УДК 517.926

И. Н. Грод

Непрерывная зависимость от параметров ограниченного решения дифференциального уравнения Риккати

Рассмотрим матричное уравнение Риккати с параметром

$$dL/dt = LA(t, \lambda)L + LB_1(t, \lambda) + B_2(t, \lambda)L + D(t, \lambda), \tag{1}$$

где $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2] = \mathcal{J}$, $t \in R$, $A(t, \lambda)$, $B_1(t, \lambda)$, $B_2(t, \lambda)$, $D(t, \lambda)$ — прямоугольные матрицы размерности соответственно $k \times (n-k)$, $k \times k$, $(n-k) \times (n-k)$, $(n-k) \times k$, элементы которых — непрерывные функции в области $R \times \mathcal{J}$ и ограничены в этой области, L — неизвестная прямоугольная матрица.

Теорема. *Пусть матрицы $A(t, \lambda)$, $D(t, \lambda)$, $B_i(t, \lambda)$, $i = 1, 2$, удовлетворяют условию*

$$|\langle B_1(t, \lambda)\eta_1, \eta_1\rangle + \langle [D(t, \lambda) + A^T(t, \lambda)]\eta_1, \eta_2\rangle + \\ + \langle B_2(t, \lambda)\eta_2, \eta_2\rangle| \geqslant \gamma_0(\|\eta_1\|^2 + \|\eta_2\|^2), \tag{2}$$

где γ_0 — положительная постоянная, не зависящая от $t \in R$, $\lambda \in \mathcal{J}$, $\eta_1 \in R^k$, $\eta_2 \in R^{n-k}$, $0 < k < n$, $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ — обычное скалярное произведение в R^n, $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$.

Тогда уравнение (1) *имеет единственное решение, удовлетворяющее неравенству*

$$\|L^*(t, \lambda)\| < 1 \tag{3}$$

при всех $t \in R$, $\lambda \in \mathcal{J}$, где норма матрицы L^* рассматривается в операторном смысле: $\|L^*\| = \max_{\|x\|=1} \|L^*x\|$. Более того, это решение $L = L^*(t, \lambda)$ непрерывно зависит от параметра $\lambda \in \mathcal{J}$ и существует положительное фиксированное число ε_0, не зависящее от $\lambda \in \mathcal{J}$ и $t \in R$, что $\|L^*(t, \lambda)\| \leqslant 1 - \varepsilon_0$, $\varepsilon_0 \in]0, 1[$.

Доказательство. Для доказательства рассмотрим вспомогательную систему линейных дифференциальных уравнений

$$dx/dt = -B_1(t, \lambda)x - A(t, \lambda)z, \\ dz/dt = D(t, \lambda)x + B_2(t, \lambda)z, \tag{4}$$

где $y = (x_1, x_2, \ldots, x_k, z_1, \ldots, z_{n-k}) \in R^n$.

Заметим, что условие (2) обеспечивает существование квадратической формы, производная от которой вдоль системы (4) знакоопределена. Следовательно, при выполнении условия (2) для системы (4) существуют k линейно независимых решений $\begin{pmatrix} x_t^i(\lambda) \\ z_t^i(\lambda) \end{pmatrix}$ $i = \overline{1, k}$, которые экспоненциально стремятся к 0 при $t \to \infty$ с порядком стремления γ, где $0 < \gamma < \gamma_0$. Для этих решений каждому числовому вектору $x_{t_1}(\lambda_0)$ единственным образом ставится в соответствие числовой вектор $z_{t_1}(\lambda_0)$, иначе говоря, существует матричная функция $L^*(t, \lambda)$ такая, что $z_t^i(\lambda) = L^*(t, \lambda)\, x_t^i(\lambda)$. Оказывается, что матричная функция $L^*(t, \lambda)$ не зависит от выбора вектора $x_t(\lambda)$. Заметим, что система вектор-функций $\{x_t^i(\lambda)\}_{i=1}^k$ линейно независима.

Действительно, в противном случае найдутся постоянные ν_i, $i = \overline{1, k}$, такие, что $\sum_{i=1}^k \nu_i x_{t_0}^i(\lambda_0) = 0$ при некотором t_0 и $\lambda_0 \in \mathcal{J}$. Теперь рассмотрим решение системы (4)

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_t(\lambda_0) \\ \tilde{z}_t(\lambda_0) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^k \nu_i \begin{pmatrix} x_i(\lambda_0) \\ z_i(\lambda_0) \end{pmatrix}.$$

Оно экспоненциально убывает на $+\infty$ (как сумма экспоненциально убывающих), а это противоречит условию (2), так как $\tilde{x}_{t_0}(\lambda_0) = 0$, а $\|\tilde{z}_{t_0}(\lambda_0)\| \neq \neq 0$.

