УДК 517.968.2

С. Аширов, Я. Д. Мамедов

Об одном интегральном уравнении типа Вольтерра

Рассмотрим интегральное уравнение

$$x(t) = x_0 + \int_{-t}^{t} K[t, s; x(s)]\, ds, \quad -1 \leqslant t \leqslant 1. \tag{1}$$

Заметим, что начальная задача $x'(t) = f[t, x(t)] + f[-t, x(-t)]$, $x(0) = x_0$ эквивалентна интегральному уравнению $x(t) = x_0 + \int_{-t}^{t} f[s, x(s)]\, ds$, которое является частным случаем уравнения (1).

Далее заметим, что интегральное уравнение (1) не приводится к обычному интегральному уравнению Вольтерра, а приводится к уравнению

$$x(t) = x_0 + \int_0^t K[t, s; x(s)]\, ds + \int_0^t K[t, -s; x(-s)]\, ds,$$

которое, естественно, требует специального исследования.

В настоящей статье находятся достаточные условия для однозначной разрешимости уравнения (1) и сходимости различных приближений к этому решению.

1. Сначала докажем следующую теорему об интегральных неравенствах.

Теорема 1. *Пусть непрерывная неотрицательная функция* $v(t)$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$, *удовлетворяет интегральному неравенству*

$$v(t) \leqslant C + \mathscr{L} \int_{-t}^{t} (\operatorname{sign} t)\, v(s)\, ds, \quad -1 \leqslant t \leqslant 1,$$

где $\mathscr{L} = \mathrm{const} \geqslant 0$, $C = \mathrm{const}$.

Тогда $v(t) \leqslant C \exp(2\mathscr{L}|t|)$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$.

Доказательство. Построим последовательность функций $u_n(t)$:

$$u_n(t) = C + \mathscr{L} \int_{-t}^{t} (\operatorname{sign} t)\, u_{n-1}(s)\, ds, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad u_0(t) = \max_{-1 \leqslant t \leqslant 1} v(t). \tag{2}$$

Докажем, что

$$v(t) \leqslant u_n(t), \quad -1 \leqslant t \leqslant 1, \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{3}$$

Из определения $v(t)$ следует справедливость (3) при $n = 0$. Допустим, что $v(t) \leqslant u_{n-1}(t)$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$. Тогда

$$v(t) \leqslant C + \mathscr{L} \int_{-t}^{t} (\operatorname{sign} t)\, v(s)\, ds \leqslant C + \mathscr{L} \int_{-t}^{t} (\operatorname{sign} t)\, u_{n-1}(s)\, ds = u_n(t).$$

Применяя метод математической индукции, убеждаемся в справедливости (3).

Очевидно, что $u_n(t) = C \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(2\mathscr{L}\,|t|)^i}{i!} + u_0 \frac{(2\mathscr{L}\,|t|)^n}{n!}$ и, следовательно,

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n(t) = C\exp(2\mathscr{L}|t|)$. Переходя к пределу в (3) при $n\to\infty$, получаем утверждение теоремы.

2. Для решения уравнения (1) приближения построим по методу Тонелли [1]

$$x_n(t) = x_0, \quad -1/n \leqslant t \leqslant 1/n,$$

$$x_n(t) = x_0 + \int\limits_{-t+\operatorname{sign} t/n}^{t-\operatorname{sign} t/n} K[t, s; x_n(s)]\, ds, \quad -1\leqslant t\leqslant -1/n, \quad 1/n\leqslant t\leqslant 1. \quad (4)$$

Теорема 2. *Пусть* $K(t, s; x)$, $-1\leqslant t,\ s\leqslant 1$, $|x - x_0|\leqslant r$,— *непрерывная функция и*

$$2M\leqslant r, \quad M = \max_{\substack{-1\leqslant t,s\leqslant 1\\ |x-x_0|\leqslant r}} |K(t, s; x)|. \quad (5)$$

Пусть, кроме того, выполнено условие

$$\lim_{t_2\to t_1}\int\limits_{-t_1}^{t_1} |K[t_2, s; x(s)] - K[t_1, s; x(s)]|\, ds = 0, \quad -1\leqslant t_1, \quad t_2\leqslant 1, \quad (6)$$

при всех $x(t)$ $(|x(t) - x_0|\leqslant r)$.

