *Супрун В. Н.* О величине первого перескока через нулевой уровень для однородного процесса с независимыми приращениями и скачками одного знака // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1976.— № 4.— С. 317—320.
2. *Супрун В. Н., Шуренков В. М.* Предельное распределение положения в момент выхода из интервала полунепрерывного процесса с независимыми и приращениями с нулевым средним и бесконечной дисперсией // Укр. мат. журн.— 1980.— **32**, № 2.— С. 262—264.
3. *Королюк В. С., Супрун В. Н., Шуренков В. М.* Метод потенциала в граничных задачах для процессов с независимыми приращениями и скачками одного знака // Теория вероятностей и ее применения.— 1976.— **22**, № 2.— С. 419—425.
4. *Шуренков В. М.* Предельное положение момента выхода и положения в момент выхода из широкого интервала для процессов с независимыми приращениями и скачками одного знака // Там же.— 1978.— **24**, № 2.— С. 419—425.
5. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения : В 2-х т.— М. : Мир, 1984.— Т. 2.— 752 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев
Получено 10.06.86