УДК 517.92

И. Н. Щитов, канд. физ.-мат. наук (Ленингр. ин-т киноинженеров)

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ

При условии, что вырожденная система имеет экспоненциально устойчивое интегральное многообразие, для возмущенной системы построено асимптотическое разложение задачи Коши, обобщающее известное разложение А. Б. Васильевой.

За умови, що вироджена система має експоненціально стійкий інтегральний многовид, для збуреної системи побудовано асимптотичний розклад розв'язку задачі Коші, яке узагальнює відомий розклад А. Б. Васильєвої.

1. Для системы с малым параметром при производной

$$\frac{dx}{d\tau} = X(x, z), \quad \varepsilon \frac{dz}{d\tau} = Z(x, z)$$

асимптотика решений на промежутке $[0, T]$ построена в работах А. Н. Тихонова [1] и А. Б. Васильевой [2]. Если ввести новое время $t = \tau/\varepsilon$, то система переходит в слабо возмущенную:

$$\dot{x} = \varepsilon X(x, z), \quad \dot{z} = Z(x, z)$$

($\dot{x} = dx/dt$, $\dot{z} = dz/dt$), а сингулярность задачи проявляется в том, что асимптотика строится на асимтотически большом промежутке $[0, T/\varepsilon]$. Предположения работ [1, 2] означают, что соответствующая вырожденная ($\varepsilon = 0$) система

$$\dot{x} = 0, \quad \dot{z} = Z(x, z)$$

имеет в расширенном фазовом пространстве $R^{n+1} = R_t \times R_x^l \times R_z^m$ асимптотически устойчивое интегральное многообразие вида S: $z = F(x)$ ($F(x)$ — корень уравнения $Z(x, z) = 0$), заполненное постоянными решениями $x = \text{const}$, $z = F(x) = \text{const}$.

Исследование этой задачи методами теории интегральных многообразий проводилось в работах [3 – 5].

Более общая система

$$\frac{dx}{d\tau} = X(\tau/\varepsilon, x, z), \quad \varepsilon \frac{dz}{d\tau} = Z(\tau/\varepsilon, x, z)$$

изучалась в [6, 7] в предположении, что соответствующая вырожденная система

$$\dot{x} = 0, \quad \dot{z} = Z(t, x, z)$$

имеет в R^{n+1} равномерно асимптотически устойчивое интегральное многообразие S: $z = F(t, x)$, образованное решениями этой системы вида $x = \text{const}$, $z = F(t, x)$.

В настоящей статье рассматривается дальнейшее обобщение этой задачи: для решений системы

$$\dot{x} = X_0(t, x, z) + \varepsilon X_1(t, x, z), \quad \dot{z} = Z_0(t, x, z) + \varepsilon Z_1(t, x, z) \tag{1}$$

(которая легко сводится к сингулярно возмущенной заменой $\tau = \varepsilon t$) на промежутке $[0, T/\varepsilon]$ построены асимптотические разложения решений в предположении, что вырожденная система

$$\dot{x} = X_0(t, x, z), \quad \dot{z} = Z_0(t, x, z) \tag{2}$$

имеет обладающее соответствующим свойством притяжения интегральное многообразие S, задаваемое уравнением $z = F(t, x)$.

Большое число работ (см., например, [8 – 10]) посвящено построению интегральных многообразий возмущенной системы (1), но асимптотика решений, лежащих на этих многообразиях и в их окрестностях, найдена только в некоторых частных случаях [1 – 7], [11 – 13].

Основные результаты статьи непосредственно переносятся на случай более общей системы с правыми частями вида $X(t, x, z, \varepsilon t, \varepsilon)$, $Z(t, x, z, \varepsilon t, \varepsilon)$; случай системы, явно зависящей от $\tau = \varepsilon t$, можно также формально свести к рассмотренному, добавив к (1) уравнение $\dot{\tau} = \varepsilon$ для новой медленной переменной τ.

2. Переходя к точной постановке задачи, будем предполагать, что выполнены следующие условия.

I. Функции $X_0(t, x, z)$, $Z_0(t, x, z)$ и $X_1(t, x, z)$, $Z_1(t, x, z)$ определены, непрерывны и ограничены вместе со своими производными по x, z до порядков $N+2$ и $N+1$ соответственно в некоторой области $Q \subset [0, \infty] \times R_x^l \times R_z^m$.

