УДК 517.911

М. У. Ахметов, канд. физ.-мат. наук (Киев. ун-т)

О РАЗЛОЖЕНИИ В РЯД ПО НАЧАЛЬНЫМ ЗНАЧЕНИЯМ И ПАРАМЕТРАМ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

The conditions under which solutions of equations with discontinuous right-hand side depend analytically on the initial conditions and parameters are investigated. A definition is introduced to specify this dependence and the existence of a surface of discontinuity.

Досліджуються умови, за яких розв'язки рівнянь з розривною правою частиною аналітично залежать від початкових значень і параметрів. Вводиться означення, яке уточнює цю залежність в зв'язку з існуванням поверхні розриву.

Пусть $G = G_t \times G_x \times G_\mu \subset R^1 \times R^n \times R^m$ — ограниченная область, G_μ — окрестность нуля, $\Gamma(\mu)$ при каждом фиксированном $\mu \in G_\mu$ — поверхность в $G_t \times G_x$, задаваемая уравнением $t = \tau(x, \mu)$, которая разбивает G на подмножества G_- и G_+ так, что $G = G_- \bigcup \Gamma(\mu) \bigcup G_+$, и если $(t', x, \mu) \in G_-$, $(t'', x, \mu) \in G_+$, то $t' < t''$.

Рассмотрим функцию $f\colon G_- \bigcup G_+ \to R^n$. Будем считать, что она непрерывна в каждом из множеств G_-, G_+ и существует положительное число ε такое, что функция f является сужением некоторых функций $f_-(t, x, \mu)$ и $f_+(t, x, \mu)$, голоморфных по x, μ в ε-окрестностях множеств G_- и G_+ соответственно.

Пусть на множестве G дана система

$$dx / dt = f(t, x, \mu). \tag{1}$$

Исследуем вопрос об аналитической зависимости решений (1) от начальных значений и параметров способом, разработанным в [1] для импульсных систем.

Предположим, что при $\mu = 0$ уравнение (1) допускает решение $\varphi(t) = x(t, t_0, x_0, 0)$, которое определено на отрезке $[t_0, T] \subset G_t$ и встречается с поверхностью $\Gamma(0)$ в точке $t = \theta$ так, что

$$1 - \frac{\partial \tau}{\partial x}(\varphi(\theta), 0) f(\theta, \varphi(\theta), 0) \neq 0, \tag{2}$$

где $\partial\tau / \partial x$ — вектор-строка, а f — вектор-столбец.

Обозначим через $\bar{x}(t) = x(t, t_0, x, \mu)$ решение системы (1); $t = \eta$ — момент встречи этого решения с поверхностью $\Gamma(\mu)$. Если $\| x - x_0 \|$ и $\| \mu \|$ достаточно малы, то $\bar{x}$ определено на промежутке $[t_0, T]$ и выполняется соотношение

$$1 - \frac{\partial \tau}{\partial x}(\bar{x}(\eta), \mu) f(\eta, \bar{x}(\eta), \mu) \neq 0. \tag{3}$$

Предполагается, что все рассматриваемые решения уравнения (1) пересекают поверхность разрыва в единственной точке.

Будем говорить, что решение $\bar{x}(t)$ *B*-аналитически зависит от начального значения x и параметра μ в окрестности точки $(x_0, 0)$, если существует действительное число $\rho_0 > 0$ такое, что при условии $\| x - x_0 \| \le \rho_0$, $\| \mu \| \le \rho_0$ решение $\bar{x}$ при $t \in [t_0, T] \setminus (\theta^0, \eta]$ допускает разложение по степеням составляющих $x - x_0$ и μ с непрерывно зависящими от x и μ коэффициентами, кусочно-непрерывными по t, претерпевающими разрыв первого рода в точке $t = \theta$.

Разность $\eta - \theta$ также разложима в ряд по составляющим $x - x_0$ и μ с постоянными коэффициентами, непрерывными по x и μ.

Определим условия, при которых решение $\bar{x}(t)$ системы (1) N-аналитично по x и μ. Разобьем интервал G_t на части $G^-, \{\theta\}, G^+$ так, что $t_0 \in G^-$ и для любых $t' \in G^-$, $t'' \in G^+$ справедливо $t' < t''$.

