УДК 517.57

О. Б. Скаскив, канд. физ.-мат. наук (Львов. ун-т)

О РОСТЕ В ПОЛУПОЛОСАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, ПРЕДСТАВЛЕННЫХ РЯДАМИ ДИРИХЛЕ

One studies the behavior in semistrip of Dirichlet series with the abscissa of absolute convergence equal to zero.

Вивчається поведінка у півсмугах рядів Діріхле з абсцисою абсолютної збіжності, рівною нулю.

1. Введение. Изучению асимптотических свойств целых функций F, представленных лакунарными степенными рядами, а также абсолютно сходящимися рядами Дирихле

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{z\lambda_n}, \quad 0 = \lambda_0 < \lambda_n \uparrow +\infty, \quad 1 \le n \to +\infty, \tag{1}$$

посвящены многочисленные исследования, начиная с классической работы G. Polya [1], содержащей многие основополагающие идеи, получившие затем глубокое развитие (см. [2, 3]). Характерная особенность результатов из [2, 3] — наличие условий, налагаемых на скорость и „правильность" возрастания последовательности показателей (λ_n). Иной подход, основывающийся на применении результатов типа Вимана – Валирона, дает возможность получать утверждения об асимптотических свойствах целых рядов Дирихле в терминах ограничений, учитывающих лишь скорость возрастания (λ_n). При этом центр тяжести в исследованиях переносится на получение оценок общего члена ряда Дирихле через максимальный. В этой связи отметим работу [4], в которой получены, по-видимому, окончательные в некотором смысле результаты о поведении в горизонтальных полосах целых рядов Дирихле (см. [5]).

В случае, когда абсцисса абсолютной сходимости ряда (1) равна нулю, поведение функции F в горизонтальных полуполосах изучалось в [6, 7]. При этом рассматривался вопрос о совпадении так называемых R-порядков, а условия содержали ограничения, налагаемые как на скорость, так и на „правильность" возрастания (λ_n), поскольку используемая в [6, 7] методика является по существу модификацией метода А. Ф. Леонтьева применительно к рядам Дирихле с нулевой абсциссой абсолютной сходимости.

Настоящая статья посвящена исследованию асимптотических свойств в горизонтальных полуполосах $S(a, t) = \{z = x + iy\colon |y - t| \le a, x < 0\}$ рядов Дирихле (1) с нулевой абсциссой абсолютной сходимости. При этом можно получать содержательную информацию, налагая ограничения лишь на последовательность коэффициентов (a_n). В этом случае последовательность $(\ln |a_n|)$ играет ту же роль, что и последовательность показателей (λ_n) в случае целых функций вида (1). Применяемый в работе метод основывается на одной лемме Турана [8] и на оценках общего члена ряда (1), получаемых с помощью сведения вопроса о получении таких оценок к решению аналогичного вопроса для некоторого другого ряда Дирихле, представляющего целую функцию. Для получения оценок общего члена ряда Дирихле, представляющего целую функцию, используем модификацию метода Вимана – Валирона, применявшуюся в [9, 10]. Ранее к рядам Дирихле с нулевой абсциссой абсолютной сходимости, а также к аналитическим в $\{z\colon |z| < 1\}$ степенным рядам удавалось применить лишь методику П. Розенблума [11], хотя и более простую, но позволяющую получить в случае рядов Дирихле менее общие и точные результаты, поскольку для ее применимости нужна, вообще говоря, „правильность" возрастания (λ_n), определяемая условием на шаг $(\lambda_{n+1}-\lambda_n)$ [12 – 14].

Для того чтобы сформулировать основной результат, необходимо определить понятие мажоранты Ньютона ряда (1). Для произвольного ряда (1) мажоранту Ньютона строим, как в [15, с. 163], следующим образом. В прямоугольной системе координат $\lambda O\mu$ отметим точки P_n с координатами $(\lambda_n, -\ln|a_n|)$ и проведем из них лучи V_n в направлении положительной полуоси $O\mu$. Обозначим через Q выпуклую оболочку (полигон Ньютона) множества $\bigcup_{n\geq 0} V_n$. Если множество Q отлично от полуплоскости, то каждая прямая $\{(\lambda, \mu): \lambda = = \lambda_n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, пересекает границу ∂Q множества Q в единственной точке $\tilde{P}_n$ с координатами $(\lambda_n, -\ln a_n^*)$. Формальный ряд

$$F_*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^* e^{z\lambda_n}, \tag{2}$$

следуя [15], называем мажорантой Ньютона ряда (1). Если Q — полуплоскость, то говорим, что мажоранта Ньютона не существует. В [15] (теорема 2) показано, что мажоранта Ньютона для ряда (1) существует только тогда, когда его абсцисса абсолютной сходимости отлична от $-\infty$, значит, мажоранта Ньютона существует и для любой функции вида (1) с нулевой абсциссой абсолютной сходимости.

Получаемые методом Вимана - Валирона оценки выполняются вне некоторых исключительных множеств, для характеристики которых используем понятие логарифмической меры. Логарифмической мерой измеримого множества $E \subset [-1; 0[$ называем величину

$$l\text{-mes}\,(E) = \int_E d\ln(-1/x).$$

Заметим, что $l\text{-mes}\,([-1; 0[) = +\infty$ и $l\text{-mes}\,([-1; \sigma]) = \ln(1/|\sigma|)$, $-1 < \sigma < 0$.

Пусть $\Lambda = (\lambda_n)_0^{\infty}$, $0 = \lambda_0 < \lambda_n \uparrow +\infty$, $n \to +\infty$. Через $H(\Lambda)$ обозначим класс аналитических в полуплоскости $\Pi_0 = \{z = x + iy: x < 0\}$ функций F, представленных абсолютно сходящимися в Π_0 рядами Дирихле вида (1). Положим $H = \bigcup_{\Lambda} H(\Lambda)$.