II.Функция $F(t, x)$ определена, непрерывна и имеет ограниченные производные до порядка N в области $D \subset [0, \infty] \times R_x^l$; $\forall\, (t, x) \in D$, $(t, x, F(t, x)) \in Q$ и уравнение $z = F(t, x)$ определяет в Q интегральное многообразие S вырожденной системы (2), т. е. если ввести обозначение $x = \psi_1(t, t_0, x_0, z_0)$, $z = \psi_2(t, t_0, x_0, z_0)$ для решения системы (2), проходящего через точку (t_0, x_0, z_0), то из условия $(t_0, x_0, z_0) \in S$ будет следовать, что

$$(t, \psi_1(t, t_0, x_0, z_0), \psi_2(t, t_0, x_0, z_0)) \in S \quad \forall\, t \geq t_0.$$

Будем предполагать дополнительно, что S лежит в Q вместе с некоторой ρ -окрестностью.

Из условия II вытекает, что для решений, лежащих на S, $z_0 = F(t_0, x_0)$ и

$$\psi_2(t, t_0, x_0, z_0) = F(t, \psi_1(t, t_0, x_0, z_0)), \tag{3}$$

поэтому функция $\varphi(t, t_0, x_0) = \psi_1(t, t_0, x_0, F(t_0, x_0))$ является решением системы

$$\dot{x} = X_0(t, x, F(t, x)), \tag{4}$$

которая получается из (2) „сведением" на S [5, 8, 10].

Дифференцируя (3) по t, полагая затем $t = t_0$ и возвращаясь к t, x, получаем следующее тождество для $F(t, x)$:

$$F_t'(t, x) + F_x'(t, x) X_0(t, x, F(t, x)) = Z_0(t, x, F(t, x)). \tag{5}$$

Будем называть системой в вариациях для интегрального многообразия S систему относительно ξ и η, которая получается при подстановке в (2) выражений

$$x = \varphi(t, t_0, x_0) + \xi, \quad z = F(t, \varphi(t, t_0, x_0) + \xi) + \eta$$

и линеаризации по ξ и η. С учетом тождества (5) эта система принимает вид

$$\dot{\xi} = [\, X_{0x}'(t, x_s(t), z_s(t)) + X_{0z}'(t, x_s(t), z_s(t))\, F_x'(t, x_s(t))]\, \xi + \\ + X_{0z}'(t, x_s(t), z_s(t))\, \eta, \tag{6}$$

$$\dot{\eta} = [\, Z_{0z}'(t, x_s(t), z_s(t)) - F_x'(t, x_s(t))\, X_{0z}'(t, x_s(t), z_s(t))]\, \eta. \tag{7}$$

Здесь и дальше для сокращения записи будут использоваться обозначения $x_b(t) = \psi_1(t, t_0, x_0, z_0)$, $z_b(t) = \psi_2(t, t_0, x_0, z_0)$ для произвольных решений вырожденной системы (2) и $x_s(t) = \varphi(t, t_0, x_0)$, $z_s(t) = F(t, \varphi(t, t_0, x_0))$ для решений этой системы, лежащих на S.

III. Нормированная при $t = t_0$ фундаментальная матрица $\partial\varphi/\partial x_0 (t, t_0, x_0)$ системы в вариациях

$$\dot{\xi} = [\, X'_{0x}(t, x_s(t), z_s(t)) + X'_{0z}(t, x_s(t), z_s(t))\, F'_x(t, x_s(t))\,]\,\xi \qquad (8)$$

для решения $\varphi(t, t_0, x_0)$ системы (4) удовлетворяет для некоторого $C > 0$ условиям: $\forall\ (t_0, x_0) \in D,\ \forall\ t \geq t_0$

$$\left\| \frac{\partial\varphi}{\partial x_0}(t, t_0, x_0) \right\| \leq C, \quad \left\| \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_0^2}(t, t_0, x_0) \right\| \leq C.$$

IV. Нормированная при $t = t_0$ фундаментальная матрица $\Phi(t, t_0, x_0)$ системы (7) удовлетворяет для некоторых $C > 0$ и $\alpha > 0$ оценке

$$\| \Phi(t, t_0, x_0) \| \leq C \exp[-\alpha(t - t_0)] \ \ \forall\ (t_0, x_0) \in D, \ \forall\ t \geq t_0.$$

Замечания. 1. Из условий III и IV вытекает, что существует гиперплоскость R^{l+m}, задаваемая уравнением вида $\xi = A\eta$, такая, что если $\xi(t_0) = A\eta(t_0)$, то для соответствующего решения системы (6), (7) $\|\xi(t)\| \leq C\exp[-\alpha(t - t_0)]$, $\|\eta(t)\| \leq C\exp[-\alpha(t - t_0)]$.