Будем считать, что функцию f можно, сохраняя голоморфность, продолжить из множеств G_- и G_+ на области $G^- \times G_x \times G_\mu$ и $G^+ \times G_x \times G_\mu$ соответственно вплоть до плоскости $t = \theta$. Построенную таким образом функцию обозначим через $F(t, x, \mu)$. При некотором $\delta > 0$ функция F является сужением функций $F_-(t, x, \mu)$ и $F_+(t, x, \mu)$, голоморфных по x и μ в δ-окрестности областей $G^- \times G_x \times G_\mu$ и $G^+ \times G_x \times G_\mu$ соответственно.

Предположим, что существует окрестность точки $(\theta, \varphi(\theta), 0)$ (обозначим ее через B) такая, что в областях $B \cap G_-$ и $B \cap G_+$ функция f голоморфна и по t.

Теперь построим отображение части плоскости $t = \theta$, пересекающейся с G, в себя следующим образом. Сначала на множестве G определим систему

$$dx / dt = F(t, x, \mu) \tag{4}$$

с разрывной правой частью. Затем рассмотрим три случая:

I. Если $(\theta, x, \mu) \in G_-$, то $x^0(t)$, $x^0(\theta) = x$ — решение системы (1), а $\xi = \xi(x, \mu)$ — момент встречи этого решения с $\Gamma(\mu)$, $\xi > \theta$. Кроме того, пусть $x^1(t)$, $x^1(\xi) = x^0(\xi)$ — решение уравнения (4), определенное на участке $[\theta, \xi]$.

II. Если $(\theta, x, \mu) \in G_+$, то будем полагать, что $x^0(t)$, $x^0(\theta) = x$ — решение уравнения (4) и $\xi = \xi(x, \mu)$ — момент встречи этого решения с поверхностью $\Gamma(\mu)$. Обозначим также через $x^1(t)$ решение уравнения (1) с начальным условием $x^1(\xi) = x^0(\xi)$, предположив, что оно существует на промежутке $[\xi, \theta]$.

III. $(\theta, x, \mu) \in \Gamma(\mu)$. Определим отображение

$$I(x, \mu) = \begin{cases} \int_\theta^\xi f(u, x^0(u), \mu)\,du + \int_\xi^\theta F(u, x^1(u), \mu)\,du & \text{в случае I;} \\ \int_\theta^\xi F(u, x^0(u), \mu)\,du + \int_\xi^\theta f(u, x^1(u), \mu)\,du & \text{в случае II;} \\ 0 \quad \text{в случае III} \end{cases}$$

и построим систему дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

$$dy / dt = F(t, y, \mu), \quad t \neq \theta, \quad \Delta y \big|_{t=0} = I(y, \mu). \tag{5}$$

Нетрудно проверить, исходя из определения отображения $I(x, \mu)$, что существует достаточно малая окрестность траектории решения $x = \varphi(t)$ в G (обозначим ее через $\overline{G}$), в которой системы (1) и (5) имеют S-свойство, т. е. если $\bar{x}(t) = x(t, t_0, x, \mu)$ и $\bar{y}(t) = y(t, t_0, x, \mu)$ — решения уравнений (1) и (5) соответственно, то при достаточно малых $\| x - x_0 \|$ и $\| \mu \|$ функции $\bar{x}$ и $\bar{y}$ принимают одинаковые значения на общем промежутке существования. за исключением точки t из $[\theta, \eta]$, где η — момент встречи решения $\bar{x}$ с поверхностью $\Gamma(\mu)$, $[\theta, \eta]$ — отрезок $[\theta, \eta]$, если $\theta \leq \eta$, или отрезок $[\eta, \theta]$, если $\eta < \theta$. Очевидно, что область существования решений $\bar{x}$ и $\bar{y}$ при достаточно малых $\| x - x_0 \|$ и $\| \mu \|$ содержит отрезок $[t_0, T]$.

В дальнейшем системы (1) и (5) будем рассматривать в области $\overline{G}$.

Пусть окрестность Ω точки $(x_0, 0)$ является областью определения функций ξ и I. Справедливы следующие леммы.

