УДК 517.51

К. В. Руновский, канд. физ.-мат. наук (Чернигов. пед. ин-т)

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ СУММИРОВАНИЯ РЯДОВ ФУРЬЕ — ЯКОБИ

We construct a summation method for Fourier–Jacobi series which have the properties similar to the properties of the de LaVallée Poussin methods of summation of the Fourier series according to the trigonometric system.

Побудовані методи підсумовування рядів Фур'є – Якобі, які за своїми властивостями аналогічні методам підсумовування Валле Пуссена рядів Фур'є за тригонометричною системою.

В некоторых задачах, связанных с приближением 2π-периодических функций тригонометрическими полиномами, используются средние Валле Пуссена

$$V_n^{2n}(f, x) = \frac{1}{n+1}\sum\nolimits_{k=m+1}^{2n} S_k(f, x),$$

где $S_k(f, x)$ — частные суммы ряда Фурье функции $f(x)$, которые, будучи линейными комбинациями средних Фейера, являются тригонометрическими полиномами порядка не выше $2n$, имеют ограниченные по n нормы в пространствах с интегральной и равномерной метриками и сохраняют тригонометрический полином порядка не выше n [1, с. 131].

В алгебраическом случае средние Валле Пуссена, построенные по ряду Фурье – Якоби, не имеют ограниченных по n норм в соответствующем весовом пространстве [2, с. 266]. Оказывается, однако, что в этом случае существуют линейные комбинации средних Чезаро порядка, зависящего от параметров рассматриваемых полиномов Якоби, которые имеют все характерные свойства средних Валле Пуссена. В силу этого такие комбинации могут называться аналогами 2π-периодических сумм Валле Пуссена и использоваться в разных вопросах, связанных с приближением функций алгебраическими полиномами (см., например, [3]).

Приведем точные формулировки. Будем говорить, что $f(x)$ принадлежит L_p, если для $1 \le p < \infty$ функция $f(x)$ измерима на $[-1, 1]$ и

$$\|f\|_{L_p} = \left\{ \int\limits_{-1}^{1} |f(x)|^p \, dx \right\}^{1/p} < +\infty,$$

а для $p = \infty$ функция $f(x)$ непрерывна на $[-1, 1]$ и при этом

$$\|f\|_{L_\infty} = \max_{x \in [-1, 1]} |f(x)|.$$

Будем говорить также, что $f(x)$ принадлежит $L_{p,\alpha,\beta}$, если функция $f(x)(1 - x)^\alpha(1 + x)^\beta$ принадлежит L_p, причем

$$\|f\|_{L_{p,\alpha,\beta}} = \|f(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\|_{L_p}.$$

Пусть $\nu, \mu, \alpha, \beta, p$ таковы, что

$$1 \le p \le \infty, \quad \nu \ge \mu \ge -\frac{1}{2},$$

$$\alpha = \beta = -\frac{1}{2p}, \quad p > 1, \qquad \text{если } \nu = \mu = -\frac{1}{2},$$

$$\alpha=\beta,\quad \nu+\frac{1}{2}>\alpha+\frac{1}{2p}>0,\qquad \text{если } \nu=\mu>-\frac{1}{2}, \tag{1}$$
$$\nu+\frac{1}{2}>\alpha+\frac{1}{2p}>0,\quad \beta=-\frac{1}{2p},\quad p>1,\qquad \text{если } \nu>\mu=-\frac{1}{2},$$
$$\mu+\frac{1}{2}>\beta+\frac{1}{2p}>0,\quad \nu-\mu>\alpha-\beta>0,\qquad \text{если } \nu>\mu>-\frac{1}{2}.$$

Тогда пространство $L_{p,\alpha,\beta}$ будем обозначать символом $L_p^{\nu,\mu}$. Всюду в дальнейшем, рассматривая функции из $L_p^{\nu,\mu}$, будем предполагать, что параметры ν, μ, α, β, p, содержащиеся в определении $L_p^{\nu,\mu}$, подчинены условиям (1). Отметим, что впервые пространства $L_p^{\nu,\mu}$ рассматривались М. К. Потаповым [4]. Обозначим через $\{\hat{P}_n^{(\nu,\mu)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ систему полиномов Якоби, т. е. систему алгебраических многочленов степени n, ортонормированную на $[-1, 1]$ с весом $(1-x)^{\nu}(1-x)^{\mu}$ (см., например, [2, с. 70, 80]). Пусть функция $f(x)$ принадлежит $L_p^{\nu,\mu}$. Исходя из неравенства Гельдера [5, с. 600] и соотношений (1) нетрудно проверить, что $f(x)$ принадлежит $L_{1,\nu,\mu}$. Следовательно, функции $f(x)$ можно сопоставить ряд Фурье по системе полиномов Якоби, т. е. ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(\nu,\mu)}(f)\hat{P}_k^{(\nu,\mu)}(x), \tag{2}$$