2. Заменой $y = z - F(t, x)$ систему (2) можно преобразовать в систему, имеющую интегральное многообразие вида S: $y = 0$, для которой в силу известных результатов [14, 15] из условий III и IV следует экспоненциальная устойчивость S. Поэтому для любой точки (t_0, x_0, z_0) из достаточно малой окрестности S найдется точка $(t_0, x_s) \in D$ такая, что решение системы (2), проходящее через точку (t_0, x_0, z_0), экспоненциально притягивается к лежащему на S решению, проходящему через точку $(t_0, x_s, F(t_0, x_s))$, т. е.

$$\| \psi_1(t, t_0, x_0, z_0) - \varphi(t, t_0, x_s) \| \leq C\exp[-\alpha(t - t_0)],$$

$$\| \psi_2(t, t_0, x_0, z_0) - F(t, \varphi(t, t_0, x_s)) \| \leq C\exp[-\alpha(t - t_0)] \qquad (9)$$

(здесь и дальше будем для упрощения записи использовать одни и те же обозначения C, α и т. д. для, вообще говоря, различных постоянных).

Будем говорить, следуя [1, 2], что точка $(t_0, x_0, z_0) \in Q$ принадлежит области влияния V интегрального многообразия S, если проходящее через нее решение вырожденной системы (2) определено для всех $t \geq t_0$ и притягивается к S.

В силу замечания 2 если выполнены условия III, IV и $(t_0, x_0, z_0) \in V$, то проходящее через эту точку решение системы (2) экспоненциально притягивается к некоторому лежащему на S решению системы (2), т. е. существует точка $(t_0, x_s) \in D$, для которой справедливы оценки (9).

V. Постоянные C и α, входящие в (9), можно выбрать общими для всех $(t_0, x_0, z_0) \in V$.

3. Асимптотическое разложение решений возмущенной системы (1), отвечающих начальным условиям $x(t_0) = x_0$, $z(t_0) = z_0$, где $(t_0, x_0, z_0) \in V$, будем искать в виде некоторых разложений по степеням ε, обобщающих соответствующие разложения из [1, 2]:

$$x(t, \varepsilon) = \bar{x}(t, \varepsilon) + \Pi x(t, \varepsilon) =$$

$$= \bar{x}_0(t, \varepsilon) + \varepsilon\,\bar{x}_1(t, \varepsilon) + \ldots + \Pi_0 x(t, \varepsilon) + \varepsilon\,\Pi_1 x(t, \varepsilon) + \ldots, \qquad (10a)$$

$$z(t,\varepsilon) = \bar z(t, \bar x(t,\varepsilon), \varepsilon) + \Pi z(t,\varepsilon) =$$
$$= \bar z_0(t, x(t,\varepsilon)) + \varepsilon \bar z_1(t, \bar x(t,\varepsilon)) + \ldots + \Pi_0 z(t,\varepsilon) + \varepsilon \Pi_1 z(t,\varepsilon) + \ldots, \tag{10b}$$

при этом на члены вида $\Pi_i x$ и $\Pi_i z$ налагаются дополнительные условия: $\Pi_i x \to 0$, $\Pi_i z \to 0$ при $t \to \infty$, т. е. считается, что они имеют погранслойный характер.

Выделим в функциях, входящих в правые части (1), погранслойные члены, полагая [2]:

$$X_0(t, \bar x + \Pi x, \bar z(t, \bar x) + \Pi z) = X_0(t, \bar x, \bar z(t, \bar x)) + [X_0(t, \bar x + \Pi x, \bar z(t, \bar x) +$$
$$+ \Pi z) - X_0(t, \bar x, \bar z(t, \bar x))] = X_0(t, \bar x, \bar z(t, \bar x)) + \Pi X_0(t, \bar x, \bar z, \Pi x, \Pi z),$$

аналогично для X_1, Z_0, Z_1.

