УДК 519.64

Ю. К. Подлипенко, канд. физ.-мат. наук (Киев. ун-т)

ТЕОРИЯ ПОТЕНЦИАЛА ДЛЯ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ В СЛОЕ МЕЖДУ ДВУМЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПЛОСКОСТЯМИ

We investigate boundary value problems appearing in acoustic wave diffraction due to obstacles in a layer between two parallel planes. By using potential theory, the boundary value problems are reduced to Fredholm integral equation considered on the obstacle boundary. Existence and uniqueness theorems are proved for the obtained Fredholm equations and, hence, for the boundary value problem.

Вивчені крайові задачі, що виникають при дослідженні дифракції акустичних хвиль на перешкодах, які розташовані в шарі між двома паралельними площинами. За допомогою теорії потенціалу вказані крайові задачі зведені до інтегральних рівнянь Фредгольма по межі перешкоди. Доведені теореми існування та єдиності одержаних рівнянь Фредгольма і разом з тим вихідних крайових задач.

1. Постановка задачи. Введем в $\mathbb{R}^3$ цилиндрическую систему координат r, φ, z и связанную с ней декартову систему координат x, y, z соотношениями $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$.

Пусть $\Omega := \{(r, \varphi, z) \mid r \geq 0,\ \ 0 \leq \varphi \leq 2\pi,\ \ -h < z < 0\}$ — слой между двумя параллельными плоскостями $S_1 := \{(r, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 \mid r \geq 0,\ \ 0 \leq \varphi \leq 2\pi,\ \ z = 0\}$ и $S_2 := \{(r, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 \mid r \geq 0,\ \ 0 \leq \varphi \leq 2\pi,\ \ z = -h\}$, D — ограниченная открытая область с границей ∂D, состоящей из конечного числа непересекающихся замкнутых поверхностей, такая, что $\overline{D} \subset \Omega$ и область $\Omega \setminus \overline{D}$ связна. Кроме того, пусть $G_R := \{(r, \varphi, z) \in \Omega \mid 0 \leq r < R\}$ — прямой круговой цилиндр радиуса R и высоты h с границей ∂G_R, причем R будем считать достаточно большим $(R \geq R_0)$, так что справедливо включение $\overline{D} \subset G_R$. Боковую поверхность цилиндра G_R обозначим через $C_R := \{(r, \varphi, z) \in \Omega \mid r = R\}$, а его основания — через $S_R^{(1)} := \partial G_R \cap S_1$ и $S_R^{(2)} := \partial G_R \cap S_2$.

***Определение* 1.** *Через* $\mathfrak{R}$ *обозначим линейное пространство комплекснозначных функций* $u \in C^2(\Omega \setminus \overline{D}) \cap C^1(\overline{\Omega} \setminus \overline{D}) \cap C(\overline{\Omega} \setminus D)$, *для которых в любой точке* $P \in \partial D$ *существует равномерный по* P *предел*

$$\frac{\partial u(P)}{\partial \nu_P} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \left(\vec{\nu}_P, \operatorname{grad} u(P + h\nu_P)\right), \tag{1}$$

где $\vec{\nu}_P$ — *единичная внешняя нормаль к* ∂D *в точке* P.

Предположение, что функции $u, v \in \mathfrak{R}$, достаточно, чтобы гарантировать применимость к ним первой и второй формулы Грина в области $G_R \setminus \overline{D}$.

***Определение* 2.** *Через* $\mathfrak{R}'$ *обозначим класс функций* $u \in C^2(\Omega \setminus \overline{D}) \cap C^1(\overline{\Omega} \setminus \overline{D}) \cap C(\overline{\Omega} \setminus D)$.

В настоящей работе рассматриваются следующие три краевые задачи.

***Задача* I.** Найти функцию $u \in \mathfrak{R}'$, удовлетворяющую в $\Omega \setminus \overline{D}$ уравнению Гельмгольца*

$$\Delta u(r, \varphi, z) + k^2 u(r, \varphi, z) = 0, \quad \operatorname{Im} k = 0, \tag{2}$$

где

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

* Случай $\operatorname{Im} k > 0$ исследован автором ранее [1].

граничным условиям

$$u|_{S_1} = 0, \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{S_2} = 0, \tag{4}$$

$$u|_{\partial D} = f, \tag{5}$$

где f — заданная непрерывная функция на ∂D, условию ограниченности $u = O(1)$ в $\Omega \setminus \overline{D}$ и при $k > \pi/(2h)$ парциальным условиям излучения Свешникова на бесконечности:

$$u_m(r, \varphi) = O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad r \to \infty, \tag{6}$$

$$\frac{\partial u_m(r, \varphi)}{\partial r} - i\mu_m u_m(r, \varphi) = o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \ r \to \infty, \ m = 0, 1, \ldots, \ p = E\left(\frac{kh}{\pi} - \frac{1}{2}\right), \tag{7}$$

равномерно по φ, где $u_m(r, \varphi)$ — коэффициенты Фурье разложения функции

$$u(r, \varphi, z) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m(r, \varphi) \sin(\gamma_m z) \tag{8}$$

по полной в $L_2(-h, 0)$ системе $\{\sin(\gamma_m z)\}_{m=0}^{\infty}$ при $r \geq R_0$, $\gamma_m = (2m+1)\pi/(2h)$, $\mu_m = \sqrt{k^2 - \gamma_m^2}$ (ветвь корня выбирается так, чтобы $\operatorname{Im}\mu_m > 0$; если $\operatorname{Im}\mu_m = 0$, то $\operatorname{Re}\mu_m > 0$), $E(x)$ — целая часть действительного числа x.

***Задача* II.** Найти функцию $u \in \mathfrak{R}$, удовлетворяющую (2) – (4), (6), (7) и граничному условию

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = g \quad \text{на} \quad \partial D, \tag{9}$$

где g — заданная непрерывная функция на ∂D.

***Задача* III.** Найти функцию $u \in \mathfrak{R}$, удовлетворяющую (2) – (4), (6), (7) и граничному условию

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + \lambda u = g \quad \text{на} \quad \partial D, \tag{10}$$

где λ и g — заданные непрерывные на ∂D функции.

С помощью методов теории потенциала краевые задачи I – III сведены к интегральным уравнениям Фредгольма по границе ∂D области D.

Подробно изучена задача I: исследована структура спектра соответствующего ей оператора, доказаны теоремы существования и единственности решения этой задачи и указанных выше интегральных уравнений. Аналогичные результаты справедливы для задач II, III.

К краевым задачам I – III приводит изучение дифракции акустических и электромагнитных волн на препятствиях, содержащихся внутри плоскопараллельного волновода. При этом, например, в акустическом случае, функция u имеет смысл потенциала скоростей (в установившемся режиме), а условия излучения (6), (7) исключают волны, приходящие из бесконечности.

Для некоторых других типов областей с бесконечными границами и краевых условий подобные задачи изучались иным способом многими авторами (см. [1 – 7] и указанную там библиографию).

2. Теоремы единственности. Приведем результат о структуре спектра оператора, соответствующего краевой задаче I, используемый в дальнейшем.

Обозначим через A самосопряженный оператор в $L_2(\Omega\setminus\overline{D})$, определенный равенством $Au = -\Delta u$ с областью определения $D(A) := \{u \in W_2^{(1)}(\Omega\setminus\overline{D}) \mid -\Delta u \in L_2(\Omega\setminus\overline{D}),\ u|_{\partial D \cup S_1} = 0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{S_2} = 0\}$, плотной в $L_2(\Omega\setminus\overline{D})$, где оператор $-\Delta$ понимается в смысле теории распределений, $u|_{\partial D\cup S_1}$ и $\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{S_2}$ — следы функции u и ее нормальной производной соответственно на $\partial D \cup S_1$ и на S_2.