где

$$c_k^{(\nu,\mu)}(f) = \int_{-1}^{1} f(t)\,\hat{P}_k^{(\nu,\mu)}(t)(1-t)^{\nu}(1+t)^{\mu}\,dt,\quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Для каждого целого неотрицательного числа s обозначим через $C_{n;\nu,\mu}^{(s)}(f;x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, средние Чезаро порядка s ряда (2), которые, как известно, определяются формулами [6, с. 128 – 129]

$$C_{n;\nu,\mu}^{(0)}(f;x) = \sum_{k=0}^{n} c_k^{(\nu,\mu)}(f)\hat{P}_k^{(\nu,\mu)}(x),\quad n=0,1,\ldots,$$

$$C_{n;\nu,\mu}^{(s)}(f;x) = \frac{1}{\sigma_s(n)}\sum_{k=0}^{n}\sigma_{s-1}(k)C_{n;\nu,\mu}^{(s-1)}(f;x), \tag{3}$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots,\quad s=1,2,\ldots,\quad x\in\mathbb{R},$$

где

$$\sigma_0(n)=1,\quad n=0,1,2,\ldots. \tag{4}$$

$$\sigma_s(n) = \sum_{k=0}^{n}\sigma_{s-1}(k),\quad n=0,1,2,\ldots,\quad s=1,2,\ldots,$$

Введем в рассмотрение суммы $W_n^{(\nu,\mu)}(f;x)$, $n=0, 1, 2, \ldots$, положив

$$W_0^{(\nu,\mu)}(f;x) = C_{0;\nu,\mu}^{(m)}(f;x),$$
$$W_n^{(\nu,\mu)}(f;x) = V_{n(m+1)-m;\nu,\mu}^{(m)}(f;x),\quad n=1,2,\ldots,\quad x\in\mathbb{R}, \tag{5}$$

где $m = [\nu] + 2$, а функции[1] $V_{k,l}^{(s)}(f; x)$, $k = s(l-1), s(l-1)+1, \ldots$, $l = 1, 2, \ldots$, $s = 0, 1, 2, \ldots$, последовательно определяются формулами

$$V_{k,l}^{(0)}(f; x) = C_k^{(0)}(f; x), \quad s = 0, 1, 2, \ldots, \quad s = 1, 2, \ldots,$$

$$V_{k,l}^{(s)}(f; x) = \frac{1}{l} \sum_{i=k+1-l}^{k} V_{i,l}^{(s-1)}(f; x), \tag{6}$$

$$k = s(l-1),\ s(l-1)+1, \ldots, \quad l = 1, 2, \ldots, \quad s = 1, 2, \ldots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Теорема 1. *Пусть функция $f(x)$ принадлежит $L_p^{\nu,\mu}$, n — целое неотрицательное число. Тогда*

1) *функция $W_n^{(\nu,\mu)}(f; x)$ является алгебраическим многочленом степени не выше $d_n^{(\nu,\mu)}$, где*

$$d_n^{(\nu,\mu)} = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad n = 0; \\ n(m+1) - m, & \text{если} \quad n = 1, 2, \ldots; \end{cases}$$

2) *для каждого алгебраического многочлена $P(x)$, степень которого не превышает n, справедливо равенство*

$$W_n^{(\nu,\mu)}(P; x) = P(x), \quad x \in \mathbb{R};$$

3) *выполняется неравенство*

$$\| W_n^{(\nu,\mu)}(f; x) \|_{L_p^{\nu,\mu}} \le B_1 \| f \|_{L_p^{\nu,\mu}},$$

в котором положительная постоянная B_1 зависит только от ν, μ и p.

Утверждения 1 и 2 теоремы 1 нетрудно доказать на основании формул (3), (5), (6) по индукции. Доказательство утверждения 3 основано на применении следующего утверждения.