Подставляя в (1) $x = \bar x + \Pi x$, $z = \bar z(t, \bar x) + \Pi z$ и приравнивая в левых и правых частях отдельно члены погранслойного типа, получаем

$$\dot{\bar x} = X_0(t, \bar x, \bar z(t, \bar x)) + \varepsilon X_1(t, \bar x, \bar z(t, \bar x)), \tag{11}$$

$$\bar z'_t + \bar z'_x\, [X_0(t, \bar x, \bar z) + \varepsilon X_1(t, \bar x, \bar z)] = Z_0(t, \bar x, \bar z) + \varepsilon Z_1(t, \bar x, \bar z) \tag{12}$$

и

$$\begin{aligned} \Pi \dot x &= \Pi X_0(t, \bar x, \bar z, \Pi x, \Pi z) + \varepsilon \Pi X_1(t, \bar x, \bar z, \Pi x, \Pi z), \\ \Pi \dot z &= \Pi Z_0(t, \bar x, \bar z, \Pi x, \Pi z) + \varepsilon \Pi Z_1(t, \bar x, \bar z, \Pi x, \Pi z). \end{aligned} \tag{13}$$

Заменяя в (12) $\bar z$ на $\bar z_0 + \varepsilon \bar z_1 + \ldots$, раскладывая правые части по ε и приравнивая члены с одинаковыми степенями ε, приходим к серии систем уравнений в частных производных первого порядка относительно функций $\bar z_i(t, x)$ (поскольку здесь $\bar x$ рассматривается как независимая переменная, можно вместо $\bar x$ писать x):

$$\bar z'_{0t}(t,x) + \bar z'_{0x}(t,x)\, X_0(t, x, \bar z_0(t,x)) = Z_0(t, x, \bar z_0(t,x)), \tag{14}$$

$$\bar z'_{kt} + \bar z'_{kx} X_0(t, x, \bar z_0) = [Z'_{0z}(t, x, \bar z_0) - \bar z'_{0x} X'_{0z}(t, x, \bar z_0)]\, \bar z_k +$$
$$+ Z_k(t, x, \bar z_0, \ldots, \bar z_{k-1}) \tag{15}$$

для $k = 1, 2, \ldots$.

Подставляя в (11) разложения $\bar x = \bar x_0 + \varepsilon \bar x_1 + \ldots$, $\bar z = \bar z_0 + \varepsilon \bar z_1 + \ldots$, раскладывая правые части, включая входящие в них выражения $\bar z_i(t, \bar x) = \bar z_i(t, \bar x_0 + \varepsilon \bar x_1 + \ldots)$, по степеням ε и приписывая членам вида $\varepsilon^k f$ порядок k, если f зависит от $\bar x_k$, и порядок $k+1$ в противном случае, получаем, сравнивая в левых и правых частях члены одного порядка и используя обозначение $[f]_0 = f(t, \bar x_0, \bar z_0(t, \bar x_0))$:

$$\dot{\bar x}_0 = X_0(t, \bar x_0, \bar z_0(t, \bar x_0)) + \varepsilon X'_{0z}(t, \bar x_0, \bar z_0(t, \bar x_0))\, \bar z_1(t, \bar x_0) +$$
$$+ \varepsilon X_1(t, \bar x_0, \bar z_0(t, \bar x_0)), \tag{16}$$

$$\dot{\bar x}_k = [X'_{0x} + X'_{0z} \bar z'_{0x}]_0\, \bar x_k + \varepsilon X_{k+1}(t, \bar x_0, \ldots, \bar x_k) \tag{17}$$

для $k = 1, 2, \ldots$. Здесь функции X_{k+1} зависят не только от $\bar x_0, \ldots, \bar x_k$, но и от функций $\bar z_0, \ldots, \bar z_{k-1}$ и их производных, вычисленных в точке $(t, \bar x_0(t))$.