Теорема 1 [2]. *Спектр оператора A расположен на положительной полуоси, непрерывен на каждом из интервалов (γ_0^2, γ_1^2), (γ_1^2, γ_2^2), ... с возможным исключением на любом из них конечного числа собственных значений конечной кратности и дискретен левее точки γ_0^2 (т. е. состоит из конечного числа собственных значений конечной кратности).*

Для доказательства теоремы единственности понадобится также следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть $u \in W_2^{(1)}(G_{R+2\delta}\setminus\overline{D})$, $\Delta u \in L_2(G_{R+2\delta}\setminus\overline{D})$, $u|_{S^{(1)}_{R+2\delta}\cup\partial D} = 0$, $\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{S^{(2)}_{R+2\delta}} = 0$, где δ — произвольное положительное число. Тогда выполняется неравенство*

$$\|u\|_{W_2^{(1)}(G_R\setminus\overline{D})} \le c\left\{\|u\|_{L_2(G_{R+2\delta}\setminus\overline{D})} + \|\Delta u\|_{L_2(G_{R+2\delta}\setminus\overline{D})}\right\},$$

где константа c зависит только от δ.

Доказательство леммы 1 аналогично доказательству леммы 1 из [2].

Обозначим через $\mathcal{A}$ множество всех точек непрерывности спектральной функции оператора A, не совпадающих ни с одной из точек γ_k^2. Из предыдущей теоремы вытекает, что множество $\mathcal{A}$ состоит из объединения интервалов $(-\infty, \gamma_0^2)$, (γ_0^2, γ_1^2), (γ_1^2, γ_2^2), ... с возможным исключением на любом из них конечного числа точек — собственных значений оператора $-\Delta$.

Теорема 2. *Пусть $k^2 \in \mathcal{A}$. Тогда уравнение* (2) *в области $\Omega\setminus\overline{D}$ в классе $\mathfrak{R}$ имеет только тривиальное решение $u \equiv 0$, удовлетворяющее граничным условиям* (3), (4), *условию*

$$u|_{\partial D} = 0, \tag{11}$$

условию ограниченности $u = O(1)$ в $\Omega\setminus\overline{D}$ и при $k > \pi/(2h)$ парциальным условиям излучения (6), (7).

Доказательство. Рассмотрим решение $u(r, \varphi, z)$ уравнения (2), удовлетворяющее условиям теоремы. В силу теоремы 3. 27 из [7] $u \in \mathfrak{R}$. Покажем, что коэффициенты $u_m(r, \varphi)$ разложения (8) удовлетворяют уравнению

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_m}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_m}{\partial \varphi^2} + (k^2 - \gamma_m^2)u_m = 0. \tag{12}$$

В самом деле, интегрируя по частям, имеем*

$$u_m(r, \varphi) = \frac{2}{h}\int_{-h}^{0} u(r, \varphi, z)\sin(\gamma_m z)\,dz =$$

---

* Законность применения формулы интегрирования по частям вытекает из того факта, что $u \in C^2(\overline{\Omega}\setminus G_{R_0})$ [8, с. 231].

$$= -\frac{2}{h\gamma_m^2}\int_{-h}^{0}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\sin(\gamma_m z)dz.$$

Принимая во внимание это соотношение и уравнение (2), заключаем, что справедливо соотношение

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_m}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_m}{\partial\varphi^2}-\gamma_m^2 u_m =$$

$$= \frac{2}{h}\int_{-h}^{0}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right\}\sin(\gamma_m z)dz =$$

$$= -\frac{2}{h}\int_{-h}^{0} k^2 u(r,\varphi,z)\sin(\gamma_m z)dz = -k^2 u_m.$$

Раскладывая функцию $u_m(r,\varphi)$ при фиксированном $r \geq R_0$ в ряд Фурье, получаем

$$u_m(r,\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n^{(m)}(r)e^{in\varphi}, \tag{13}$$

где

$$a_n^{(m)}(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_m(r,\varphi)e^{-in\varphi}d\varphi = -\frac{1}{2\pi n^2}\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2 u_m(r,\varphi)}{\partial\varphi^2}e^{-in\varphi}d\varphi, \tag{14}$$

$$n = 0, \pm 1, \ldots .$$

Из (14) и (12) следует

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial a_n^{(m)}(r)}{\partial r}\right) - \frac{n^2}{r^2}a_n^{(m)}(r) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_m(r,\varphi)}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_m(r,\varphi)}{\partial\varphi^2}\right\}e^{-in\varphi}d\varphi =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(k^2-\gamma_m^2)u_m(r,\varphi)e^{-in\varphi}d\varphi = -(k^2-\gamma_m^2)a_n^{(m)}(r),$$

т. е. коэффициенты ряда (13) удовлетворяют уравнению Бесселя

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv(r)}{dr}\right)+\left(\mu_m^2-\frac{n^2}{r^2}\right)v(r) = 0,$$

где $\mu_m = \sqrt{k^2-\gamma_m^2}$ (ветвь корня при вычислении μ_m выбирается так, как описано в постановке задачи I). Поэтому

$$a_n^{(m)}(r) = \alpha_{nm}H_n^{(1)}(\mu_m r)+\alpha'_{nm}H_n^{(2)}(\mu_m r), \tag{15}$$

где α_{nm} и α'_{nm} — постоянные.

Из условий (6), (7) вытекает, что $\alpha'_{nm} = 0$. Действительно, в силу (14) и (7) имеем (при $k > \pi/(2h)$)

$$\frac{\partial a_n^{(m)}(r)}{\partial r} - i\mu_m a_n^{(m)}(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\partial u_m(r,\varphi)}{\partial r} - i\mu_m u_m(r,\varphi)\right]e^{-in\varphi}d\varphi = o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right),$$

$$m = 0, 1, \ldots, p.$$

С другой стороны, согласно (15)

$$\frac{\partial a_n^{(m)}(r)}{\partial r} - i\mu_m a_n^{(m)}(r) = \alpha_{nm}\left(\frac{\partial}{\partial r}H_n^{(1)}(\mu_m r) - i\mu_m H_n^{(1)}(\mu_m r)\right) +$$

$$+ \alpha'_{nm}\left(\frac{\partial}{\partial r}H_n^{(2)}(\mu_m r) - i\mu_m H_n^{(2)}(\mu_m r)\right) = o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad m = 0, 1, \ldots, p.$$

Учитывая асимптотики функций $H_n^{(1)}(z)$ и $H_n^{(2)}(z)$ при $z \to \infty$, из последнего равенства получаем $\alpha'_{nm} = 0$, $m = 0, 1, \ldots, p$. На основании (14), (15) и условия ограниченности решения в $\Omega \setminus \overline{D}$ заключаем, что $\alpha'_{nm} = 0$, $m = p + 1, \infty$. Таким образом, в силу (8), (13), (15) и соотношения

$$K_\nu(z) = \frac{\pi i}{2} e^{\nu\pi i/2} H_\nu^{(1)}(iz),$$

где $K_\nu(z)$ — функция Макдональда, разложения функций $u(r, \varphi, z)$ и $\partial u(r, \varphi, z)/\partial r$ в ряды Фурье по полной в $L_2(C_r)$ системе функций

$$e^{in\varphi}\sin(\gamma_m z), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, \tag{16}$$

при фиксированном $r \geq R_0$ имеют вид

$$u(r, \varphi, z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\sum_{m=0}^{p}\alpha_{nm}H_n^{(1)}\left(\sqrt{k^2 - \gamma_m^2}\, r\right)e^{in\varphi}\sin\gamma_m z + \right.$$

$$\left. + \sum_{m=p+1}^{\infty}\tilde{\alpha}_{nm}K_n\left(\sqrt{\gamma_m^2 - k^2}\, r\right)e^{in\varphi}\sin(\gamma_m z)\right\}, \tag{17}$$

$$\frac{\partial u(r, \varphi, z)}{\partial r} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\sum_{m=0}^{p}\alpha_{nm}\sqrt{k^2 - \gamma_m^2}\, H_n^{(1)\prime}\left(\sqrt{k^2 - \gamma_m^2}\, r\right)\sin\gamma_m z + \right.$$

$$\left. + \sum_{m=p+1}^{\infty}\tilde{\alpha}_{nm}\sqrt{\gamma_m^2 - k^2}\, K'_n\left(\sqrt{\gamma_m^2 - k^2}\, r\right)\sin(\gamma_m z)\right\}e^{in\varphi}, \tag{18}$$

где $\tilde{\alpha}_{nm}$ — постоянные.