Ясно, что матричная функция $x_t(\lambda) = (x_t^1(\lambda), \ldots, x_t^k(\lambda))$ является фундаментальной матрицей решений линейной системы

$$dx/dt = [-B_1(t, \lambda) - A(t, \lambda)\, L^*(t, \lambda)]\, x. \tag{5}$$

Следовательно, $\forall\, t \in (-\infty, +\infty)$ определена матрица $x_t^{-1}(\lambda)$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что функция $L^*(t, \lambda) = z_t(\lambda)\, x_t^{-1}(\lambda)$, где $z_t(\lambda) = (z_t^1(\lambda), \ldots, z_t^{n-k}(\lambda))$, является решением уравнения

$$dL/dt = LA(t, \lambda)\, L + LB_1(t, \lambda) + B_2(t, \lambda)\, L + D(t, \lambda).$$

Покажем, что

$$\max_{\|\eta\|=1} \|L^*(t, \lambda)\, \eta\| < 1. \tag{6}$$

Можно показать, что если $\begin{pmatrix} x_t^0(\lambda) \\ L(t, \lambda)\, x_t^0(\lambda) \end{pmatrix}$ — экспоненциально убывающее решение системы (4), то

$$\|L(t, \lambda)\, x_t^0(\lambda)\| < \|x_t^0(\lambda)\|. \tag{7}$$

Пусть для некоторого $j^* \neq 0$ найдется такое t_1, что выполняется неравенство

$$\|L(t_1, \lambda)\, \xi^*\| > \|\xi^*\|. \tag{8}$$

Разложим вектор ξ^* по базису $\{x_{t_1}^i(\lambda)\}_{i=1}^k$: $\xi^* = \sum_{i=1}^k \mu_i x_{t_1}^i$ и рассмотрим следующее решение системы (4):

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_t(\lambda) \\ L(t, \lambda)\, \tilde{x}_t(\lambda) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^k \mu_i \begin{pmatrix} x_t^i(\lambda) \\ L(t, \lambda)\, x_t^i(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Это решение экспоненциально убывает к нулю при $t \to +\infty$ и для него не выполняется (7), что приводим к противоречию. Этим доказывается неравенство (6).

Далее покажем, что если некоторое решение $L(t, \lambda)$ уравнения (1) обладает свойством (6), то оно единственно.

Пусть $L(t, \lambda)$ — решение уравнения (1), обладающее свойством (6). Тогда из системы (5) получаем k линейно независимых решений $\{x_t^i\}_{i=1}^k$. Учитывая условия (2) и свойство (6), получаем k линейно независимых решений $\begin{pmatrix} x_t^i \\ L_t x_t^i \end{pmatrix}$, $i = \overline{1, k}$, экспоненциально убывающих на $+\infty$.

Пусть $\tilde{L}(t, \lambda)$ — решение уравнения (1), обладающее свойством (6). Как известно, этому решению отвечает k линейно независимых решений $\begin{pmatrix} \tilde{x}_t^i \\ L_t x_t^i \end{pmatrix}$, $i = \overline{1, k}$, системы (4), убывающих при $t \to +\infty$.

Очевидно, существует невырожденная матрица $T(\lambda)$ размера $k \times k$ такая, что

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_t^i(\lambda) \\ L(t, \lambda)\tilde{x}_t^i(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_t^i(\lambda) \\ L(t, \lambda)\, x_t^i(\lambda) \end{pmatrix} T(\lambda), \quad i = \overline{1, k}.$$

Таким образом, $\tilde{L}(t, \lambda) = \tilde{z}_t \tilde{x}_t^{-1} = L_t x_t T (x_t T)^{-1} = L(t, \lambda)$, что требовалось доказать.

Перейдем к доказательству непрерывной зависимости от параметра λ ограниченного решения $L = L^*(t, \lambda)$ уравнения (1).

Известно [3], что при выполнении условия (2) существует функция Грина задачи про ограниченные решения для системы (4) вида

$$G(t, \tau, \lambda) = \begin{cases} \Omega_0^t P \Omega_\tau^0, & t \geqslant \tau, \\ \Omega_0^t (P - I)\, \Omega_\tau^0, & t < \tau, \end{cases} \tag{9}$$

где $P(\lambda)$ — проектор ($P^2 = P$) такой, что обеспечивается выполнение неравенства

$$\| G(t, \tau, \lambda) \| \leqslant K_2 \exp\{-\gamma_2 |t - \tau|\}. \tag{10}$$

Здесь k_2, γ_2 — const > 0.