Для полуполосы

$$S = \bigcup_{\sigma<0} S_\sigma, \quad S_\sigma = S_\sigma(a, t) = \{z = \sigma + iy: |y - t| \leq a\},$$

определим

$$M(\sigma, F, S) = \sup\{|F(\sigma + iy)|: |y - t| \leq a\}.$$

Пусть, кроме того,

$$\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n| e^{\sigma\lambda_n}: n \geq 0\}$$

— максимальный член ряда (1). Используем также обозначение $x^{\Lambda} = \max\{x, 1\}$.

Основным результатом данной статьи является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $F \in H$. Если для коэффициентов мажоранты Ньютона ряда* (1) *выполняется условие*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\ln a_n^*)^{\Lambda}} < +\infty, \tag{3}$$

то для любых горизонтальных полуполос

$$S_1 = \bigcup_{\sigma<0} S_\sigma(a_1, t_1) \subset S_2 = \bigcup_{\sigma<0} S_\sigma(a_2, t_2)$$

выполняется соотношение

$$\ln M(\sigma, F, S_2) \geq \ln M(\sigma, F, S_1) \geq \ln\left(M(\sigma, F, S_2) + o(\mu(\sigma, F))\right) + o(\ln \mu(\sigma, F)) \quad (4)$$

при $\sigma \to -0$ *вне некоторого множества* E *конечной логарифмической меры, если только существует* $q > 0$, *для которого*

$$|\sigma|^q \ln \mu(\sigma, F) \uparrow +\infty, \quad \sigma_0 \leq \sigma \to -0. \quad (5)$$

Заметим, что теорема 1 в идейном отношении близка к соответствующим результатам из [4]. В п. 3 докажем более общее утверждение, содержащее теорему 1, а также получим некоторые следствия. В п. 4 покажем, что условие (3) в определенном смысле неулучшаемое.

2. Вспомогательные утверждения. Сформулируем следующую лемму, содержащую некоторые элементарные свойства мажоранты Ньютона.

Лемма 1. *Если абсцисса абсолютной сходимости ряда* (2) $\sigma_{F_*} = 0$ *и* $\sup\{|a_n|: n \geq 0\} = +\infty$, *то*

а) $a_n^* \geq |a_n|, \quad n \geq 0;$

б) $a_{n+1}^* \geq a_n^*, \quad n \geq 0;$

в) $x_n^* \overset{\text{def}}{=} \dfrac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}(\ln a_n^* - \ln a_{n+1}^*) \uparrow 0, \quad n \to +\infty;$

г) $\mu(x, F) = \mu(x, F_*), \quad x < 0.$

Лемма 2 ([15], теоремы 3 и 7). *Пусть* σ_F *и* σ_{F_*} — *абсциссы абсолютной сходимости соответственно рядов* (1) *и* (2). *Если* $\ln n = o(\lambda_n)$, $n \to +\infty$, *то*

$$\sigma_{F_*} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-\ln a_n^*}{\lambda_n} = \varliminf_{n\to+\infty} \frac{-\ln|a_n|}{\lambda_n} = \sigma_F.$$

Лемма 3. *Пусть* $F \in H$. *Если для ее мажоранты Ньютона выполняется условие* (3), *то выполняются соотношения*

$$n = o(\ln a_n^*), \quad n \to +\infty, \quad и \quad n = o(\lambda_n), \quad n \to +\infty.$$

Доказательство. Заметим, что в силу монотонности (a_n^*) из условия (3) следует

$$n = o(\ln a_n^*), \quad n \to +\infty. \quad (6)$$

Обозначим

$$\Phi(x) = x \ln \mu(-1/x, F), \quad x > 0.$$

Поскольку $\mu(t, F) = \mu(t, F_*)$, а $\sup\{a_n^*: n \geq 0\} = +\infty$, то [16, с. 283 – 284] $\mu(t, F) \uparrow +\infty$, $t \to -0$, и, следовательно, $\Phi(x)$ — выпуклая функция на $[0, +\infty[$. Пусть $\varphi(x)$ — обратная к $\Phi(x)$ функция. Из определения максимального члена при $x = \varphi(\lambda_n)$ для всех $n \geq 0$ имеем

$$\ln a_n^* \leq (\Phi(x) + \lambda_n)/x = 2\lambda_n/\varphi(\lambda_n). \quad (7)$$

Из (6) и (7) непосредственно получаем утверждение леммы 3.

Сформулируем также следующее утверждение, полученное при доказательстве леммы 3.

Лемма 4. *Если* $F \in H$ *и* $\sup\{|a_n|: n \geq 0\} = +\infty$, *то для всех* $n \geq 0$ *выполняется неравенство* (7), *где функция* $\varphi(t)$ *— обратная к выпуклой функции*

$$\Phi(t) = t \ln \mu(-1/t, F), \quad t > 0.$$

Докажем теперь теорему об оценке общего члена ряда (1), представляющую, по-видимому, и самостоятельный интерес.

Теорема 2. *Пусть* $F \in H$, *а* $v(t)$ *— положительная на* $[0, +\infty[$ *неубывающая к* $+\infty$ *при* $t \to +\infty$ *функция такая, что* $\int_0^{+\infty} t^{-2} v(t)\, dt < +\infty$. *Если* $\ln n = o(\lambda_n)$, $n \to +\infty$, *то существует возрастающая к* $+\infty$ *на* $[0, +\infty[$ *функция* $c_1(t)$ *такая, что для всех* $n \geq 0$ *и для всех* $\sigma < 0$ ($\sigma \notin E$, l–mes$(E) < +\infty$) *выполняется неравенство*

$$a_n^* e^{\sigma\lambda_n} \leq \mu(\sigma, F) \exp\left\{-|\sigma| \int\limits_{\mu_\nu}^{\mu_n} \frac{\mu_n - t}{t^2} c_1(t)\, \varphi_1(t/2) v(4t)\, dt\right\}, \tag{8}$$

где $\mu_n = \ln a_n^*$, $\varphi_1(t)$ *— функция, обратная к функции*

$$\Phi_1(t) = \ln \mu(-1/t, F), \quad t > 0,$$

$$\nu = \nu(\sigma, F) = \max\{n: |a_n| e^{\sigma\lambda_n} = \mu(\sigma, F)\}$$

— центральный индекс ряда (1).