Из второй формулы Грина, примененной к функциям u и $\overline{u}$ в области $G_R \setminus \overline{D}$, в силу (2) – (4), (11) вытекает

$$\int_{C_R}\left(u\frac{\partial\overline{u}}{\partial r} - \overline{u}\frac{\partial u}{\partial r}\right)ds = 0. \tag{19}$$

Подставляя выражения (17), (18) в равенство (19) и используя ортогональность системы (16), соотношение [9, с. 117, 120]

$$H_n^{(1)}(z)H_n^{(2)\prime}(z) - H_n^{(1)\prime}(z)H_n^{(2)}(z) = -\frac{4i}{\pi z},$$

и тот факт, что функции $K_n(z)$ вещественны при вещественных значениях аргумента, получаем

$$\int_{C_R}\left(u\frac{\partial\overline{u}}{\partial r} - \overline{u}\frac{\partial u}{\partial r}\right)ds = \pi R h \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\sum_{m=0}^{p}|\alpha_{nm}|^2 H_n^{(1)}\left(\sqrt{k^2 - \gamma_m^2}\, R\right)\sqrt{k^2 - \gamma_m^2}\, \times\right.$$

$$\times \overline{H_n^{(1)\prime}\left(\sqrt{k^2-\gamma_m^2}\,R\right)} + \sum_{m=p+1}^{\infty} |\tilde{\alpha}_{nm}|^2 K_n\left(\sqrt{\gamma_m^2-k^2}\,R\right)\sqrt{\gamma_m^2-k^2}\,K_n'\left(\sqrt{\gamma_m^2-k^2}\,R\right) -$$

$$-\sum_{m=0}^{p} |\alpha_{nm}|^2\, \overline{H_n^{(1)}\left(\sqrt{k^2-\gamma_m^2}\,R\right)}\, H_n^{(1)\prime}\left(\sqrt{k^2-\gamma_m^2}\,R\right)\sqrt{k^2-\gamma_m^2} -$$

$$-\sum_{m=p+1}^{\infty} |\tilde{\alpha}_{nm}|^2 \sqrt{\gamma_m^2-k^2}\,K_n\left(\sqrt{\gamma_m^2-k^2}\,R\right) K_n'\left(\sqrt{\gamma_m^2-k^2}\,R\right)\Bigg\} =$$

$$= \pi R h \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=0}^{p} |\alpha_{nm}|^2 \sqrt{k^2-\gamma_m^2}\left(H_n^{(1)}\left(\sqrt{k^2-\gamma_m^2}\,R\right) H_n^{(2)\prime}\left(\sqrt{k^2-\gamma_m^2}\,R\right) -\right.$$

$$\left. - H_n^{(2)}\left(\sqrt{k^2-\gamma_m^2}\,R\right) H_n^{(1)\prime}\left(\sqrt{k^2-\gamma_m^2}\,R\right)\right) = -4ih\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=0}^{p} |\alpha_{nm}|^2 = 0.$$

Отсюда следует, что $\alpha_{nm} = 0$, $m = 0, 1, \ldots, p$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ и, значит, при $r \ge R_0$ имеем

$$u(r, \varphi, z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=p+1}^{+\infty} \tilde{\alpha}_{nm} K_n\left(\sqrt{\gamma_m^2-k^2}\,r\right)\sin(\gamma_m z) e^{in\varphi}. \tag{20}$$

Покажем, что $u(r, \varphi, z) \in W_2^{(1)}(\Omega\setminus\overline{D})$. Для этого в силу леммы 1 и уравнения (2) достаточно показать, что $u \in L_2(\Omega\setminus\overline{D})$. Докажем, что $u \in L_2(\Omega\setminus G_{R_0})$. Ясно, что тогда $u(r, \varphi, z)$ будет принадлежать $L_2(\Omega\setminus\overline{D})$.

Из соотношения (20) в силу равенства Парсеваля при любом $r \ge R_0$ имеем

$$\int_{C_r} |u(r, \varphi, z)|^2 dS = r\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=p+1}^{+\infty} |\tilde{\alpha}_{nm}|^2 K_n^2\left(\sqrt{\gamma_m^2-k^2}\,r\right), \tag{21}$$

$$\int_{C_r} \left|\frac{\partial u(r, \varphi, z)}{\partial r}\right|^2 dS = r\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=p+1}^{+\infty} |\tilde{\alpha}_{nm}|^2 (\gamma_m^2 - k^2)\left[K_n'\left(\sqrt{\gamma_m^2-k^2}\,r\right)\right]^2, \tag{22}$$

$$\int_{C_r} \left|\frac{\partial u_{M,N}(r, \varphi, z)}{\partial \varphi}\right|^2 dS = r\sum_{n=-N}^{N}\sum_{m=p+1}^{M} |\tilde{\alpha}_{nm}|^2 n^2 K_n^2\left(\sqrt{\gamma_m^2-k^2}\,r\right), \tag{23}$$

$$\int_{C_r} \left|u_{M,N}(r, \varphi, z)\right|^2 dS = r\sum_{n=-N}^{N}\sum_{m=p+1}^{M} |\tilde{\alpha}_{nm}|^2 K_n^2\left(\sqrt{\gamma_m^2-k^2}\,r\right), \tag{24}$$

где $u_{M,N}(r, \varphi, z)$ — частичная сумма ряда (20) вида

$$u_{M,N}(r, \varphi, z) = \sum_{n=-N}^{N}\sum_{m=p+1}^{M} \tilde{\alpha}_{nm} K_n\left(\sqrt{\gamma_m^2-k^2}\,r\right)\sin(\gamma_m z) e^{in\varphi}.$$

Интегрируя равенство (24) по r в пределах от R_0 до $+\infty$ с учетом соотношения (13) из [10, с. 104] и асимптотических формул [11]

$$K_n(x) = \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} e^{-x}(1 + O(1/x)), \quad K_n'(x) = -\left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} e^{-x}(1 + O(1/x)), \quad x \to +\infty,$$

получаем

$$\int\limits_{\Omega/\overline{G}_{R_0}} \left|u_{M,N}(r,\varphi,z)\right|^2 dV = \frac{1}{2}R_0^2 \sum_{n=-N}^{N} \sum_{m=p+1}^{M} \left|\alpha_{nm}\right|^2 \left\{\left[1 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{n^2}{(\gamma_m^2 - k^2)R_0^2}\right] K_n^2\left(\sqrt{\gamma_m^2 - k^2}\, R_0\right) - \left[K_n'\left(\sqrt{\gamma_m^2 - k^2}\, R_0\right)\right]^2\right\}.$$

Отсюда следует, что в силу сходимости рядов (21) – (23) интегралы по r в пределах от R_0 до $+\infty$ от частичных сумм ряда в правой части (21) ограничены в совокупности. Поэтому на основании теоремы Беппо Леви [12, с. 34] функция $\int_{C_r} \left|u(r,\varphi,z)\right|^2 dS$ суммируема по r на промежутке $[R_0, +\infty)$ и справедливо равенство

$$\int\limits_{R_0}^{+\infty} \int\limits_{C_r} \left|u(r,\varphi,z)\right|^2 dS dr = \int\limits_{\Omega/\overline{G}_{R_0}} \left|u(r,\varphi,z)\right|^2 dV =$$

$$= \frac{1}{2}R_0^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=p+1}^{+\infty} \left|\tilde{\alpha}_{nm}\right|^2 \left\{\left[1 + \frac{n^2}{(\gamma_m^2 - k^2)R_0^2}\right] K_n^2\left(\sqrt{\gamma_m^2 - k^2}\, R_0\right) - \right.$$

$$\left. - \left[K_n'\left(\sqrt{\gamma_m^2 - k^2}\, R_0\right)\right]^2\right\} < \infty,$$

так что $u(r,\varphi,z) \in L_2(\Omega \setminus \overline{G}_{R_0})$ и в силу изложенного выше $u \in W_2^{(1)}(\Omega \setminus \overline{D})$. Отсюда заключаем, что $u \equiv 0$ в $\Omega \setminus \overline{D}$, поскольку $k^2 \in \mathcal{A}$.