Система (4) экспоненциально дихотомична, т. е. евклидово пространство R^n представляется в виде прямой суммы двух подпространств $E^+(\lambda)$ и $E^-(\lambda)$, зависящих от параметра λ, таких, что

$$\| \Omega_0^t(\lambda)\, x^+ \| \leqslant K_1 \| \Omega_0^\tau(\lambda)\, x^+ \| \exp\{-\gamma_1(t - \tau)\}, \quad t \geqslant \tau, \; x^+ \in E^+(\lambda),$$

$$\| \Omega_0^t(\lambda)\, x^- \| \leqslant K_1 \| \Omega_0^\tau(\lambda)\, x^- \| \exp\{-\gamma_1(\tau - t)\}, \quad t < \tau, \; x^- \in E^-(\lambda),$$

K_1, $\gamma_1 =$ const > 0, $\Omega_0^t(\lambda)$ — нормальная фундаментальная матрица решений системы (4). Учитывая, что $\Omega_0^t P \xrightarrow{t \to \infty} 0$, $\Omega_0^t (P - I) \xrightarrow{t \to -\infty} 0$, нетрудно выписать общий вид проектора P:

$$P = \begin{pmatrix} [I_k - \hat{L}(0, \lambda) L(0, \lambda)]^{-1} \tilde{E} \\ L(0, \lambda)[I_k - \hat{L}(0, \lambda) L(0, \lambda)]^{-1} - \tilde{\tilde{E}} \end{pmatrix}, \tag{11}$$

где $\tilde{E} = (I_k, 0)$ и $\tilde{\tilde{E}} = (0, I_k)$, $\hat{L}(t, \lambda)$ — решение уравнения

$$d\hat{L}/dt = -[LD(t, \lambda)L + B_1(t, \lambda)L + LB_2(t, \lambda) + A(t, \lambda)]$$

такое, что $\sup\limits_{\|\zeta\|=1} \| \hat{L}(t, \lambda)\, \zeta \| < 1 \; \forall t \in R$. Из неравенства (10) следует непрерывность функции Грина по параметру.

Действительно, рассмотрим разность $G(t, 0, \lambda) - G(t, 0, \bar{\lambda})$ и запишем тождество

$$G(t, 0, \lambda) - G(t, 0, \bar{\lambda}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(t, \sigma, \lambda)\, [\tilde{A}(\sigma, \lambda) - \tilde{A}(\sigma, \bar{\lambda})]\, G(\sigma, 0, \lambda)\, d\sigma.$$

Отсюда получаем

$$\| G(t, 0, \lambda) - G(t, 0, \bar{\lambda}) \| \leqslant K_2^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \| \tilde{A}(\sigma, \lambda) - \tilde{A}(\sigma, \bar{\lambda}) \| e^{-\gamma|\sigma|} d\sigma = H(\lambda, \bar{\lambda}),$$

где $\tilde{A}(t, \lambda) = \begin{pmatrix} -B_1(t, \lambda) & -A(t, \lambda) \\ D(t, \lambda) & B_2(t, \lambda) \end{pmatrix}$.

В силу ограниченности матричной функции $\tilde{A}(t, \lambda)$ интеграл справа сходится равномерно. Поэтому функция $H(\lambda, \bar{\lambda})$ является непрерывной по λ, причем $H(\bar{\lambda}, \bar{\lambda}) = 0$.

Таким образом, функция $G(t, 0, \lambda)$ является непрерывной по параметру λ, а значит, непрерывной будет и соответствующая матрица проектирования $P(\lambda) = \Omega_t^0(\lambda) G(t, 0, \lambda)$, $t > 0$. Учитывая структуру матрицы проектирования, делаем вывод, что $L(0, \lambda)$ непрерывно зависит от λ. Теорема доказана.

1. *Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике.— М. : Наука, 1973.— 512 с.
2. *Митропольский Ю. А.* Об исследовании интегрального многообразия для систем нелинейных уравнений с переменными коэффициентами // Укр. мат. журн.— 1958.— **10**, № 3.— С. 270—279.
3. *Самойленко А. М., Кулик В. Л.* К вопросу о существовании функции Грина задачи об инвариантном торе // Там же.— 1975.— **27**, № 3.— С. 348—359.
4. *Курина Г. А.* Об операторном уравнении Риккати не разрешенном относительно производной // Дифференц. уравнения.— 1986.— **22**, № 10.— С. 1917—1921.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 30.11.87