Доказательство. Поскольку интеграл $\int_0^{+\infty} t^{-2} v(t)\, dt$ сходится, то

$$l(x) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_x^{+\infty} t^{-2} v(t) dt \downarrow 0, \quad x \to +\infty,$$

и

$$c(x) \overset{\text{def}}{=} (l(x))^{-1/2} \uparrow +\infty, \quad x \to +\infty.$$

Кроме того,

$$M = \int\limits_0^{+\infty} t^{-2} c(t) v(4t)\, dt < +\infty. \tag{9}$$

Действительно,

$$\int\limits_0^{+\infty} t^{-2} c(t) v(t)\, dt = -\int\limits_0^{+\infty} (l(x))^{-1/2} dl(x) = 2\sqrt{l(0)} < +\infty.$$

Положим теперь $c_1(t) = c(t)/(3M)$ и выберем

$$\alpha(t) = \int\limits_0^t u^{-2} c_1(u) \varphi_1(u/2) v(4u)\, du, \tag{10}$$

где функция $\varphi_1(u)$ равна обратной к функции

$$\Phi_1(x) = \ln \mu(-1/x, F) \uparrow \infty, \quad x \to +\infty,$$

в случае, когда обратная существует, и нулю — в противном случае. Заметим, что $\varphi_1(u) \neq 0$ для всех достаточно больших значений $u > 0$. Пусть далее

$$\alpha_n = \exp\left\{-\int\limits_0^{\mu_n} \alpha(t)\, dt\right\}, \quad \tau_n = \alpha(\mu_n).$$

Рассмотрим ряд Дирихле

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{\alpha_n} e^{s\mu_n}, \quad b_n = e^{-\lambda_n}, \tag{11}$$

и покажем, что функция $f(s)$ — целая. Для этого достаточно установить, что абсцисса абсолютной сходимости ряда (11) равна $+\infty$.

По определению максимального члена при $|x| = 1/\varphi_1(\mu_n/2)$ последовательно имеем $\lambda_n x \le -\ln a_n^* + \ln \mu(x, F)$ и

$$\lambda_n \ge \frac{1}{|x|}\mu_n - \frac{1}{|x|}\ln \mu(x, F) = \frac{1}{|x|}\mu_n - \frac{1}{|x|}\Phi_1\left(\frac{1}{|x|}\right) = \frac{\mu_n}{2}\varphi_1\left(\frac{\mu_n}{2}\right) \tag{12}$$

при $n \ge n_0$. Следовательно, в силу (9), (10) и выбора $c_1(t)$ получаем

$$\frac{\ln \alpha_n}{\ln b_n} \le \frac{1}{\lambda_n}\int_0^{\mu_n} \alpha(t)\,dt \le \frac{2\alpha(\mu_n)}{\varphi_1(\mu_n/2)} \le \frac{2}{3}, \quad n \ge n_0. \tag{13}$$

Из (13) выводим

$$\ln (b_n/\alpha_n) \le (\ln b_n)/3 = -\lambda_n/3, \quad n \ge n_0. \tag{14}$$

Из (14) по лемме 4 получаем

$$-(1/\mu_n)\ln (b_n/\alpha_n) \ge \lambda_n/(3\mu_n) \ge \varphi(\lambda_n)/6 \to +\infty, \quad n \to +\infty.$$

Поскольку в условиях теоремы 2 $\ln n = o(\lambda_n)$, $n \to +\infty$, то согласно лемме 2 отсюда имеем, что абсцисса абсолютной сходимости ряда (11) равна $+\infty$. Таким образом, функция $f(s)$ — целая.

Пусть (s_ν) — последовательность точек скачка центрального индекса $\nu(\sigma, f)$ ряда (11), т. е. $\nu(x, f) = \nu$ при $x \in [s_\nu, s_{\nu+1}[$, а если при переходе через точку $s_{\nu+1}$ центральный индекс изменяет свое значение с ν на $\nu + p$, то считаем, что $s_{\nu+1} = s_{\nu+2} = \ldots = s_{\nu+p}$.

Если $(x - \tau_\nu) \in [s_\nu, s_{\nu+1}[$, то для всех

$$x \in [s_\nu + \tau_\nu, s_{\nu+1} + \tau_\nu[\overset{\text{def}}{=} E_\nu^*$$

и для всех $n \ge 0$ по определению максимального члена

$$(b_n/\alpha_n)\exp\{(x - \tau_\nu)\mu_n\} \le \mu(x - \tau_\nu, f).$$

Отсюда

$$\frac{b_n}{b_\nu}\exp\{x(\mu_n - \mu_\nu)\} \le \frac{\alpha_n}{\alpha_\nu} e^{\tau_\nu(\lambda_n - \lambda_\nu)} = \exp\left\{-\int_{\mu_\nu}^{\mu_n} (\alpha(t) - \alpha(\mu_\nu))\,dt\right\} < 1, \ n \ne \nu. \tag{15}$$

Полагая в (15) $x = -(1/\sigma)$, $\sigma < 0$, получаем

$$a_n^* \exp\{\sigma\lambda_n\} / (a_n^* \exp\{\sigma\lambda_\nu\}) = (b_n \exp\{x\mu_n\} / (b_\nu \exp\{x\mu_\nu\}))^{|\sigma|} < 1, \quad n \ne \nu, \tag{16}$$

т. е. $\nu(\sigma, F_*) = \nu$ и, значит, $\mu(\sigma, F) = a_\nu^* \exp\{\sigma\lambda_\nu\}$ при $\sigma \in [-(s_\nu + \tau_\nu)^{-1}, -(s_{\nu+1} + \tau_\nu)^{-1}[$. Таким образом, для всех $\sigma < 0$ таких, что $x = |\sigma|^{-1} \in \bigcup_{k\in J} E_k^*$, где $J \subset \mathbb{N}$ — множество значений центрального индекса $\nu(\sigma, f)$, и для всех $n \ge 0$

$$a_n^* \exp\{\sigma\lambda_n\} \le \mu(\sigma, F)\exp\left\{-|\sigma|\int_{\mu_\nu}^{\mu_n}(\alpha(t) - \alpha(\mu_\nu))\,dt\right\} =$$

$$= \mu(\sigma, F)\exp\left\{-|\sigma|\int_{\mu_\nu}^{\mu_n}(\mu_n - t)\alpha'(t)\,dt\right\}.$$