Лемма 1. *Функция $\xi(x, \mu)$ голоморфна в области Ω.*

Доказательство. Применив теорему Коши о голоморфности решений обыкновенных дифференциальных уравнений [2] и теорему Пуанкаре о разложении решения по параметру [3], найдем, что при значениях t, близких к значению $t = \theta$, справедливо разложение

$$x^0(t) = \sum C_{p\alpha\ldots\lambda a\ldots l}(t-\theta)^p (x_1 - x_1^0)^\alpha \ldots (x_n - x_n)^\lambda \mu_1^a \ldots \mu_m^l. \tag{6}$$

Отсюда и из условия (2) согласно теореме о голоморфности неявной функции следует, что при достаточно малых $\| x - x_0 \|$ и $\| \mu \|$ существует единственное голоморфное решение уравнения $\xi = \tau(x^0(\xi), \mu)$. Таким образом,

$$\xi = \sum B_{\alpha\ldots\lambda a\ldots l}(x_1 - x_1^0)^\alpha \ldots (x_n - x_n^0)^\lambda \mu_1^a \ldots \mu_m^l \tag{7}$$

так, что $\xi(x_0, 0) = \theta$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Функция $I(x, \mu)$ голоморфна в области Ω.*

Доказательство. Применив определение отображения I, равенство (7), теорему о подстановке ряда в ряд и теорему Пуанкаре, определим, что функция $I(x, \mu) = x(\theta, \xi, x^0(\xi), \mu) - x$ разложима в ряд по степеням составляющих $x - x_0$ и μ в достаточно малой окрестности точки (x_0, μ). Лемма доказана.

Лемма 3. *Решение $\overline{y}$ системы (5), расположенное в достаточно малой окрестности решения $x = \varphi(t)$ порождающего уравнения, разложимо в ряд по степеням составляющих $x - x_0$ и μ.*

Доказательство. Применив теорему Пуанкаре о разложимости решений обыкновенного дифференциального уравнения по параметрам, найдем, что на промежутке $[t_0, \theta]$ справедливо представление

$$\overline{y}(t) = \sum A_{\alpha\ldots\lambda a\ldots l}(t)(x_1 - x_1^0)^\alpha \ldots (x_n - x_n^0)^\lambda \mu_1^a \ldots \mu_m^l, \tag{8}$$

где A — непрерывные при $t \in [t_0, \theta]$ функции.

Используя голоморфность функции $I(x, \mu)$, находим, что значение $\overline{y}(\theta+) = \overline{y}(\theta) + I(\overline{y}(\theta), \mu)$ также разложимо в ряд. Следовательно, рассматривая $\overline{y}(t)$ на промежутке $(\theta, T]$ как решение задачи Коши системы (5) с начальными данными θ и $\overline{y}(\theta+)$, применяя теоремы Пуанкаре и теорему о подстановке ряда в ряд, получаем, что представление (8) справедливо и на промежутке $(\theta, T]$. Лемма доказана.

Из лемм 1 и 3 на основании установленного для уравнений (1) и (5) S-свойства следует, что справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Решение $\overline{x}(t) = x(t, t_0, x, \mu)$ системы (1) при достаточно малых $\| x - x_0 \|$ и $\| \mu \|$ B-аналитически зависит от x и μ, т. е. для всех $t \in [t_0, T] \setminus (\theta^0, \eta]$ справедливы разложение*

$$\overline{x}(t) = \sum A_{\alpha\ldots\lambda a\ldots l}(t)(x_1 - x_1^0)^\alpha \ldots (x_n - x_n^0)^\lambda \mu_1^a \ldots \mu_m^l \tag{9}$$

и равенство

$$\eta - \theta = \sum D_{\alpha\ldots\lambda a\ldots l}(x_1 - x_1^0)^\alpha \ldots (x_n - x_n^0)^\lambda \mu_1^a \ldots \mu_m^l, \tag{10}$$

где A — кусочно-непрерывные с разрывами первого рода в точке $t = \theta$ функции, D — постоянные. Коэффициенты A и D непрерывно зависят от x и μ.

Следствием теоремы 1 является следующая теорема.

Теорема 2. *При любом фиксированном $t \in [t_0, T]$, $t \neq \eta$, функция $\overline{x}(\bar{t}) = x(\bar{t}, t_0, x, \mu)$ — вещественноаналитическая как функция x, μ в некоторой окрестности точки $(x_0, 0)$.*

В заключение заметим, что дифференцируемость решений разрывных систем по начальным данным первого порядка рассматривались в работе [4].

1. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А., Ахметов М. У.* Дифференциальные свойства решений и интегральных поверхностей нелинейных импульсных систем.– Киев, 1990.– 50 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 90.37).
2. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1970. – 280 с.
3. *Розо М.* Нелинейные колебания и теория устойчивости. – М.: Наука, 1971. – 288 с.
4. *Филлипов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – М.: Наука, 1985. – 223 с.

Получено 22.10.91