По условию (t_0, x_0, z_0) принадлежит области влияния V интегрального многообразия S, поэтому решение $x_b(t) = \psi_1(t, t_0, x_0, z_0)$, $z_b(t) = \psi_2(t, t_0, x_0, z_0)$ вырожденной системы (2), проходящее через (t_0, x_0, z_0), притягивается к некоторому лежащему на S решению этой системы $x_s(t) = \varphi(t, t_0, x_s)$, $z_s(t) = F(t, x_s(t))$. Подставляем разложения (10) в (13), полагая при этом $\bar{x}_0(t, \varepsilon) = x_s(t) + \varepsilon\,\Delta x(t, \varepsilon)$; раскладывая правые части по ε и сравнивая члены с одинаковыми степенями ε, получаем

$$\Pi_0\dot{x} = X_0(t, x_s(t) + \Pi_0 x, \bar{z}_0(t, x_s(t)) + \Pi_0 z) - X_0(t, x_s(t), \bar{z}_0(t, x_s(t))),$$
$$\Pi_0\dot{z} = Z_0(t, x_s(t) + \Pi_0 x, \bar{z}_0(t, x_s(t)) + \Pi_0 z) - Z_0(t, x_s(t), \bar{z}_0(t, x_s(t))), \tag{18}$$

и для $k = 1, 2, \ldots$

$$\Pi_k\dot{x} = X'_{0x}\,\Pi_k x + X'_{0z}\,\Pi_k z + F_k,$$
$$\Pi_k\dot{z} = Z'_{0x}\,\Pi_k x + Z'_{0z}\,\Pi_k z + G_k, \tag{19}$$

где $X'_{0x}, X'_{0z}, Z'_{0x}, Z'_{0z}$ вычислены в точке $(t, x_s(t) + \Pi_0 x, \bar{z}_0(t, x_s(t)) + \Pi_0 z)$, а F_k и G_k зависят от $\Pi_0 x, \Pi_0 z, \ldots, \Pi_{k-1}x, \Pi_{k-1}z$.

Системы (14) – (19) дополняются начальными условиями, получающимися с использованием (10):

$$\bar{x}_0(t_0) + \Pi_0 x(t_0) = x_0, \quad \bar{z}_0(t_0, \bar{x}_0(t_0)) + \Pi_0 z(t_0) = z_0,$$
$$\bar{x}_k(t_0) + \Pi_k x(t_0) = 0, \; k = 1, 2, \ldots, \tag{20}$$
$$\bar{z}_k(t_0, \bar{x}_0(t_0)) + \Pi_k z(t_0) + z'_{0x}(t_0, \bar{x}_0(t_0))\,\bar{x}_k(t_0) = p_k, \; k = 1, 2, \ldots,$$

где p_k выражается через $\bar{x}_0(t_0), \ldots, \bar{x}_{k-1}(t_0)$, а также через значения $\bar{z}_0, \ldots, \bar{z}_{k-1}$ и их производные в точке $(t_0, \bar{x}_0(t_0))$.

4. Функции $\bar{x}_k, \bar{z}_k, \Pi_k x, \Pi_k z$ определяются теперь следующим образом.

Из (5) и (14) следует, что можно положить $\bar{z}_0(t, x) = F(t, x)$, после чего из уравнений (15) последовательно находятся для $k = 1, 2, \ldots$ функции $\bar{z}_k(t, x)$. При этом выбор конкретного решения системы (15) проводится либо с учетом дополнительных свойств системы (1) (например, если правые части (1) и $F(t, x)$ не зависят от t или периодичны по t, то того же можно потребовать от решений $\bar{z}_k(t, x)$) либо просто используется начальное условие $\bar{z}_k(t_0, x) \equiv 0$).

Для того чтобы найти $\bar{z}_k(t, x)$, введем функцию $y_k(t, t_0, y_0) = \bar{z}_k(t, \varphi(t, t_0, y_0))$, тогда в силу (15) и выбора $\bar{z}_0(t, x)$ имеем

$$\dot{y}_k = [Z'_{0z} - F'_x X'_{0z}]\,y_k + Z_k(t, \varphi(t, t_0, y_0)).$$

Отсюда, например, для $\bar{z}_k(t_0, x) \equiv 0$, используя $\Phi(t, t_0, x_0)$, из условия IV находим

$$y_k(t, t_0, y_0) = \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau, \varphi(\tau, t_0, y_0))\,Z_k(\tau, \varphi(\tau, t_0, y_0))\,d\tau.$$

Полагая здесь $y_0 = \varphi(t_0, t, x)$ и учитывая, что $y_k(t, t_0, \varphi(t_0, t, x)) = \bar{z}_k(t, x)$, получаем

$$\bar{z}_k(t, x) = \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau, \varphi(\tau, t, x))\,Z_k(\tau, \varphi(\tau, t, x))\,d\tau. \tag{21}$$

В силу II – IV все $\bar{z}_k(t, x)$ и их производные по x ограничены.