Отсюда получаем, что неравенство (8) выполняется для всех $\sigma < 0$ из множества $E_1 \subset [-1; 0[$, являющегося образом множества $E^* = \bigcup_{k\in J} E_k^*$ при отображении $\sigma = -x^{-1}$. Поскольку

$$[s_1, +\infty[\,\setminus E^* = \bigcup_{k=1}^{\infty}[s_k + \tau_{k-1}, s_k + \tau_k[,$$

то

$$E \overset{\text{def}}{=} [-s_1^{-1}, 0[\,\setminus E_1 = \bigcup_{k=1}^{\infty}[-(s_k + \tau_{k-1})^{-1}, -(s_k + \tau_k)^{-1}[.$$

Оценим логарифмическую меру множества E. Как отмечалось выше, из (16) следует $\nu(\sigma, F_*) = \nu$ при $\sigma \in [-(s_\nu + \tau_\nu)^{-1}, -(s_{\nu+1} + \tau_\nu)^{-1}[$. Кроме того, из (12) вытекает

$$0 \le \ln\mu(\sigma, F_*) = \mu_\nu - |\sigma|\lambda_\nu \le \lambda_\nu(-|\sigma| + 2/\varphi_1(\mu_\nu/2)),$$

т. е.

$$|\sigma| \le 2/\varphi_1(\mu_\nu/2), \quad \sigma_0 \le \sigma < 0. \tag{17}$$

Отсюда для всех $k \in J$

$$s_k + \tau_k \geqslant \tfrac{1}{2}\varphi_1(\mu_k/2). \tag{18}$$

Поэтому если $k \in J$, то

$$l_k = l\text{-mes}\,([-(s_k + \tau_{k-1})^{-1}, -(s_k + \tau_k)^{-1}[) =$$

$$= \ln((s_k + \tau_k)/(s_k + \tau_{k-1})) \le (\tau_k - \tau_{k-1})/(s_k + \tau_{k-1}).$$

Следовательно, используя определение $\tau_k = \alpha(\mu_k)$ и неравенство (18), получаем

$$l_k \le 2\int_{\mu_{k-1}}^{\mu_k} t^{-2}c_1(t)\,v(4t)\,dt \Bigg/ \left(1 - 2\int_{\mu_{k-1}}^{\mu_k} t^{-2}c_1(t)v(4t)\,dt\right),$$

т. е. для достаточно больших $k \in J$, поскольку

$$\int_{\mu_{k-1}}^{\mu_k} t^{-2}c_1(t)\,v(4t)\,dt \to 0, \quad k \to +\infty,$$

имеем

$$l_k \le 4\int_{\mu_{k-1}}^{\mu_k} t^{-2}c_1(t)v(4t)\,dt. \tag{19}$$

Пусть теперь $j \notin J$. Тогда найдутся k и p такие, что $k, p \in J$, $p < j < k$, и $s_p < s_{p+1} = s_j = s_k < s_{k+1}$. Поэтому

$$E_{k,p}^* \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{j=p+1}^{k}[s_j + \tau_{j-1}, s_j + \tau_j[\; = [s_{p+1} + \tau_p, s_{p+1} + \tau_k[.$$

Если $E_{k,p}$ — образ множества $E_{k,p}^*$ при отображении $\sigma = -x^{-1}$, $x > 0$, то

$$l - \text{mes}\,(E_{k,p}) = \ln((s_{p+1} + \tau_k)/(s_{p+1} + \tau_p)) \le (\tau_k - \tau_p)/(s_k + \tau_k - (\tau_k - \tau_p)).$$

Поскольку $k \in J$, отсюда с учетом (18), как и выше, получаем

$$l\text{-mes}\,(E_{k,p}) \le 4\int_{\mu_p}^{\mu_k} t^{-2}c_1(t)v(4t)\,dt$$

для всех достаточно больших p. Из последнего неравенства и из (19) непосредственно следует

$$l\text{-mes}\,(E) \le 4\int_{\mu_0}^{\infty} t^{-2}c_1(t)\,v(4t)\,dt + K_1 = K_1 + \frac{8}{3},$$

где $K_1 < +\infty$ — некоторая постоянная. Таким образом, множество E имеет конечную логарифмическую меру на $[-1; 0[$. Теорема 2 доказана.

3. Основные результаты. Теорему 1 получим в качестве следствия более общей теоремы 3.

Пусть $a_1(x)$ и $a_2(x)$ — положительные на $]-\infty; 0[$ функции такие, что $a_1(x) \le a_2(x)$, $x < 0$, а $t_j(x)$ — некоторая произвольная действительная на $]-\infty; 0[$ функция. Кроме того, определим

$$M(\sigma, F, S_j) \overset{\text{def}}{=} \sup\{|F(\sigma + iy)|: |y - t_j(\sigma)| \le a_j(\sigma)\}.$$

Теорема 3. *Пусть $F \in H$. Если для функции F выполняются условия* (3) *и* (5), *то существует возрастающая к $+\infty$ функция $p(x)$, $x \to -0$, такая, что для любых функций $t_j(x)$ и $a_j(x)$, $j = 1, 2$, таких, что*

$$\ln\frac{a_2(x)}{a_1(x)} = O(p(x)), \quad x \to -0, \tag{20}$$

выполняется соотношение (4) *при $\sigma \to -0$ вне некоторого множества E конечной логарифмической меры.*