***Следствие* 1.** *Пусть $k^2 \in \mathcal{A}$. Тогда краевая задача* I *имеет не более одного решения.*

***Определение* 3.** *Назовем область D с границей ∂D класса C^2 правильной, если для любой точки $P \in \partial D$ выполняется неравенство*

$$\cos(\vec{\nu}, \hat{\ } \vec{r}) \geq 0,$$

где $\vec{\nu}$ — внешняя по отношению к D нормаль к ∂D в точке P, $\vec{r} = (x, y, 0)$ — проекция радиуса-вектора точки $P(x, y, z)$ на плоскость Oxy, $(\vec{\nu}, \hat{\ } \vec{r})$ — угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{\nu}$.

Примерами правильных областей могут служить сфера, эллипсоид, выпуклые тела вращения и др.

Теорема 3. *Пусть D — правильная область, тогда утверждение теоремы 2 справедливо при всех положительных значениях k, не совпадающих ни с одним из чисел γ_p, $p = 0, 1, 2, \ldots$.*

Для доказательства этой теоремы нам потребуется следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть v — вещественнозначная функция, принадлежащая классу $C^1(G_R \setminus \overline{D}) \cap C(\overline{G}_R \setminus D) \cap W_2^{(1)}(G_R \setminus \overline{D})$, p — произвольное вещественное число. Тогда выполняется соотношение*

$$\int\limits_{G_R \setminus \overline{D}} r^p v v_r dV = -\frac{p+1}{2} \int\limits_{G_R \setminus \overline{D}} r^{p-1} v^2 dV + \frac{R^p}{2} \int\limits_{C_R} v^2 dS - \frac{1}{2} \int\limits_{\partial D} r^p v^2 \cos(\vec{\nu}, \hat{\ } \vec{r})\, dS. \quad (25)$$

Здесь и в дальнейшем единичная нормаль $\vec{\nu}$ к ∂D направлена вне D.

Доказательство леммы. Применяя в области $G_R \setminus \overline{D}$ к функциям $P = v^2/2$ и $Q = (x/r) r^p$ формулу интегрирования по частям

$$\int\limits_{G_R\setminus\overline{D}} \frac{\partial P}{\partial x} Q dV = - \int\limits_{G_R\setminus\overline{D}} \frac{\partial Q}{\partial x} P dV + \int\limits_{\partial G_R} PQ\cos(\vec{\nu}, x) dS - \int\limits_{\partial D} PQ\cos(\vec{\nu}, x) dS,$$

получаем

$$\int\limits_{G_R\setminus\overline{D}} v\frac{\partial v}{\partial x} r^p \frac{x}{r} dV = -\frac{1}{2}\int\limits_{G_R\setminus\overline{D}} r^{p-1}\left[(p-1)\frac{x^2}{r^2}+1\right]v^2 dV +$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_{\partial G_R} v^2 r^p \frac{x}{r}\cos(\vec{\nu}, x) dS - \frac{1}{2}\int\limits_{\partial D} v^2 r^p \frac{x}{r}\cos(\vec{\nu}, x) dS.$$

Аналогично находим

$$\int\limits_{G_R\setminus\overline{D}} v\frac{\partial v}{\partial y} r^p \frac{y}{r} dV = -\frac{1}{2}\int\limits_{G_R\setminus\overline{D}} r^{p-1}\left[(p-1)\frac{y^2}{r^2}+1\right]v^2 dV +$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_{\partial G_R} v^2 r^p \frac{y}{r}\cos(\vec{\nu}, y) dS - \frac{1}{2}\int\limits_{\partial D} v^2 r^p \frac{y}{r}\cos(\vec{\nu}, y) dS.$$

Складывая почленно два последних равенства и учитывая тот факт, что $\cos(\vec{\nu}, x) = \cos(\vec{\nu}, y) = 0$ на основаниях цилиндра G_R и $\cos(\vec{\nu}, x) = x/R$, $\cos(\vec{\nu}, y) = y/R$ на G_R, имеем

$$\int\limits_{G_R\setminus\overline{D}} r^p v\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{x}{r} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{y}{r}\right) dV = -\frac{p+1}{2}\int\limits_{G_R\setminus\overline{D}} r^{p-1} v^2 dV +$$

$$+ \frac{R^p}{2}\int\limits_{C_R} v^2 dS - \frac{1}{2}\int\limits_{\partial D} r^p v^2 \left(\frac{x}{r}\cos(\vec{\nu}, x) + \frac{y}{r}\cos(\vec{\nu}, y)\right) dS.$$

Отсюда, принимая во внимание, что

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{x}{r} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{y}{r},$$

а также соотношение

$$\frac{x}{r}\cos(\vec{\nu}, x) + \frac{y}{r}\cos(\vec{\nu}, y) = \cos(\vec{r}, x)\cos(\vec{\nu}, x) + \cos(\vec{r}, y)\cos(\vec{\nu}, y) +$$

$$+ \cos(\vec{r}, z)\cos(\vec{\nu}, z) = \cos(\vec{r}, \widehat{\ } \vec{\nu}),$$

(в котором, очевидно, $\cos(\vec{r}, z) = 0$), получаем (25). Лемма доказана.

***Доказательство теоремы* 3.** Повторяя доказательство теоремы 2, убеждаемся, что решение $u(r, \varphi, z) \in \Re$ уравнения (2) в области $\Omega\setminus\overline{D}$, удовлетворяющее граничным условиям (3), (4), (11), условию ограниченности $u = O(1)$ в $\Omega\setminus\overline{D}$ и условиям излучения (6), (7), принадлежит пространству Соболева $W_2^{(1)}(\Omega\setminus\overline{D})$.