Тогда существует хотя бы одно решение уравнения (1), *определенное на* $[-1, 1]$.

Доказательство. Очевидно, что

$$|x_n(t) - x_0|\leqslant r, \quad -1\leqslant t\leqslant 1. \quad (7)$$

Действительно, из (4) имеем $|x_n(t) - x_0|\leqslant 2M(t - 1/n)\leqslant 2M\leqslant r$ при $1/n\leqslant t\leqslant 1$ и $|x_n(t) - x_0|\leqslant -2M(t + 1/n)\leqslant 2M\leqslant r$ при $-1\leqslant t\leqslant -1/n$.

Из (7) следует, что последовательность функций $\{x_n(t)\}$ имеет смысл и семейство функций $\{x_n(t)\}$ равномерно ограниченно.

Докажем, что это семейство равностепенно непрерывно. Пусть t_1, $t_2\in[-1, 1]$. Тогда

$$|x_n(t_2) - x_n(t_1)| = \Big|\int\limits_{-t_2+1/n}^{t_2-1/n} K[t_2,s;x_m(s)]\, ds - \int\limits_{-t_1+1/n}^{t_1-1/n} K[t_1, s; x_n(s)]\, ds\Big| \leqslant$$

$$\leqslant\Big|\int\limits_{-t_1+1/n}^{t_1-1/n}\{K[t_2, s; x_n(s)]\, ds - K[t_1, s; x_n(s)]\}\, ds\Big| +$$

$$+\Big|\int\limits_{-t_2+1/n}^{-t_1+1/n} K[t_2, s; x_n(s)]\, ds\Big| + \Big|\int\limits_{t_1-1/n}^{t_2-1/n} K[t_2, s; x_n(s)]\, ds\Big|\leqslant(\operatorname{sign} t_1)\times$$

$$\times\int\limits_{-t_1}^{t_1}|K[t_2, s; x_n(s)] - K[t_1, s; x_n(s)]|\, ds + 2M|t_2 - t_1|.$$

Отсюда с учетом условия (6) получаем, что семейство функций $\{x_n(t)\}$ равностепенно непрерывно на $[-1, 1]$.

Из равномерной ограниченности и равностепенной непрерывности $\{x_n(t)\}$ следует, что существует подпоследовательность $\{x_{nk}(t)\}$, которая сходится при $k\to\infty$ равномерно. Тогда

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_{-t+\operatorname{sign} t/n_k}^{t-\operatorname{sign} t/n_k} K[t, s; x_{n_k}(s)]\, ds = \int\limits_{-t}^{t} K[t, s; x(s)]\, ds.$$

Учитывая это, из (4) получаем, что предел подпоследовательности $\{x_{n_k}(t)\}$ является решением уравнения (1). Теорема доказана.

Из доказанной теоремы видно, что если дополнительно предполагать, что решение уравнения (1) единственно, то к этому решению будут сходиться приближения Тонелли — (4).

3. Докажем следующую теорему единственности.

Теорема 3. *Пусть функция* $K(t, s; x)$, $-1 \leqslant t, s \leqslant 1$, $|x - x_0| \leqslant r$, *удовлетворяет условию Липшица*

$$|K(t, s; x) - K(t, s; y)| \leqslant \mathcal{L}\,|x - y|. \qquad (8)$$

Тогда решение уравнения (1) (*если оно существует*) *единственно.*

Доказательство очевидно. Действительно, допустим, что уравнение (1) имеет два решения $x^*(t)$ и $y^*(t)$. Тогда

$$|x^*(t) - y^*(t)| \leqslant \int_{-t}^{t} (\operatorname{sign} t)|K[t, s; x^*(s)] - K[t, s; y^*(s)]|\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \mathcal{L} \int_{t}^{-t} (\operatorname{sign} t)|x^*(s) - y^*(s)|\,ds.$$

Введя обозначение $v(t) = |x^*(t) - y^*(t)|$, получим

$$v(t) \leqslant \mathcal{L} \int_{-t}^{t} (\operatorname{sign} t)\, v(s)\,ds.$$

Отсюда на основании теоремы 1 имеем $v(t) \equiv 0$.