Доказательство. Пусть $n_1(t) = \sum_{\mu_n \le t} 1$ — считающая функция последовательности $\mu_n = \ln a_n^* \uparrow +\infty$, $n \to +\infty$. Положим $v(t) = n_1(t)$ и покажем, что выполняются условия теоремы 2. Действительно,

$$\sum_{\mu_n \le t}\frac{1}{\mu_n} = \int_{\mu_0}^{t}\frac{dn_1(u)}{u} = \frac{n_1(u)}{u}\bigg|_{\mu_0}^{t} + \int_{\mu_0}^{t}\frac{n_1(u)}{u^2}\,du,$$

а по лемме 3 $n_1(t) = o(t)$, $t \to +\infty$, поэтому из условия (3) следует сходимость интеграла $\int_{\mu_0}^{\infty} u^{-2}v(u)du$. Поскольку $a_n e^{\sigma\lambda_n} = O(1)$, $\sigma \to -0$, при фиксированном n, то, не уменьшая общности, можно считать $\ln a_0^* = 1$. Следовательно,

$$\int_{0}^{\infty} u^{-2}v(u)\,du = \int_{\mu_0}^{\infty} u^{-2}v(u)\,du.$$

Осталось заметить, что согласно лемме 3 $n = o(\lambda_n)$, $n \to +\infty$, а тем более $\ln n = o(\lambda_n)$, $n \to +\infty$, и, значит, все условия теоремы 2 выполнены. Теорему 2 используем для оценки остатка ряда Дирихле. Для всех $\sigma < 0$ ($\sigma \notin E$, $l\text{-mes}\,(E) < \infty$), учитывая, что $|a_n| \le a_n^*$ (см. лемму 1), имеем

$$\sum\nolimits_1(\sigma) \overset{\text{def}}{=} \sum_{\mu_n > 3\mu_\nu} |a_n| e^{\sigma\lambda_n} \le$$

$$\leq \mu(\sigma, F) \sum_{\mu_n > 3\mu_\nu} \exp\left\{-|\sigma| \int_{\mu_\nu}^{\mu_n} (\mu_n - t) t^{-2} c_1(t) \varphi_1\left(\frac{t}{2}\right) n_1(4t)\, dt\right\}, \tag{21}$$

где $\nu = \nu(\sigma, F)$ — центральный индекс ряда (1). Замечая, что

$$\Phi_1(1/|\sigma|) = \ln \mu(\sigma, F_*) < \ln a_\nu^* = \mu_\nu$$

и $|\sigma| > 1/\varphi_1(\mu_\nu)$, при $\mu_n > 3\mu_\nu$ последовательно имеем

$$|\sigma| \int_{\mu_\nu}^{\mu_n} t^{-2}(\mu_n - t) c_1(t) \varphi_1(t/2) n_1(4t)\, dt \geq$$

$$\geq |\sigma| \int_{2\mu_n/3}^{\mu_n} t^{-2}(\mu_n - t) c_1(t) \varphi_1(t/2) n_1(4t)\, dt >$$

$$> c_1(2\mu_\nu) n_1(8\mu_n/3) \int_{2\mu_n/3}^{\mu_n} t^{-2}(\mu_n - t)\, dt \geq (n+1) c_2(\mu_\nu),$$

где

$$c_2(\mu_\nu) = c_1(2\mu_\nu)\left(\frac{1}{2} - \ln\frac{3}{2}\right) \to +\infty, \quad \nu \to \infty.$$

Отсюда и из (21) при $\sigma \to -0$, $\sigma \notin E$, получаем

$$\sum\nolimits_1(\sigma)/\mu(\sigma, F) \leq \sum_{\mu_n > 3\mu_\nu} \exp\{-(n+1) c_2(\mu_\nu)\} \leq (1 + o(1)) e^{-c_2(\mu_\nu) n_1(3\mu_\nu)}. \tag{22}$$

Из теоремы 2 при $n = 0$ для всех $\sigma < 0$, $\sigma \notin E$, имеем

$$\ln \mu(\sigma, F) \geq |\sigma| \int_{\mu_0}^{\mu_\nu} \frac{c_1(t)}{t} \varphi_1\left(\frac{t}{2}\right) n_1(4t)\, dt \geq \frac{1}{\varphi_1(\mu_\nu)} \int_{3\mu_\nu/4}^{\mu_\nu} \frac{c_1(t)}{t} \varphi_1\left(\frac{t}{2}\right) n_1(4t)\, dt \geq$$

$$\geq c_1\left(\frac{3\mu_\nu}{4}\right) n_1(3\mu_\nu) \ln\frac{4}{3}\, \varphi_1\left(\frac{3\mu_\nu}{8}\right) \Big/ \varphi_1(\mu_\nu). \tag{23}$$

Заметим, что из условия (5) следует $(t^{1/q}/\varphi_1(t)) \uparrow$, $t \to +\infty$. Значит,

$$\varphi_1\left(\frac{3\mu_\nu}{8}\right) \Big/ \varphi_1(\mu_\nu) \leq \left(\frac{3}{8}\right)^{1/q}.$$

Поэтому, полагая

$$c_3(\mu_\nu) = c_1\left(\frac{3}{4}\mu_\nu\right)\left(\frac{3}{8}\right)^{1/q} \ln\frac{4}{3},$$

из (23) получаем

$$\ln \mu(\sigma, F) \geq c_3(\mu_\nu) n_1(3\mu_\nu). \tag{24}$$

Далее используем следующий результат.