Далее, без ограничения общности (в силу условия $\operatorname{Im} k = 0$) считаем, что $u(r, \varphi, z)$ принимает вещественные значения. Имеем (пояснения ниже)

$$\int\limits_{G_R\setminus\overline{D}} r\frac{\partial u}{\partial r}\Delta u\, dV = -\int\limits_{G_R\setminus\overline{D}} \left\{\frac{\partial}{\partial x}(ru_r)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(ru_r)\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}(ru_z)\frac{\partial u}{\partial z}\right\} dV +$$

$$+\int_{C_R} r u_r \frac{\partial u}{\partial \nu} dS - \int_{\partial D} r u_r \frac{\partial u}{\partial \nu} dS = -\int_{G_R\setminus\overline{D}} \left\{ u_r \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial r}{\partial y} \right) + \right.$$

$$\left. + r\left(\frac{\partial u_r}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u_r}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u_r}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial z} \right) \right\} dV + R\int_{C_R} u_r^2 dS - \int_{\partial D} r\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 \cos(\vec{r}, \hat{}\, \vec{\nu}) dS =$$

$$= -\int_{G_R\setminus\overline{D}} \left\{ u_r^2 + r(\nabla u_r, \nabla u) \right\} dV + R\int_{C_R} u_r^2 dS - \int_{\partial D} r\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 \cos(\vec{r}, \hat{}\, \vec{\nu}) dS =$$

$$= -\int_{G_R\setminus\overline{D}} \left\{ u_r^2 + \left(r u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} u_\varphi \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + r u_z \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \right\} dV + R\int_{C_R} u_r^2 dS -$$

$$-\int_{\partial D} r\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 \cos(\vec{r}, \hat{}\, \vec{\nu}) dS = -\int_{G_R\setminus\overline{D}} u_r^2 dV + \int_{G_R\setminus\overline{D}} u_r^2 dV - \frac{R}{2}\int_{C_R} u_r^2 dS +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\partial D} r u_r^2 \cos(\vec{\nu}, \hat{}\, \vec{r}) dS - \frac{R^{-1}}{2}\int_{C_R} u_\varphi^2 dS + \frac{1}{2}\int_{\partial D} r^{-1} u_\varphi^2 \cos(\vec{\nu}, \hat{}\, \vec{r}) dS + \int_{G_R\setminus\overline{D}} u_z^2 dV -$$

$$-\frac{R}{2}\int_{C_R} u_z^2 dS + \frac{1}{2}\int_{\partial D} r u_z^2 \cos(\vec{\nu}, \hat{}\, \vec{r}) dS + R\int_{C_R} u_r^2 dS - \int_{\partial D} r\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 \cos(\vec{\nu}, \hat{}\, \vec{r}) dS =$$

$$= \int_{G_R\setminus\overline{D}} u_z^2 dV - \frac{R}{2}\int_{C_R} |\nabla u|^2 dS + \frac{1}{2}\int_{\partial D} r|\nabla u|^2 \cos(\vec{\nu}, \hat{}\, \vec{r}) dS + R\int_{C_R} u_r^2 dS -$$

$$-\int_{\partial D} r\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 \cos(\vec{\nu}, \hat{}\, \vec{r}) dS = \int_{G_R\setminus\overline{D}} u_z^2 dV + R\int_{C_R} \left(u_r^2 - \frac{|\nabla u|^2}{2} \right) dS -$$

$$-\int_{\partial D} r\left(\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 - \frac{|\nabla u|^2}{2} \right) \cos(\vec{\nu}, \hat{}\, \vec{r}) dS = \int_{G_R\setminus\overline{D}} u_z^2 dV + R\int_{C_R} \left(u_r^2 - \frac{|\nabla u|^2}{2} \right) dS -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\partial D} r\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 \cos(\vec{\nu}, \hat{}\, \vec{r}) dS. \qquad (26)$$

Первое равенство в (26) получено в результате применения в области $G_R\setminus\overline{D}$ к функциям $r(\partial u/\partial r)$ и u первой функции Грина* с учетом того факта, что на основаниях цилиндра G_R функция $u_r(\partial u/\partial \nu)$ обращается в нуль в силу граничных условий (3), (4). Второе равенство следует из того, что $(\partial u/\partial \nu) = u_r$ на C_R и формулы

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial \nu}\cos(\vec{\nu}, \hat{}\, \vec{r}) \quad \text{на} \quad \partial D. \qquad (27)$$

(Действительно, из (11) следует

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \nu}\cos(\vec{\nu}, x), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \nu}\cos(\vec{\nu}, y), \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial \nu}\cos(\vec{\nu}, z) \quad \text{на} \quad \partial D,$$

поэтому

* $u \in W_2^2(G_R \setminus \overline{D})$ согласно [8, с. 234, 235 – 236].

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{x}{r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{y}{r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos(\vec{r},x) + \frac{\partial u}{\partial y}\cos(\vec{r},y) =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}\cos(\vec{r},x) + \frac{\partial u}{\partial y}\cos(\vec{r},y) + \frac{\partial u}{\partial z}\cos(\vec{r},z) = \frac{\partial u}{\partial \nu}\cos(\vec{\nu},x)\cos(\vec{r},x) +$$

$$+ \frac{\partial u}{\partial \nu}\cos(\vec{\nu},y)\cos(\vec{r},y) + \frac{\partial u}{\partial \nu}\cos(\vec{\nu},z)\cos(\vec{r},z) = \frac{\partial u}{\partial \nu}\cos(\vec{\nu},\hat{}\,\vec{r}).)$$

Третье и четвертое равенства в (26) вытекают из выражений для градиента функции в декартовых и цилиндрических координатах и соотношения

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{x}{r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{y}{r} = \frac{\partial u}{\partial r} = u_r.$$

Пятое равенство в (26) получено в результате применения леммы 2; при этом в (25) последовательно полагали $v = u_r$, $p = 1$; $v = u_\varphi$, $p = -1$; $v = u_z$, $p = 1$. Переход к шестому и седьмому равенствам очевиден, а восьмое равенство следует из того, что $(\partial u/\partial\nu)^2 = |\nabla u|^2$ на ∂D в силу (11).

С другой стороны, используя (2), (11), соотношение (25), в котором положено $v = u$, $p = 1$, первую формулу Грина и то обстоятельство, что $u(\partial u/\partial\nu) = 0$ на основаниях цилиндра G_R, имеем

$$\int\limits_{G_R\setminus\overline{D}} r\frac{\partial u}{\partial r}\Delta u\,dV = -k^2\int\limits_{G_R\setminus\overline{D}} r\frac{\partial u}{\partial r}u\,dV = k^2\int\limits_{G_R\setminus\overline{D}} u^2dV - \frac{R}{2}k^2\int\limits_{C_R} u^2dS +$$

$$+\frac{k^2}{2}\int\limits_{\partial D} ru^2\cos(\vec{\nu},\hat{}\,\vec{r})\,dS = -\int\limits_{G_R\setminus\overline{D}} u\Delta u\,dV - \frac{R}{2}k^2\int\limits_{C_R} u^2dS =$$

$$= \int\limits_{G_R\setminus\overline{D}} |\nabla u|^2\,dV - \int\limits_{C_R} u\frac{\partial u}{\partial r}\,dS + \int\limits_{\partial D} u\frac{\partial u}{\partial \nu}\,dS - \frac{R}{2}k^2\int\limits_{C_R} u^2dS =$$

$$= \int\limits_{G_R\setminus\overline{D}} |\nabla u|^2\,dV - \int\limits_{C_R} u\frac{\partial u}{\partial r}\,dS - \frac{R}{2}\int\limits_{C_R} k^2u^2dS. \tag{28}$$

Из (26) и (28) следует

$$\int\limits_{G_R\setminus\overline{D}} \left(u_r^2 + \frac{1}{r^2}u_\varphi^2\right)dV + \frac{1}{2}\int\limits_{\partial D} r\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2\cos(\vec{\nu},\hat{}\,\vec{r})\,dS =$$

$$= R\int\limits_{C_R}\left(u_r^2 - \frac{|\nabla u|^2}{2}\right)dS + \frac{R}{2}\int\limits_{C_R} k^2u^2\,dS + \int\limits_{C_R} u\frac{\partial u}{\partial r}\,dS =: F_u(R). \tag{29}$$

Легко видеть, что поскольку u, $|\nabla u| \in L_2(\Omega\setminus\overline{D})$, существует такая последовательность $R_n \to \infty$, что $\mathcal{F}_u(R_n) \to 0$. Поэтому, учитывая, что в силу условий, наложенных на границу ∂D, $\cos(\vec{\nu},\hat{}\,\vec{r}) \ge 0$, и переходя к пределу в (29) по последовательности $R_n \to \infty$, получаем

$$\int\limits_{\Omega\setminus\overline{D}} \left(u_r^2 + \frac{1}{r^2}u_\varphi^2\right)dV = 0.$$

Таким образом, $u_r = u_\varphi = 0$ в $\Omega\setminus\overline{D}$, откуда легко следует, что $u \equiv 0$ в $\Omega\setminus\overline{D}$. Теорема доказана.