После того, как $\bar{z}_k(t, x)$ построены, последовательно определяются для $k = 0, 1, 2, \ldots$ остальные функции из разложений (10).

В силу сделанного выбора $\bar{z}_0$ имеем $\bar{z}_0(t, x_s(t)) = F(t, x_s(t)) = z_s(t)$, поэтому решением системы (18), очевидно, будет $\Pi_0 x = x_b(t) - x_s(t)$, $\Pi_0 z = z_b(t) - z_s(t)$ и согласно (9) $\|\Pi_0 x\| \le C\exp[-\alpha(t-t_0)]$, $\|\Pi_0 z\| \le C\exp[-\alpha(t-t_0)]$, т. е. $\Pi_0 x$ и $\Pi_0 z$ имеют погранслойный характер.

Решая затем систему (16) для начального условия $\bar{x}_0(t_0) = x_0 - \Pi_0 x(t_0) = x_s$, находим $\bar{x}_0(t,\varepsilon)$, т. е. нулевое приближение построено.

VI. Решение $\bar{x}_0(t,\varepsilon)$ системы (16), удовлетворяющее начальному условию $\bar{x}_0(t_0) = x_s$, определено для всех $t \in [t_0, t_0 + T/\varepsilon]$ и лежит в D вместе с некоторой ρ-окрестностью.

Прежде чем переходить к выводу следующих приближений, сформулируем вспомогательный результат.

Лемма 1. а) *Для* $\Delta x(t,\varepsilon) = \varepsilon^{-1}[\bar{x}_0(t,\varepsilon) - x_s(t)]$ *справедлива оценка*

$$\|\Delta x(t,\varepsilon)\| \le C|t - t_0|.$$

б) *Если для* $i = 0, 1, \dots, k-1$

$$\|\Pi_i x\| \le C\exp[-\alpha(t-t_0)], \quad \|\Pi_i z\| \le C\exp[-\alpha(t-t_0)], \tag{22}$$

то аналогичные оценки справедливы для $F_k(t)$ *и* $G_k(t)$ *из* (19).

Доказательство первой части леммы легко получить, используя лемму В. А. Алексеева [15, 17], в силу которой решение $\bar{x}_0(t,\varepsilon)$ системы (16) удовлетворяет следующему интегральному уравнению, связывающему его с общим решением $\varphi(t, t_0, x_0)$ системы (4):

$$\bar{x}_0(t,\varepsilon) = \varphi(t, t_0, x_s) + \varepsilon\int_{t_0}^{t}\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}(t,\tau,\bar{x}_0(t,\varepsilon))\,[\,X'_{0z}(\tau,\bar{x}_0(\tau,\varepsilon),\bar{z}_0(\tau,\bar{x}_0(\tau,\varepsilon)))\times$$

$$\times\,\bar{z}_1(\tau,\bar{x}_0(\tau,\varepsilon)) + X_1(\tau,\bar{x}_0(\tau,\varepsilon),\bar{z}_0(\tau,\bar{x}_0(\tau,\varepsilon)))]\,d\tau; \tag{23}$$

оценивая правую часть этого уравнения с помощью I – III, приходим к искомому неравенству. Второе утверждение леммы доказывается с помощью первого так же, как в [2].

Предположим, что $\bar{x}_{k-1}(\tau,\varepsilon)$, $\Pi_{k-1}x(t)$, $\Pi_{k-1}z(t)$ построены и погранслойные члены удовлетворяют оценкам типа (22). В силу (22) и оценок для $F_k(t)$ и $G_k(t)$ леммы 1 система (19) асимптотически эквивалентна [16] системе

$$\begin{aligned}\dot{u} &= X'_{0x}(t, x_s(t), z_s(t))\,u + X'_{0z}(t, x_s(t), z_s(t))\,v,\\ \dot{v} &= Z'_{0x}(t, x_s(t), z_s(t))\,u + Z'_{0z}(t, x_s(t), z_s(t))\,v,\end{aligned} \tag{24}$$

т. е. существует обратимая матрица B (не зависящая от k) и вектор b_k такие, что если

$$\begin{pmatrix}\Pi_k\, x(t_0)\\ \Pi_k\, z(t_0)\end{pmatrix} = B\begin{pmatrix}u(t_0)\\ v(t_0)\end{pmatrix} + b_k,$$

то $\|\Pi_k x - u\| \le C\exp[-\alpha(t-t_0)]$, $\|\Pi_k z - v\| \le C\exp[-\alpha(t-t_0)]$.