4. Из теорем 2, 3 следует, что при выполнении условий этих теорем уравнение (1) имеет единственное решение и это решение является пределом приближений Тонелли. Однако следующая теорема показывает, что эти факты имеют место при меньших ограничениях.

Теорема 4. *Пусть непрерывная функция* $K(t, s; x)$, $-1 \leqslant t, s \leqslant 1$, $|x - x_0| \leqslant r$, *удовлетворяет условиям* (5) *и* (8). *Тогда уравнение* (1) *имеет единственное решение и оно является пределом приближений* (4), *причем скорость сходимости определяется формулой* $|x_n(t) - x^*(t)| \leqslant 2M \exp(2\mathcal{L})\, 1/n$, *где* $x^*(t)$ — *решение уравнения* (1).

Доказательство. Справедливость неравенства (7) следует из условия (5). Это означает, что приближения (4) имеет смысл.

Докажем, что последовательность функций $x_n(t)$, определенная из (4), фундаментальная. Введем обозначение $v_{n,p}(t) = |x_n(t) - x_{n+p}(t)|$. Тогда

$$v_{n,p}(t) \leqslant (\operatorname{sign} t) \int_{-t}^{t} |K[t, s; x_n(s)] -$$

$$- K[t, s; x_{n+p}(s)]|\,ds + 2M\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}\right),$$

$$v_{n,p}(t) \leqslant \mathcal{L}(\operatorname{sign} t) \int_{-t}^{t} v_{n,p}(s)\,ds + 2M\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}\right).$$

Отсюда на основании теоремы 1 имеем

$$v_{n,p}(t) \leqslant 2M \exp(2\mathcal{L})\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}\right), \qquad -1 \leqslant t \leqslant 1. \qquad (9)$$

Из (9) получим фундаментальность последовательных приближений $x_n(t)$ и, следовательно, сходимость $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) = x^*(t)$. Переходя к пределу в (4), убеждаемся, что $x^*(t)$ является решением уравнения (1). Единственность решения вытекает из теоремы 3.

Переходя к пределу в (9) при $p \to \infty$, получаем скорость сходимости приближений (4) к решению уравнения (1).

5. Теперь для приближенного решения уравнения (1) построим с помощью простой итерации последовательные приближения

$$x_n(t) = x_0 + \int_{-t}^{t} K[t, s; x_{n-1}(s)]\,ds, \qquad n = 1, 2, \ldots, \ x_0(t) = x_0. \qquad (10)$$

Теорема 5. *Пусть непрерывная функция* $K(t\ s;\ x)$, $-1 \leqslant t$, $s \leqslant 1$, $|x - x_0| \leqslant r$, *удовлетворяет условиям* (5) *и* (8). *Тогда уравнение* (1) *имеет единственное решение и оно является пределом приближений* (10) *и скорость сходимости определяется формулой* $|x_n(t) - x^*(t)| \leqslant \frac{(2\mathscr{L})^n}{n!} v_0$, $v_0 = \max\limits_{|t| \leqslant 1} v_0(t)$.

Доказательство. Однозначная разрешимость уравнения (1) следует из теоремы 4. Докажем, что $x_n(t)$, определенная с помощью (10), сходится к решению $x^*(t)$ уравнения (1).