Лемма 5 (P. Turan [8, с. 70]). *Пусть* $\alpha \leq \beta \leq \gamma \leq \delta$, $\beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_n$ *и*

$$g(t) = \sum_{j=1}^{n} b_j \exp\{it\beta_j\}.$$

Тогда

$$\max\{|g(t)| : \alpha \leq t \leq \delta\} \leq \left(2e\frac{\delta - \alpha}{\gamma - \beta}\right)^n \max\{|g(t)| : \beta \leq t \leq \gamma\}.$$

Полагая

$$\alpha = t_2(\sigma) - a_2(\sigma), \quad \beta = t_1(\sigma) - a_1(\sigma), \quad \gamma = t_1(\sigma) + a_1(\sigma),$$
$$\delta = t_2(\sigma) + a_2(\sigma), \quad b_n = a_n \exp(\sigma\lambda_n)$$

и применяя лемму 5 при фиксированном $\sigma < 0$, имеем

$$\max\left\{\left|\sum_{\mu_n \le 3\mu_\nu} a_n e^{\sigma\lambda_n} e^{it\lambda_n}\right| : |t - t_2(\sigma)| \le a_2(\sigma)\right\} \le$$
$$\le \left(2e\frac{a_2(\sigma)}{a_1(\sigma)}\right)^{n_1(3\mu_\nu)} \max\left\{\left|\sum_{\mu_n \le 3\mu_\nu} a_n e^{\sigma\lambda_n} e^{it\lambda_n}\right| : |t - t_1(\sigma)| \le a_1(\sigma)\right\}.$$

Отсюда

$$M(\sigma, F, S_2) \le \max\left\{\left|\sum_{\mu_n \le 3\mu_\nu} a_n e^{(\sigma+it)\lambda_n}\right| : |t - t_2(\sigma)| \le a_2(\sigma)\right\} +$$
$$+ \sum_{\mu_n > 3\mu_\nu} |a_n| e^{\sigma\lambda_n} \le \left(2e\frac{a_2(\sigma)}{a_1(\sigma)}\right)^{n_1(3\mu_\nu)} M(\sigma, F, S_1) +$$
$$+ \left(1 + \left(2e\frac{a_2(\sigma)}{a_1(\sigma)}\right)^{n_1(3\mu_\nu)}\right) \sum_{\mu_n > 3\mu_\nu} |a_n| e^{\sigma\lambda_n}. \tag{25}$$

Выберем теперь возрастающую к $+\infty$ при $\sigma \to -0$ функцию $p(\sigma)$ такую, что $p(\sigma) = o(c_2(\mu_\nu))$, $\nu = \nu(\sigma, F) \to \infty$. Тогда из (22) и (20) при $\sigma \to -0$, $\sigma \notin E$, получаем

$$\left(2e\frac{a_2(\sigma)}{a_1(\sigma)}\right)^{n_1(3\mu_\nu)} \sum_{\mu_n > 3\mu_\nu} |a_n| e^{\sigma\lambda_n} \le$$
$$\le (1 + o(1))\mu(\sigma, F) \exp\{-(c_2(\mu_\nu) - p(\sigma) + O(1))n_1(3\mu_\nu)\} = o(\mu(\sigma, F)). \tag{26}$$

Отсюда и из (25) при $\sigma \to -0$, $\sigma \notin E$, выводим

$$\ln(M(\sigma, F, S_2) + o(\mu(\sigma, F))) \le \ln(M(\sigma, F, S_1) + n_1(3\mu_\nu)O(p(\sigma)).$$

Выбирая

$$p(\sigma) = o(\min\{c_2(\mu_\nu), c_3(\mu_\nu)\})$$

и применяя (24), окончательно получаем соотношение (4). Теорема 3 доказана.

***Замечание* 1.** Функция $p(\sigma)$, фигурирующая в условии (20), как видно из доказательства теоремы 3, должна удовлетворять лишь ограничению

$$p(\sigma) = o(\min\{c_2(\mu_\nu), c_3(\mu_\nu)\}), \quad \sigma \to -0,$$

которое, как несложно проверить, выполняется, например, если

$$p(\sigma)\left(\int_{2\ln\mu(\sigma,F)}^{+\infty} \frac{n_1(t)}{t^2}\,dt\right)^{1/2} = o(1), \quad \sigma \to -0.$$

Если при доказательстве теоремы 3 вместо $c(t) = 1/\sqrt{l(t)}$ выбрать $c(t) = (l(t))^q$, $-1 < q < 0$, то достаточно требовать, чтобы $p(\sigma)$ удовлетворяла лишь ограничению

$$p(\sigma)\left(\int_{2\ln\mu(\sigma,F)}^{\infty} \frac{n_1(t)}{t^2}\,dt\right)^{|q|} = o(1), \quad \sigma \to -0.$$

Приведем некоторые следствия теоремы 3. Прежде всего заметим, что теорема 1 является частным случаем теоремы 3, если в последней взять $a_j(\sigma) = \mathrm{const}$, $t_j(\sigma) = \mathrm{const}$, $j = 1, 2$. В качестве второго следствия отметим следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть $F \in H$. Если для функции F выполняются условия* (3) *и* (5), *то для любых функций $t_j(\sigma)$ и для любых постоянных $a_j > 0$, $j = 1, 2$, при $\sigma \to -0$, $\sigma \notin E$, выполняется соотношение* (4), *лишь только $S_1 \subset S_2$.*

Как и в [4, с. 683], можно получить следующее утверждение.

***Следствие* 1.** *Пусть $F \in H$ и удовлетворяет условиям* (3) *и* (5), *а коэффициенты $a_n = |a_n| e^{i\theta_n}$ такие, что*

$$|\theta_n - \theta| \le \gamma < \pi/2, \quad n \ge n_0, \quad \theta \in [-\pi; \pi). \tag{27}$$

Тогда для каждой полуполосы $S = \bigcup_{\sigma<0} S_\sigma(a, t)$, $a > 0$, $t \in \mathbb{R}$, при $\sigma \to -0$ ($\sigma \notin E$, l–$\mathrm{mes}\,(E) < \infty$) выполняется соотношение

$$\ln M(\sigma, F) = (1 + o(1)) \ln M(\sigma, F, S), \tag{28}$$

где

$$M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + iy)| : y \in \mathbb{R}\}.$$

Доказательство легко следует из теоремы 1, неравенства Коши $\mu(\sigma, F) \le \le M(\sigma, F)$ и следующего неравенства

$$|F(\sigma)| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| e^{i(\theta_n - \theta)} e^{\sigma\lambda_n} \right| \ge \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cos(\theta_n - \theta) e^{\sigma\lambda_n} \ge M(\sigma, F)\cos\gamma,$$

если выбрать $S_1 = S$, а в качестве S_2 — любую горизонтальную полуполосу, содержащую S и отрицательную действительную полуось.