С другой стороны, замена $u = \xi$, $v = F'_x(t, x_s(t))\,\xi + \eta$ переводит систему (24) в систему (6) и из замечания 1 сразу следует, что для системы (19) для любого t_0 существует m-мерная гиперплоскость $\Gamma_k^m(t_0)$ такая, что если

$(\Pi_k x(t_0), \Pi_k z(t_0)) \in \Gamma_k^m$, то для $\Pi_k x(t)$ и $\Pi_k z(t)$ справедливы оценки типа (22). Наряду с Γ_k^m рассмотрим l-мерную гиперплоскость Γ_k^l, определяемую уравнением

$$-F_x'(t_0, \bar{x}_0(t_0))\Pi_k x(t_0) + \Pi_k z(t_0) = p_k - \bar{z}_k(t_0, \bar{x}_0(t_0)),$$

вытекающим из (20).

VII. Гиперплоскости Γ_k^m и Γ_k^l находятся в общем положении, т. е. имеют общую точку $(\Pi_k x(t_0), \Pi_k z(t_0))$.

Выбирая $\Pi_k x(t_0)$ и $\Pi_k z(t_0)$ из условия VII в качестве начальных условий для системы (19), получаем $\Pi_k x(t)$ и $\Pi_k z(t)$, удовлетворяющие условию погранслоя. Решая затем (17) с начальным условием $\bar{x}_k(t_0) = -\Pi_k x(t_0)$, получаем k-е приближение; при этом в силу III все x_k, $k = 1, 2, \ldots$, ограничены.

5. Сформулируем теорему, которая позволит получить оценки точности построенной асимптотики.

Теорема. *Если* (t_0, x_0, z_0) *принадлежит области влияния* V *интегрального многообразия* $z = F(t, x)$ *вырожденной системы* (2) *и выполнены условия* I – VII, *то существуют* $C > 0$ *и* $\varepsilon_0 > 0$ *такие, что* $\forall\, t \in [t_0, t_0 + T/\varepsilon]$ *и* $\forall$ $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$

$$\| x(t, \varepsilon) - \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k [\, \bar{x}_k(t, \varepsilon) + \Pi_k x(t, \varepsilon)\,] \| \le C\varepsilon^{N+1},$$

$$\| z(t, \varepsilon) - \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k [\, \bar{z}_k(t, \sum_{l=0}^{N-k} \varepsilon^l \bar{x}_l(t, \varepsilon)) + \Pi_k z(t, \varepsilon)\,] \| \le C\varepsilon^{N+1}. \tag{25}$$

Доказательство. Введем обозначения

$$y = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}, \quad Y_i(t, y) = \begin{pmatrix} X_i(t, x, z) \\ Z_i(t, x, z) \end{pmatrix}, \quad \psi(t, t_0, y_0) = \begin{pmatrix} \psi_1(t, t_0, x_0, z_0) \\ \psi_2(t, t_0, x_0, z_0) \end{pmatrix}.$$

В этих обозначениях $y_b(t) = \psi(t, t_0, y_0)$ — проходящее через точку (t_0, y_0) решение системы (2), которая принимает вид

$$\dot{y} = Y_0(t, y), \tag{26}$$

а $\partial\psi/\partial y_0\,(t, t_0, y_0)$ — фундаментальная матрица системы в вариациях

$$\dot{\zeta} = Y_{0y}'(t, y_b(t)) \tag{27}$$

для этого решения.

Как отмечалось в предыдущем пункте, система (27) асимптотически эквивалентна системе(24), которая, в свою очередь, заменой сводится к системе (6), откуда следует в силу III и IV, что

$$\left\| \frac{\partial\psi}{\partial y_0}(t, t_0, y_0) \right\| \le C \quad \forall\, t \ge t_0. \tag{28}$$

Так как $\partial^2\psi/\partial y_0^2\,(t, t_0, y_0)$ удовлетворяет системе

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y_0^2}\right) = Y_{0y}'(t, y_b(t))\frac{\partial^2\psi}{\partial y_0^2} + Y_{0yy}''(t, y_b(t))\left(\frac{\partial\psi}{\partial y_o}\right)^2,$$

то с помощью аналогичных рассуждений из III и IV выводится также оценка

$$\left\| \frac{\partial^2 \psi}{\partial y_0^2}(t, t_0, y_0) \right\| \le C \quad \forall\, t \ge t_0. \tag{29}$$

Сформулируем вспомогательный результат.