Утверждение. *Пусть функция $f(x)$ принадлежит $L_p^{\nu,\mu}$. Тогда справедливы равенства*[2]

$$V_{k,l}^{(s)}(f; x) = \frac{1}{l^s} \sum_{j=0}^{s} (-1)^j \binom{s}{j} \sigma_s(k - jl)\, C_{k-jl}^{(s)}(f; x), \tag{7}$$

$$x \in \mathbb{R}, \quad k = s(l-1),\ s(l-1)+1, \ldots, \quad l = 1, 2, \ldots, \quad s = 0, 1, 2, \ldots.$$

Доказательство. Применим метод математической индукции по параметру s. Если $s = 0$, то в силу (6) имеем

$$V_{k,l}^{(s)}(f; x) = C_k^{(s)}(f; x), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad l = 1, 2, \ldots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Предположим, что равенства (7) справедливы для $s-1$. Пусть $l = 1, 2, \ldots$, $k = s(l-1), s(l-1)+1, \ldots$, $x \in \mathbb{R}$. На основании (6) и предположения индукции получаем

$$V_{k,l}^{(s)}(f; x) = \frac{1}{l^s} \sum_{j=0}^{s-1} (-1)^j \binom{s-1}{j} I(j), \tag{8}$$

---

[1] Всюду в дальнейшем будем писать $V_{k,l}^{(s)}$ вместо $V_{k,l;\nu,\mu}^{(s)}$. Кроме того, опустим также символы ν и μ в обозначении средних Чезаро.

[2] В равенствах (7) принято, что $0! = 1$, $\sigma_s(n) C_n^{(s)}(f; x) \equiv 0$, если $n = 0$.

где

$$I(j) = \sum_{i=k+1-l}^{k} \sigma_{s-1}(i-jl)\, C_{i-jl}^{(s-1)}(f; x), \quad j = 0, 1, \ldots, s-1. \tag{9}$$

Положим

$$J(j) = \sigma_s(k-jl) C_{k-jl}^{(s)}(f; x) - \sigma_s(k-(j+1)l)\, C_{k-(j+1)l}^{(s)}(f; x),$$
$$j = 0, 1, \ldots, s-1, \tag{10}$$

и покажем, что

$$I(j) = J(j), \; j = 0, 1, \ldots, s-1. \tag{11}$$

В самом деле, пусть $j = 0, 1, \ldots, s-1$. Возможны три случая: а) $(j+1)l \le k$; б) $jl \le k < (j+1)l$; в) $k < jl$. В случае а) $(k+1-l) - jl = k-(j+1)l + 1 \ge 1$. Следовательно, на основании (3) получаем

$$I(j) = \sum_{i=k-(j+1)l+1}^{k-jl} \sigma_{s-1}(i) C_i^{(s-1)}(f; x) = \sum_{i=0}^{k-jl} \sigma_{s-1}(i) C_i^{(s-1)}(f; x) -$$
$$- \sum_{i=0}^{k-(j+1)l} \sigma_{s-1}(i) C_i^{(s-1)}(f; x) = J(j).$$

В случае б) $k+1-l \le jl \le k$, $k-(j+1)l < 0$. Следовательно, в силу (3) и принятого соглашения (см. сноску 2) будем иметь

$$I(j) = \sum_{i=jl}^{k} \sigma_{s-1}(i-jl) C_{k-jl}^{(s-1)}(f; x) = \sum_{i=0}^{k-jl} \sigma_{s-1}(i) C_i^{(s-1)}(f; x) =$$
$$= \sigma_s(k-jl)\, C_{k-jl}^{(s)}(f; x) = J(j).$$

Случай в) рассматривается аналогично.

На основании (8) – (11) последовательно получаем

$$V_{k,l}^{(s)}(f; x) = \frac{1}{l^s} \left\{ \sigma_s(k) C_k^{(s)}(f; x) + \left(\sum_{j=1}^{s-1} (-1)^j \binom{s-1}{j} \sigma_s(k-jl) C_{k-jl}^{(s)}(f; x) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \sum_{j=0}^{s-2} (-1)^j \binom{s-1}{j} \sigma_s(k-(j+1)l) C_{k-(j+1)l}^{(s)}(f; x) \right) + (-1)^s \sigma_s(k-sl) C_{k-sl}^{(s)}(f; x) \right\} =$$
$$= \frac{1}{l^s} \left\{ \sigma_s(k) C_k^{(s)}(f; x) + \sum_{j=1}^{s-1} (-1)^j \left[\binom{s-1}{j} + \binom{s-1}{j-1} \right] \sigma_s(k-jl) C_{k-jl}^{(s)}(f; x) + \right.$$
$$\left. + (-1)^s \sigma_s(k-sl) C_{k-sl}^{(s)}(f; x) \right\} = \frac{1}{l^s} \sum_{j=0}^{s} (-1)^j \binom{s}{j} \sigma_s(k-jl) C_{k-jl}^{(s)}(f; x).$$

Утверждение доказано.