Из этой теоремы непосредственно вытекают следующие результаты.

Теорема 4. *Пусть область D — правильная. Тогда краевая задача* I *имеет не более одного решения при всех положительных значениях k, не совпадающих ни с одним из чисел γ_p, $p = 0, 1, 2, \ldots$.*

Теорема 5.* *Пусть область D — правильная. Тогда оператор A не имеет собственных значений.*

3. Существование решений краевых задач и соответствующих им граничных интегральных уравнений. Опираясь на теорему единственности и используя аппарат интегральных уравнений, исследуем разрешимость краевой задачи I.

С этой целью решение краевой задачи будем искать в виде следующей комбинации потенциалов простого и двойного слоев с непрерывной плотностью $\psi(P)$:

$$u(M) = \int\limits_{\partial D} \left\{ \frac{\partial G(M,P)}{\partial \nu_p} - i\eta G(M,P) \right\} \psi(P)\, dS_P, \quad M \in \Omega \setminus \overline{D}, \tag{30}$$

где

$$\eta \neq 0 \tag{31}$$

— произвольное вещественное число, а функция $G(M, P)$ определяется одним из следующих эквивалентных между собой представлений**:

$$G(M,P) =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \left\{ \frac{\exp\left(ik\left[r_M^2 + r_P^2 - 2r_M r_P \cos(\varphi_M - \varphi_P) + (z_M - z_P - 2nh)^2\right]^{1/2}\right)}{\left[r_M^2 + r_P^2 - 2r_M r_P \cos(\varphi_M - \varphi_P) + (z_M - z_P - 2nh)^2\right]^{1/2}} - \right.$$

$$\left. - \frac{\exp\left(ik\left[r_M^2 + r_P^2 - 2r_M r_P \cos(\varphi_M - \varphi_P) + (z_M + z_P - 2nh)^2\right]^{1/2}\right)}{\left[r_M^2 + r_P^2 - 2r_M r_P \cos(\varphi_M - \varphi_P) + (z_M + z_P - 2nh)^2\right]^{1/2}} \right\}, \tag{32}$$

$$M, P \in \Omega, \quad M \neq P,$$

$$G(M,P) =$$

$$= \frac{i}{2h} \sum_{m=0}^{\infty} \sin(\gamma_m z_M) \sin(\gamma_m z_P) H_0^{(1)}\left(\mu_m \sqrt{r_M^2 + r_P^2 - 2r_M r_P \cos(\varphi_M - \varphi_P)}\right), \tag{33}$$

$$G(M,P) = -\frac{k}{2\pi} \int\limits_C J_0\left(ka\sqrt{r_M^2 + r_P^2 - 2r_M r_P \cos(\varphi_M - \varphi_P)}\right) \times$$

$$\times \frac{\sin\left[k(1-a^2)^{1/2} \max(z_M, z_P)\right] \cos\left[k(1-a^2)^{1/2} \min(z_M, z_P) + h\right]}{(1-a^2)^{1/2} \cos\left[kh(1-a^2)^{1/2}\right]}\, a\, da, \tag{34}$$

где путь интегрирования C на комплексной плоскости a проходит из начала координат в бесконечность несколько ниже действительной оси вплоть до больших вещественных значений a, а затем продолжается вдоль этой оси. Для произвольной фиксированной точки $P \in \Omega$ функция $G(M, P)$ удовлетворяет в $\Omega \setminus \{P\}$ однородному уравнению Гельмгольца (2), однородным граничным условиям (3), (4) и условиям излучения (6), (7) на бесконечности по переменной M и является симметричной функцией относительно своих аргументов M и P.

* При других краевых условиях результат, аналогичный теореме 5, получен независимо в [3].

** Эквивалентность представлений (32) – (34) доказана в [13].

Теорема 6. *Функция* $u(M)$, *определяемая соотношением* (30), *представляет собой решение краевой задачи* I, *если* ψ *является решением интегрального уравнения*

$$\psi(M)+2\int\limits_{\partial D}\frac{\partial G(M,P)}{\partial\nu_P}\psi(P)dS_P-2i\eta\int\limits_{\partial D}G(M,P)\psi(P)dS_P = 2f(M), \qquad (35)$$

где $M\in\partial D$.

Доказательство. В силу указанных выше свойств функции $G(M,P)$ нетрудно видеть, что комбинация потенциалов простого и двойного слоев $u(M)$, определяемая соотношением (30), удовлетворяет в $\Omega\setminus\overline{D}$ однородному уравнению (2), краевым условиям (3), (4), условию ограниченности в $\Omega\setminus\overline{D}$ и условиям Свешникова (6), (7). Из представления (32) вытекает

$$G(M,P) = \frac{\exp(ikr_{MP})}{4\pi r_{MP}}+O(1), \quad r\to 0,$$

где r_{MP} — расстояние между точками M и P, поэтому на основании теорем 2.13 и 2.12 из [7] $u(M)$ непрерывно примыкает к заданным граничным условиям на ∂D, если плотность ψ представляет собой решение интегрального уравнения (35). Теорема доказана.

Определим в $C(\partial D)$ интегральные операторы K, K' и S по формулам

$$K\psi(M):= 2\int\limits_{\partial D}\frac{\partial G(M,P)}{\partial\nu_P}\psi(P)\,dS_P, \qquad (36)$$

$$K'\psi(M):= 2\int\limits_{\partial D}\frac{\partial G(M,P)}{\partial\nu_M}\psi(P)\,dS_P, \qquad (37)$$

$$S\psi(M):= 2\int\limits_{\partial D}G(M,P)\,\psi(P)\,dS_P. \qquad (38)$$

Тогда интегральное уравнение (35) можно представить в виде

$$\psi+K\psi-i\eta S\psi = 2f. \qquad (39)$$

Теорема 7. *Пусть* $k^2\in\mathcal{A}$. *Тогда интегральное уравнение* (35) *для краевой задачи* I *однозначно разрешимо при любой* $f\in C(\partial D)$.

Доказательство. В [7] показано, что оператор $K-i\eta S\colon C(\partial D)\to C(\partial D)$ является компактным, поэтому в силу теоремы 1. 16 из [7] для однозначной разрешимости уравнения (35) достаточно показать, что однородное уравнение

$$\psi+K\psi-i\eta S\psi = 0 \qquad (40)$$

имеет только тривиальное решение. Пусть $\psi\in C(\partial D)$. Тогда согласно (30) $u(M)$ ограничена в области $\Omega\setminus\overline{D}$, удовлетворяет там уравнению Гельмгольца (2), а также условиям излучения (6), (7), граничным условиям (3), (4) и в силу (30) однородному граничному условию (11). Кроме того, используя представление (34), можно показать, что $u(M)\in\mathfrak{R}$. Действительно, достаточно убедиться, что производные $\partial G(M,P)/\partial z_M$, $\partial G(M,P)/\partial\varphi_M$, $\partial G(M,P)/\partial r_M$ непрерывны вплоть до плоскостей $z=0$ и $z=-h$.