Введем обозначение $v_n(t) = |x_n(t) - x^*(t)|$. Тогда

$$v_n(t) \leqslant (\operatorname{sign} t) \int\limits_{-t}^{t} |K[t, s;\ x_{n-1}(s)] - K[t, s;\ x^*(s)]|\, ds \leqslant$$

$$\leqslant (\operatorname{sign} t)\, \mathscr{L} \int\limits_{-t}^{t} |x_{n-1}(s) - x^*(s)|\, ds = (\operatorname{sign} t)\, \mathscr{L} \int\limits_{-t}^{t} v_{n-1}(s)\, ds,$$

$$v_n(t) \leqslant \mathscr{L} (\operatorname{sign} t) \int\limits_{-t}^{t} v_{n-1}(s)\, ds,$$

откуда

$$v_n(t) \leqslant \frac{(2\mathscr{L}\,|t|)^n}{n!} v_0, \quad -1 \leqslant t \leqslant 1, \quad |x_n(t) - x^*(t)| \leqslant \frac{(2\mathscr{L})^n}{n!}\, v_0.$$

Отсюда следует сходимость $x_n(t)$. Теорема доказана.

Эта теорема допускает следующее обобщение.

Теорема 6. *Пусть непрерывная функция* $K(t,\ s;\ x)$, $-1 \leqslant t$, $s \leqslant 1$, $|x - x_0| \leqslant r$, *удовлетворяет условиям* (5) *и* $|K(t,\ s;\ x) - K(t,\ s;\ y)| \leqslant \varphi(t,\ s;\ |x - y|)$, *где непрерывная функция* $\varphi(t,\ s;\ u)$, $-1 \leqslant t$, $s \leqslant 1$, $0 \leqslant u \leqslant 2r$, *не убывает по* u, *и интегральное уравнение*

$$u(t) = \int\limits_{-t}^{t} \varphi[t, s;\ u(s)]\, ds$$

имеет только нулевое решение.

Тогда уравнение (1) *имеет единственное решение; это решение является пределом последовательных приближений* (10) *и скорость сходимости определяется формулой* $|x_n(t) - x^*(t)| \leqslant \varepsilon_n(t)$, *где*

$$\varepsilon_1(t) = (\operatorname{sign} t) \int\limits_{-t}^{t} \varphi(t, s;\ r)\, ds, \quad \varepsilon_n(t) = (\operatorname{sign} t) \int\limits_{-t}^{t} \varphi[t, s;\ \varepsilon_{n-1}(s)]\, ds,$$

$$n = 2, 3, \ldots . \tag{11}$$

Доказательство. Сначала докажем фундаментальность $\{x_n(t)\}$. Введем обозначение $v_{n,p}(t) = |x_n(t) - x_{n+p}(t)|$. Тогда

$$v_{n,p}(t) \leqslant (\operatorname{sign} t) \int\limits_{-t}^{t} \varphi[t, s;\ v_{n-1,p-1}(s)]\, ds.$$

Докажем, что

$$v_{n,p}(t) \leqslant \varepsilon_n(t) \tag{12}$$

при всех n, $p = 1, 2, \ldots$.

Положим $n = 1$. Тогда

$$v_{1,p}(t) \leqslant (\operatorname{sign} t) \int\limits_{-t}^{t} \varphi[t, s;\ v_{0,p}(s)]\, ds \leqslant (\operatorname{sign} t) \int\limits_{-t}^{t} \varphi(t, s;\ r)\, ds = \varepsilon_1(t).$$

Допустим, что $v_{n-1,p}(t) \leqslant \varepsilon_{n-1}(t)$. Тогда

$$v_{n,p}(t) \leqslant (\operatorname{sign} t) \int_{-t}^{t} \varphi[t, s; \varepsilon_{n-1}(s)]\, ds = \varepsilon_n(t).$$

Итак, при всех n справедливо (12).

Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n(t) = 0$ равномерно по $t \in [-1, 1]$. Для этого достаточно показать невозрастание этой последовательности.