Из теоремы 3 аналогично получаем следующее утверждение.

***Следствие* 2.** *Пусть $F \in H$ и выполняются условия* (3), (5) *и* (27). *Тогда для той же функции $p(\sigma)$, что и в теореме* 3 (*см. замечание* 1) *и для любых функций $a(\sigma) > 0$ и $t(\sigma)$ таких, что $\ln|t(\sigma)|/a(\sigma) = O(p(\sigma))$, $\sigma \to -0$, выполняется при $\sigma \to -0$ ($\sigma \notin E$, l–$\mathrm{mes}\,(E) < \infty$) соотношение* (28).

Применяя в (4) вместо $o(\mu(\sigma, F))$ оценку из (26), несложно получить следующее утверждение.

***Следствие* 3.** *Пусть $F \in H$, а $q(\sigma)$ — положительная при $\sigma < 0$ функция такая, что*

$$1 \ge q(\sigma) > \exp\{-(1/2)c_2(\mu_\nu)n_1(3\mu_\nu)\}, \quad \sigma \to -0.$$

Если выполняются условия (3), (5) *и, кроме того, $M(\sigma, F, S_2) \ge q(\sigma)M(\sigma, F)$, где $S_2 = \bigcup_{\sigma<0} S_\sigma(a_2, t_2)$, $t_2 = \mathrm{const}$ и $\ln|a_2(\sigma)| = O(p(\sigma))$, $\sigma \to -0$, то для любых фиксированных $a > 0$ и $t \in \mathbb{R}$, определяющих полуполосу S, при $\sigma \to -0$ ($\sigma \notin E$, l–$\mathrm{mes}\,(E) < \infty$) выполняется соотношение* (28), *при этом $p(\sigma)$ такое же, как и в замечании* 1.

***Замечания.* 2.** Поскольку $\mu_{\nu(\sigma, F)} > \ln\mu(\sigma, F)$, то несложно проверить, что функция $q(\sigma)$ удовлетворяет условиям следствия 3, если, например,

$$\ln(1/q(\sigma)) \le \tfrac{1}{2} n_1(3\ln\mu(\sigma, F)) c_2(\ln\mu(\sigma, F)), \quad \sigma < 0.$$

При этом доказательство следует трансформировать согласно второй части замечания 1.

3. Модифицируя рассуждения из [4] применительно к функциям $F \in H$, можно показать существенность условия (27) в следствии 1. Кроме того, во-первых, условия следствия 3 в некотором смысле обобщают условие (27), а во-вторых, условие (27), очевидно, можно заменить условием существования у функции F чисто мнимого периода или квазипериода, которое выполняется, если, например, $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$. Ниже покажем существенность условия (3).

4. Поскольку $|a_n| \le a_n^* < a_{n+1}^*$, то условие (3) выполняется, лишь только выполняется неравенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1/(\ln|a_n|)^\wedge < +\infty \tag{29}$$

или

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1/(\ln\max\{|a_k|: 0 \le k \le n\})^\wedge < +\infty. \tag{30}$$

Условие (30) следует из условия (29).

4. Существенность условия (3). Покажем, что условие (3) в некотором смысле близкое к окончательному (необходимому). Именно, пусть $h(x) \uparrow +\infty$, $x \to +\infty$, — произвольная функция такая, что

$$\int^{\infty} (h(x))^{-1}\, dx = +\infty$$

и

$$l(x) = h(x)/(x\ln x) \to +\infty, \quad x \to +\infty,$$

— медленно возрастающая, т. е. $l(2x) = o(l(x))$, $x \to +\infty$. Тогда существует функция $F \in H$ такая, что $\ln|a_n| = O(h(n))$ и (28) не выполняется на множестве бесконечной логарифмической меры. Для этого достаточно взять

$$\lambda_n \sim n\ln^2 n\, l(n), \quad n \to +\infty,$$

и

$$a_n = (1+\lambda_n)^{-2} / B'(\lambda_n),$$

где

$$B(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k - z}{\lambda_k + z}.$$

Заметим, что можно считать выполненным соотношение

$$0 < \Delta = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{\ln\lambda_n}{\lambda_n} \ln\frac{1}{|B'(\lambda_n)|} < +\infty. \tag{31}$$

Действительно, если $\lambda_n = n\ln^2 n\, l(n)$, то легко проверить, что

$$\ln\frac{1}{|B'(\lambda_n)|} \asymp n\ln n = o\left(\frac{\lambda_n}{\ln\lambda_n}\right)$$

и

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n = (1+o(1))\ln^2 n\, l(n), \quad n \to +\infty.$$

С другой стороны, пусть $n_k = 2^{2^k}$ и выберем

$$\lambda_{n_k}^* = \lambda_{n_k} \Big/ \left(1 - \exp\{-\Delta_1 n_k \ln n_k l(n_k)\}\right).$$

Тогда, поскольку

$$\lambda^*_{n_k} \le \lambda_{n_k} + \frac{1}{\Delta_1} \ln n_k < \lambda_{n_k+1},$$

$$-\ln |B'(\lambda_n)| = \ln\left(2\lambda_n \prod_{j\ne n} \frac{1+\lambda_n/\lambda_j}{|1-\lambda_n/\lambda_j|}\right)$$

и

$$-\ln\left(1-\lambda_{n_k}/\lambda^*_{n_k}\right) = \Delta_1 n_k \ln n_k l(n_k) \asymp \lambda_{n_k}/\ln\lambda_{n_k}, \quad k\to+\infty,$$

выбирая вместо $\{\lambda_n\}$ последовательность $\{\lambda_n\}\cup\left\{\lambda^*_{n_k}\right\}$ и рассматривая произведение Бляшке, построенное по новой последовательности, несложно проверить, что условие (31) выполняется с некоторым $\Delta \in (0, +\infty)$. Детальное изложение этого рассуждения мы опускаем.