Оценим производную $\partial/\partial z_M$ от подынтегрального выражения в (34) при больших положительных a. Положим $k\,\mathrm{Im}\,(1-a^2)^{1/2}=:\alpha(a)$. Ясно, что $\alpha(a)>0$,

$\alpha(a) \asymp a$. Тогда равномерно по z_M, $-\varepsilon \le z_M \le 0$ $(0 < \varepsilon < d_1 := (1/2) \times$ $\times \inf_{N \in \partial D, Q \in S_1} r_{NQ})$, $z_P \in \partial D$ имеем

$$\left| \frac{\partial}{\partial z_M} \left\{ \frac{\sin[k(1-a^2)^{1/2} \max(z_M, z_P)] \cos[k(1-a^2)^{1/2}(\min(z_M, z_P)+h)]}{(1-a^2)^{1/2} \cos[kh(1-a^2)^{1/2}]} \right\} \right| =$$

$$= \left| \frac{\partial}{\partial z_M} \left\{ \frac{\sin[k(1-a^2)^{1/2} z_M] \cos[k(1-a^2)^{1/2}(z_P+h)]}{(1-a^2)^{1/2} \cos[kh(1-a^2)^{1/2}]} \right\} \right| =$$

$$= \left| \frac{k \cos[k(1-a^2)^{1/2} z_M] \cos[k(1-a^2)^{1/2}(z_P+h)]}{\cos[kh(1-a^2)^{1/2}]} \right| \le$$

$$\le \text{ const } \frac{e^{\alpha(a)\varepsilon} e^{\alpha(a)(h+z_P)}}{e^{\alpha(a)h}} \le \text{ const } e^{\alpha(a)(-d_1+\varepsilon)} \le$$

$$\le \text{ const } e^{-(1/2)\alpha(a)d_1} \le \text{ const } e^{-\alpha a}, \quad 0 < \alpha = \text{const}.$$

Точно так же равномерно по z_M, $-h \le z_M \le -h+\varepsilon$ $(0 < \varepsilon < d_2 := \inf_{\substack{N \in \partial D \\ Q \in S_2}} r_{NQ})$, $z_P \in \partial D$ имеем

$$\left| \frac{\partial}{\partial z_M} \left\{ \frac{\sin[k(1-a^2)^{1/2} \max(z_M, z_P)] \cos[k(1-a^2)^{1/2}(\min(z_M, z_P)+h)]}{(1-a^2)^{1/2} \cos[kh(1-a^2)^{1/2}]} \right\} \right| \le$$

$$\le \text{ const } e^{-(1/2)\alpha(a)d_2} \le \text{ const } e^{-\beta a}, \quad 0 < \beta = \text{const}.$$

Из очевидной оценки

$$\left| J_0\left(ka\sqrt{r_M^2 + r_P^2 - 2r_M r_P \cos(\varphi_M - \varphi_P)}\right) \right| \le \text{ const}$$

и двух последних неравенств следует непрерывность функции

$$\frac{\partial}{\partial z_M} \int_{\partial D} G(M,P)\psi(P)\, dS_P$$

по переменной M вплоть до плоскостей S_1, S_2. Аналогично устанавливается непрерывность функций

$$\frac{\partial}{\partial \varphi_M} \int_{\partial D} G(M,P)\psi(P)\, dS_P, \quad \frac{\partial}{\partial r_M} \int_{\partial D} G(M,P)\psi(P)\, dS_P,$$

$$\frac{\partial}{\partial z_M} \int_{\partial D} \frac{\partial G(M,P)}{\partial \nu_P} \psi(P)\, dS_P, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi_M} \int_{\partial D} \frac{\partial G(M,P)}{\partial \nu_P} \psi(P)\, dS_P,$$

$$\frac{\partial}{\partial r_M} \int_{\partial D} \frac{\partial G(M,P)}{\partial \nu_P} \psi(P)\, dS_P$$

по M вплоть до S_1, S_2, поэтому в силу (30) $u \in C^1(\overline{\Omega} \setminus \overline{D})$. Кроме того, на основании теоремы 3. 27 из [7] $u(M)$ удовлетворяет условию (1), поэтому $u \in \Re$. Следовательно, $u = 0$ в $\Omega \setminus D$ в силу теоремы 2 и на основании следствий 2. 14 и 2. 20 из [7] получаем $u_- = -\psi$, $\partial u_- / \partial \nu = -i\eta\psi$ на ∂D. (Индексами "+" и "–"

будем обозначать пределы, полученные при приближении к границе ∂D из областей $\Omega \setminus \overline{D}$ и D соответственно, т. е.

$$v_+(M) = \lim_{\substack{P \to M \\ P \in \Omega\setminus\overline{D}}} v(P), \quad v_-(M) = \lim_{\substack{P \to M \\ P \in D}} v(P), \quad M \in \partial D.)$$

Далее из первой формулы Грина находим

$$i\eta \int_{\partial D} |\psi|^2 dS = \int_D \left(|\operatorname{grad} u|^2 - k^2|u|^2\right) dV.$$

Взяв мнимую часть от обеих частей, получим

$$\eta \int_{\partial D} |\psi|^2 \, dS = 0,$$

откуда в силу (31) следует, что $\psi = 0$ на ∂D. Теорема доказана.

Из теорем 2, 6, 7 непосредственно вытекает следующий результат.

Теорема 8. *Пусть* $k^2 \in \mathcal{A}$. *Тогда краевая задача* I *однозначно разрешима.*

Теорема 9. *Пусть* D *— правильная область. Тогда утверждение теоремы* 7 *справедливо при всех значениях* k, *не совпадающих ни с одним из чисел* γ_p, $p = 0, 1, 2, \ldots$.

Доказательство теоремы 9 дословно повторяет доказательство теоремы 7, в котором ссылку на теорему 2 следует заменить ссылкой на теорему 3.

Из теорем 6, 3 и 9 вытекает следующая теорема.

Теорема 10. *Пусть область* D *— правильная. Тогда утверждение теоремы* 8 *справедливо при всех положительных значениях* k, *не совпадающих ни с одним из чисел* γ_p, $p = 0, 1, \ldots$.

Отметим, что если известны собственные значения λ_i, $i = 1, 2, \ldots$ $(0 < \lambda_1 \le \le \lambda_2 \le \ldots, \ \lambda_k \to \infty, \ k \to \infty)$ внутренней задачи Неймана

$$\Delta u + \lambda u = 0 \quad \text{в} \quad D, \tag{41}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на} \quad \partial D, \quad u \in \mathfrak{R}(D), \tag{42}$$

то можно получить более простое, чем (39), однозначно разрешимое интегральное уравнение для краевой задачи I. (В (42) через $\mathfrak{R}(D)$ обозначено линейное пространство комплекснозначных функций $u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$, для которых нормальная производная на границе существует в том смысле, что предел (1), в котором ν_P — единичная внутренняя по отношению к области D нормаль в точке $P \in \partial D$, существует равномерно на ∂D.) С этой целью будем искать решение задачи I в виде потенциала двойного слоя

$$u(M) = \int_{\partial D} \frac{\partial G(M, P)}{\partial \nu_P} \psi(P) \, dS_P, \quad M \in \Omega \setminus \overline{D}, \tag{43}$$

с непрерывной плотностью ψ. Ясно, что функция $u(M)$, определенная соотношением (43), представляет собой решение задачи I при условии, что плотность ψ является решением интегрального уравнения

$$\psi + K\psi = 2f. \tag{44}$$

Чтобы установить условия разрешимости интегрального уравнения (44), введем в рассмотрение линейное пространство

$$U := \{u|_{\partial D} \mid u \in \mathfrak{R}(D) \mid, \ \Delta u + k^2 u = 0 \ \text{ в } \ D, \ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \ \text{ на } \ \partial D\}.$$

Пусть $\operatorname{Ker}(\mathrm{I} + K)$ — ядро оператора $\mathrm{I} + K$.

Теорема 11. *Пусть* $k^2 \in \mathcal{A}$. *Тогда* $\operatorname{Ker}(\mathrm{I} + K) = U$.