Имеем

$$\varepsilon_2(t) = (\operatorname{sign} t) \int_{-t}^{t} \varphi[t, s; \varepsilon_1(s)]\, ds \leqslant \int_{-t}^{t} \varphi(t, s; r)\, ds = \varepsilon_1(t).$$

Пусть $\varepsilon_n(t) \leqslant \varepsilon_{n-1}(t)$. Тогда

$$\varepsilon_{n+1}(t) \leqslant (\operatorname{sign} t) \int_{-t}^{t} \varphi[t, s; \varepsilon_n(s)]\, ds \leqslant (\operatorname{sign} t) \int_{-t}^{t} \varphi[t, s; \varepsilon_{n-1}(s)]\, ds = \varepsilon_n(t).$$

Следовательно, $\varepsilon_n(t)$ не возрастает.

Из неравенств (12) следует, что $\{x_n(t)\}$ фундаментальная, следовательно, сходится $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) = x(t)$. Переходя к пределу в (10), убеждаемся, что $x(t)$ является решением уравнения (1).

Теперь, переходя к пределу при $p \to \infty$ в (12), получаем $|x_n(t) - x^*(t)| \leqslant \varepsilon_n(t)$. Отсюда следует и единственность решения уравнения (1), так как $x^*(t)$ —произвольное решение уравнения (1). Теорема доказана.

6. Рассмотрим интегральное уравнение

$$x(t) = x_0 + \int_{-t}^{t} K[t, s; x(s), \lambda]\, ds, \tag{13}$$

где $\lambda \in [\lambda_*, \lambda^*]$ — параметр.

Теорема 7. *Пусть непрерывная функция $K(t, s; x, \lambda)$, $-1 \leqslant t, s \leqslant 1$, $|x - x_0| \leqslant r$, $\lambda_* \leqslant \lambda \leqslant \lambda^*$, удовлетворяет условиям*

$$|K(t, s; x, \lambda) - K(t, s; y, \lambda)| \leqslant \mathscr{L}_1 |x - y|,$$

$$|K(t, s; x, \lambda) - K(t, s; x, \mu)| \leqslant \mathscr{L}_2 |\lambda - \mu|.$$

Тогда решение $x(t, \lambda)$ уравнения (1) *непрерывно зависит от параметра λ.*

Доказательство. Введем обозначение $v(t) = |x(t, \lambda) - x(t, \mu)|$. Тогда

$$v(t) \leqslant \mathscr{L}_1 (\operatorname{sign} t) \int_{-t}^{t} v(s)\, ds + 2\mathscr{L}_2 |t| |\lambda - \mu|.$$

Отсюда на основании теоремы 1 получаем $|x(t, \lambda) - x(t, \mu)| \leqslant 2\mathscr{L}_2 \exp(2\mathscr{L}_1) |\lambda - \mu|$; следовательно, $x(t, \lambda)$ непрерывно зависит от λ.

Справедлива также следующая теорема.

Теорема 8. *Пусть непрерывная функция $K(t, s; x, \lambda)$, $-1 \leqslant t, s \leqslant 1$, $|x - x_0| \leqslant r$, $\lambda_* \leqslant \lambda \leqslant \lambda^*$, непрерывно дифференцируема по x и λ. Тогда решение уравнения* (13) *имеет непрерывную производную по λ, совпадающую с решением линейного уравнения*

$$u(t) = \int_{-t}^{t} \{K'_x[t, s; x(s, \lambda), \lambda]\, u(s) + K'_\lambda[t, s; x(s, \lambda), \lambda]\}\, ds.$$

1. *Мамедов Я. Д., Аширов С. А.* Нелинейные уравнения Вольтерра.— Ашхабад : Илим, 1977.— 176 с.
2. *Năslău Pavel.* Aproximarea Solutiei unor ecuatii integrale neliniar // Bul. Şti. Şitehn. Inst. Politehn. Timişoara. Ser. mat-fiz.— 1982.— **27**, N 1.— P. 55—58.

Азерб. ун-т

Получено 11.03.85,
после доработки I — 27.01.86, II — 09.02.87