Далее, в [16] (теорема 6) показано, что если

$$\delta = \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln\frac{1}{|L'(\lambda_n)|} < +\infty, \quad L(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\left(\frac{z}{\lambda_n}\right)^2\right),$$

то ряд (1) с только что определенными коэффициентами (a_n) ограничен на отрицательном действительном луче, т. е.

$$|F(\sigma)| \le M < +\infty, \quad \sigma<0.$$

В данном случае в силу равенства

$$|L'(\lambda_n)| = 4\,|B'(\lambda_n)| \prod_{j\ne n}\left(1+\frac{\lambda_n}{\lambda_j}\right)^2,$$

соотношения (31) и того, что функция $\prod_{j=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{z}{\lambda_j}\right)$ целая роста не выше минимального типа первого порядка, получаем $\delta = 0$. Следовательно, порядок по Ритту на отрицательном действительном луче равен

$$\rho_0 \overset{\text{def}}{=} \varlimsup_{\sigma\to-0} |\sigma| \ln^+ \ln|F(\sigma)| = 0.$$

Отсюда, поскольку

$$(n/\lambda_n)\ln^2\lambda_n \to 0, \quad n\to+\infty,$$

используя результат из [17], имеем $\rho_a = \rho_0 = 0$ для каждого $a>0$, где

$$\rho_a \overset{\text{def}}{=} \varlimsup_{\sigma\to-0} |\sigma| \ln^+ \ln M_a(\sigma, F),$$

$$M_a(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma+iy)| : |y|\le a\}.$$

Используя теперь теорему 1 из [6], получаем, что в этом случае порядок по Ритту функции F,

$$\rho \overset{\text{def}}{=} \varlimsup_{\sigma\to-0} |\sigma| \ln\ln M(\sigma, F),$$

вычисляемый по формуле

$$\rho = \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{\ln\lambda_n}{\lambda_n} \ln|a_n|,$$

в силу соотношения (31) равен $\rho = \Delta \in (0, +\infty)$. Отсюда непосредственно получим, что по крайней мере на множестве бесконечной логарифмической меры соотношение (28) для любой полуполосы $S = \{z = x + iy\colon |y| \le a,\ x < 0\}$ не выполняется.

Отметим теперь, что в силу (31)

$$\ln|a_n| = O(\lambda_n/\ln\lambda_n), \quad n \to +\infty,$$

поэтому

$$\ln\ln\mu(\sigma, F_*) = \ln\ln\mu(\sigma, F) = O(1/|\sigma|), \quad \sigma \to -0.$$

Отсюда следует, что

$$\ln a_n^* = O(\lambda_n/\ln\lambda_n) = O(h(n)), \quad n \to +\infty,$$

и условие (3) не выполняется. Заметим, что условия (29) и (30) также не выполняются.

Замечание 5. Существенность условия (5) не будем устанавливать. Отметим лишь, что, как следует из доказательства, его можно заменить, например, требованием, чтобы функция $\varphi(t)$, обратная к функции

$$\Phi(t) = \ln\mu(-1/t, F), \quad t > 0,$$

удовлетворяла условию Караматы, т. е.

$$\varphi(2t) = O(\varphi(t)), \quad t \to +\infty.$$

1. *Polya G.* Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen // Math. Z. – 1929. – **29**. – S. 549 – 640.
2. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент. – М.: Наука, 1976. – 536 с.
3. *Леонтьев А. Ф.* Последовательности полиномов из экспонент. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
4. *Шеремета М. Н.* Рост в полосе целых функций, представленных рядами Дирихле // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1981. – **4**, № 3. – С. 674 – 687.
5. *Матрицосян В. А.* О целых функциях, ограниченных на замкнутом угле и представимых степенными рядами с лакунами или с вещественными коэффициентами // Докл. АН СССР. – 1986. – **290**, № 6. – С. 1301 – 1304.
6. *Гайсин А. М.* Оценка роста функции, представленной рядом Дирихле, в полуполосе // Мат. сб. – 1982. – **117**, № 3. – С. 412 – 424.
7. *Гайсин А. М.* Поведение суммы ряда Дирихле в полуполосах // Мат. заметки. – 1987. – **42**, вып. 5. – С. 660 – 669.
8. *Turan P.* Eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen. – Budapest, 1953. – 195 p.
9. *Шеремета М. Н.* Аналоги теоремы Вимана для рядов Дирихле // Мат. сб. – 1979. – **110**, № 1. – С. 102 – 116.
10. *Скаскив О. Б.* О поведении максимального члена ряда Дирихле, задающего целую функцию // Мат. заметки. – 1985. – **37**, вып. 1. – С. 41 – 47.
11. *Rosenbloom P.* Probability and entire functions // Stud. Math. Anal. and Rel. Top. – Stanford: Calif. Univ. press, 1962. – P. 325 – 332.
12. *Kövari T.* On the maximum modulus and maximum term of functions analytic in unit disc // J. London Math. Soc. – 1966. – **41**, № 1. – P. 129 – 137.
13. *Сулейманов Н. М.* Оценки типа Вимана – Валирона для степенных рядов с конечным радиусом сходимости и их точность // Докл. АН СССР. – 1980. – **253**, № 4. – С. 822 – 825.
14. *Галь Ю. М.* Об аналогах теоремы Вимана – Валирона для рядов Дирихле, показатели которых имеют положительный шаг // Изв. вузов. Математика. – 1986. – № 2. – С. 57 – 59.
15. *Гече Ф. И., Онипчук С. В.* Об абсциссах сходящегося ряда Дирихле и его мажоранты Ньютона // Укр. мат. журн. – 1974. – **26**, № 2. – С. 161 – 168.
16. *Скаскив О. Б., Сорокивский В. М.* О росте на горизонтальных лучах аналитических функций, представленных рядами Дирихле // Там же. – 1990. – **42**, № 3. – С. 363 – 371.
17. *Сорокiвський В. М.* Про поведінку в півсмузі аналітичних функцій, заданих рядами Діріхле // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1985. – Вип. 24. – С. 40 – 43.

Получено 05. 04. 91