Доказательство. Пусть $\psi \in \operatorname{Ker}(\mathrm{I} + K)$. Тогда потенциал двойного слоя, определенный соотношением

$$u(M) = \int_{\partial D} \frac{\partial G(M, P)}{\partial \nu_P} \psi(P)\, dS_P, \quad M \in \Omega \setminus \partial D, \tag{45}$$

удовлетворяет в $\Omega \setminus \overline{D}$ уравнению Гельмгольца (2), граничным условиям (3), (4), (11), условию $u = O(1)$ в $\Omega \setminus \overline{D}$, условиям излучения (6), (7) на бесконечности и принадлежит классу $\mathfrak{R}$. В силу теоремы 2 $u = 0$ в $\Omega \setminus D$ и, значит, $\partial u_+ / \partial \nu = 0$ на ∂D. Применяя теорему 2. 21 из [7], заключаем, что $u \in \mathfrak{R}(D)$, удовлетворяет в области D уравнению (2) и однородному граничному условию $\partial u_- / \partial \nu = 0$. В силу следствия 2. 14 из [7] находим $\psi = u_+ - u_- = -u_-$, поэтому $\psi \in U$ и, значит, $\operatorname{Ker}(\mathrm{I} + K) \subset U$.

Прежде чем доказывать обратное включение, отметим, что используя представление (32) для функции $G(M, P)$, нетрудно показать, что если функция $u \in \mathfrak{R}(D)$ и удовлетворяет уравнению Гельмгольца (2) в D, то справедливо интегральное представление

$$\int_{\partial D} \left\{ u(P) \frac{\partial G(M, P)}{\partial \nu_P} - \frac{\partial u(P)}{\partial \nu_P} G(M, P) \right\} dS_P = \begin{cases} -u(M), & M \in D, \\ 0, & M \in \Omega \setminus \overline{D}. \end{cases} \tag{46}$$

Пусть теперь $\psi \in U$, т. е. $\psi \in u|_{\partial D}$, где u — решение однородной внутренней задачи Неймана (41), (42). Тогда из интегрального представления (46) находим

$$\int_{\partial D} \frac{\partial G(M, P)}{\partial \nu_P} \psi(P)\, dS_P = 0, \quad M \in \Omega \setminus \overline{D}.$$

Опуская точку M на ∂D и используя теорему 2. 13 из [7], получаем $\psi + K\psi = 0$, т. е. $\psi \in N(I + K)$. Теорема доказана.

Аналогично устанавливается следующий результат.

Теорема 12. *Пусть D — правильная область. Тогда утверждение теоремы* 11 *справедливо при всех положительных значениях k, не совпадающих ни с одним из чисел* γ_p, $p = 0, 1, 2, \ldots$.

Теорема 13. *Пусть* $k^2 \in \mathcal{A}$ *и не является собственным значением внутренней задачи Неймана* (41), (42). *Тогда интегральное уравнение* (44) *для краевой задачи* I *однозначно разрешимо при любой правой части* $f \in C(\partial D)$.

Доказательство. Поскольку k не является собственным значением внутренней задачи Неймана, то $U = \{0\}$. Тогда на основании теоремы 11 заключаем, что $\operatorname{Ker}(I + K) = \{0\}$. Учитывая компактность оператора K в $C(\partial D)$, установленную в [1], и применяя теорему 1. 30 из [7], получаем, что неоднородное интегральное уравнение (44) имеет единственное решение, что и требовалось доказать.

Если область D — правильная, то, повторяя доказательство предыдущей теоремы с применением в нем теоремы 3 вместо теоремы 2, приходим к следующему результату.

Теорема 14. *Пусть область* D *— правильная. Тогда при любом положительном* k, *не совпадающем ни с одним из чисел* γ_p *и таком, что* k^2 *не является собственным значением внутренней задачи Неймана* (41), (42), *интегральное уравнение* (44) *однозначно разрешимо при любой правой части* $f \in \in C(\partial D)$.

Отметим, что аналогично [1, с. 61] интегральные уравнения для краевых задач I – III можно также получить исходя из интегрального представления решения, устанавливаемого в следующей теореме.

Теорема 15. *Пусть* $u \in \mathfrak{R}$ *является решением уравнения Гельмгольца* (2) *в* $\Omega \setminus \overline{D}$, *ограниченным в этой области и удовлетворяющим граничным условиям* (3), (4) *и условиям излучения* (6), (7). *Тогда*

$$\int_{\partial D} \left\{ u(P) \frac{\partial G(M,P)}{\partial \nu_P} - \frac{\partial u(P)}{\partial \nu_P} G(M,P) \right\} dS_P = \begin{cases} 0, & M \in D, \\ u(M), & M \in \Omega \setminus \overline{D}. \end{cases}$$

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 7. 11 из [1], только по ходу рассуждений вместо условия (6. 5) из [1] используются соотношения (6), (7).

В заключение отметим, что еще одним способом выделения решения в случае $\operatorname{Im} k = 0$ является принцип предельного поглощения. Справедлива следующая теорема.

Теорема 16 (принцип предельного поглощения). *Пусть* $k^2 \in \mathcal{A}$. *Тогда решение* u_ε *уравнения* $\Delta u_\varepsilon + (k^2 + i\varepsilon)u_\varepsilon = 0$, $\varepsilon > 0$, *удовлетворяющее граничным условиям* (3) – (5) *и условию* $u_\varepsilon = O(1)$ *в* $\Omega \setminus \overline{D}$, *при* $\varepsilon \to +0$ *стремится к решению* u *задачи* I *в следующем смысле:* $u_\varepsilon \to u$ *в любой области* $G_R \setminus \overline{D}$ *в метрике пространства* $W_2^{(1)}(G_R \setminus \overline{D})$; $u_\varepsilon \to u$ *в любой конечной внутренней подобласти* ω *из* $\Omega \setminus \overline{D}$ *в метрике* $W_2^{(2)}(\omega)$. *Кроме того,* $u_\varepsilon \to u$ *равномерно в любой внутренней подобласти из* $\Omega \setminus \overline{D}$.

Автор выражает благодарность В. К. Дзядыку за полезное обсуждение результатов.

1. *Подлипенко Ю. К.* Теория потенциала для задач дифракции в клине и слое. – Киев, 1988. – 68 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 88. 55).
2. *Подлипенко Ю. К.* Краевые задачи для уравнения Гельмгольца в некоторых областях с бесконечными границами.– Киев, 1990.– 59 с.– (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 90. 47).
3. *Morgenröther K., Werner P.* On the instability of resonances in parallel-plane waveguides // Math. Methods Appl. Sci. – 1989. – **11**, № 3. – P. 279 – 315.
4. *Jones D. S.* The eigenvalues of $\nabla^2 u + \lambda u = 0$ // Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1953. – **49**, № 4. – P. 668 – 684.
5. *Свешников А. Г.* О принципе излучения // Докл. АН СССР.– 1950.– **75**, № 5.– С. 917 – 920.
6. *Ильинский А. С., Шестопалов Ю. В.* Применение методов спектральной теории в задачах распространения волн. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989. – 184 с.
7. *Колтон Д., Кресс Р.* Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. – М.: Мир, 1987. – 311 с.
8. *Мизохата С.* Теория уравнений с частными производными. – М.: Мир, 1977. – 383 с.
9. *Кузнецов Д. С.* Специальные функции. – М.: Высш. шк., 1965. – 241 с.
10. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции: В 3-х т. – М. : Наука, 1974. – Т. 2. – 295 с.
11. *Справочник* по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 830 с.
12. *Шилов Г. Е.* Интеграл, мера и производная. – М. : Наука, 1967. – 219 с.
13. *Распространение* волн и подводная акустика / Под ред. Дж. Б. Келлера и Дж. С. Пападакиса. – М.: Мир, 1980. – 229 с.

Получено 08. 10. 92