Завершим доказательство теоремы 1. Учитывая оценки для норм ядер средних Чезаро [2, с. 266] и свойства операторов обобщенного сдвига [4], нетрудно проверить, что для $s > \nu + 1/2$ выполняются неравенства

$$\| C_{n;\nu,\mu}^{(s)}(f) \|_{L_p^{\nu,\mu}} \le B_2 \| f \|_{L_p^{\nu,\mu}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{12}$$

в которых положительная постоянная B_2 не зависит от f и N. Исходя из формул (4) индукцией по параметру s можно проверить также, что

$$\sigma_s(n) \le (n+1)^s, \quad n, s = 0, 1, 2, \dots . \tag{13}$$

При $n = 0$ утверждение 3 теоремы 1 следует из (5) и (12). Если же $n \ne 0$, то на основании (5), (12), (13) и утверждения последовательно получаем

$$\|W_n^{(\nu,\mu)}(f)\|_{L_p^{\nu,\mu}} \le \frac{1}{n^m} \sum_{j=n}^{m} \binom{m}{j} \sigma_m(n(m+1-j)-m) \times$$
$$\times \| C_{n(m+1-j)-m}^{(m)}(f)\|_{L_p^{\nu,\mu}} \le B_1 \|f\|_{L_p^{\nu,\mu}}.$$

Теорема 1 доказана.

Величину

$$E_n(f)_{\nu,\mu,p} = \inf_{P \in \mathcal{A}_n} \|f - P\|_{L_p^{\nu,\mu}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots ,$$

где $\mathcal{A}_n$ — множество всех алгебраических многочленов степени не выше n, называют наилучшим приближением функции f в $L_p^{\nu,\mu}$.

Теорема 2. *Пусть функция $f(x)$ принадлежит $L_p^{\nu,\mu}$. Тогда справедливы неравенства*

$$\|f - W_n^{(\nu,\mu)}(f)\|_{L_p^{\nu,\mu}} \le B_3 E_n(f)_{\nu,\mu,p}, \quad n = 0, 1, \dots , \tag{14}$$

в которых положительная постоянная B_3 зависит только от ν, μ, p.

Доказательство. Пусть ε — произвольное положительное число. Обозначим через $P(x)$ алгебраический многочлен степени не выше n такой, что

$$\|f - P\|_{L_p^{\nu,\mu}} < E_n(f)_{\nu,\mu,p} + \varepsilon. \tag{15}$$

На основании (15) и теоремы 1, учитывая линейность операторов $W_n^{(\nu,\mu)}$, последовательно получаем

$$\|f - W_n^{(\nu,\mu)}(f)\|_{L_p^{\nu,\mu}} \le \|f - P\|_{L_p^{\nu,\mu}} + \|f - W_n^{(\nu,\mu)}(P)\|_{L_p^{\nu,\mu}} +$$
$$+ \|W_n^{(\nu,\mu)}(f - P)\|_{L_p^{\nu,\mu}} < B_3 (E_n(f)_{\nu,\mu,p} + \varepsilon).$$

Отсюда в силу произвольности выбора ε вытекает неравенство (14).

1. *Кашин С. Б., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. – М.: Наука, 1984. – 495 с.
2. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. – М.: Физматгиз, 1962.
3. *Руновский К. В.* Прямая и обратная теоремы о приближении „углом" алгебраическими многочленами // Экстремальные задачи, функцион. анализ и их прил. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. – С. 50 – 53.
4. *Потапов М. К.* О приближении алгебраическими многочленами в интегральной метрике с весом Якоби // Вестн. Моск. ун-та. Сер. мат., мех. – 1983. – № 4. – С. 43 – 52.
5. *Тиман А. Ф.* Теприя приближения функций действительного переменного. – М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.
6. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2-х т. – М.: Мир, 1965. – Т. 1. – 615 с.

Получено 17.05.91