Лемма 2. *Если выполнены условия* III *и* IV, *то для решения* $y(t, t_0, y_0)$ *возмущенной системы*

$$\dot{y} = Y_0(t, y) + \varepsilon Y_1(t, y) \tag{30}$$

справедлива оценка

$$\left\| \frac{\partial y}{\partial y_0}(t, t_0, y_0) \right\| \le C \quad \forall\, t \in [\, t_0, t_0 + T/\varepsilon\,]. \tag{31}$$

Доказательство леммы. Записывая уравнение, аналогичное (23), имеем

$$y(t, t_0, y_0) = \psi(t, t_0, y_0) + \varepsilon \int_{t_0}^{t} \frac{\partial \psi}{\partial y_0}(t, \tau, y(\tau, t_0, y_0))\, Y_1(t, y(\tau, t_0, y_0))\, d\tau,$$

и следовательно,

$$\frac{\partial y}{\partial y_0} = \frac{\partial \psi}{\partial y_0} + \varepsilon \int_{t_0}^{t} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial y_0^2} \left(\frac{\partial y}{\partial y_0}, Y_1 \right) + \frac{\partial \psi}{\partial y_0} Y_{1y}' \frac{\partial y}{\partial y_0} \right] d\tau,$$

откуда, оценивая правую часть по норме, используя (28) и (29), применяя лемму Гронуолла — Беллмана, получаем (31).

Для окончания доказательства теоремы положим

$$x_N(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k [\, \bar{x}_k(t, \varepsilon) + \Pi_k x(t, \varepsilon)\,],$$

$$z_N(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{N+1} \varepsilon^k \bar{z}_k \left(t, \sum_{l=0}^{N-k} \varepsilon^l \bar{x}_l(t, \varepsilon) \right) + \sum_{k=0}^{N} \Pi_k z(t, \varepsilon).$$

Так же, как в [2], доказывается, что $y = \begin{pmatrix} x_N \\ z_N \end{pmatrix}$ удовлетворяет системе

$$\dot{y}_N = Y_0(t, y_N) + \varepsilon Y_1(t, y_N) + \varepsilon^{N+2} Y_{N+2}(t, \varepsilon) + \varepsilon^{N+1} \Pi_{N+1} Y(t, \varepsilon), \tag{32}$$

где $\| Y_{N+2} \| \le C$, $\| \Pi_{N+1} Y \| \le \exp[-\alpha(t - t_0)]$ $\forall\, t \ge t_0$.

Применяя лемму В. М. Алексеева к системам (30) и (32), получаем

$$y_N(t) = y(t, t_0, y_0) + \varepsilon^{N+1} \int_{t_0}^{t} \frac{\partial \psi}{\partial y_0}(t, \tau, y_N(\tau))\, [\, Y_{N+2}(\tau) + \Pi_{N+1} Y(\tau)\,]\, d\tau,$$

откуда в силу (31) находим для $t \in [\, t_0, t_0 + T/\varepsilon\,]$

$$\| y_N(t) - y(t) \| \le C \varepsilon^{N+1},$$

откуда следует справедливость оценок теоремы.

6. *Пример.* Рассмотрим колебательную систему с инерционным членом, описываемую уравнениями:

$$\ddot{y} + a(z)\, y = \varepsilon f(y, \dot{y}, z), \quad \dot{z} = -\gamma z + \varepsilon g(y, \dot{y}, z), \tag{33}$$

где $a(z) \ge a_0 > 0$, $|a^1(z)| \le L$, $\gamma > 0$.

Заменой $x^1 = y$, $x^2 = \dot{y}$ систему (33) можно свести к системе вида (1), причем вырожденная система ($\varepsilon = 0$) имеет экспоненциально притягивающее интегральное многообразие S: $z = 0$.

Решение $x^1 = \psi^1(t)$, $x^2 = \psi^2(t)$, $z = \psi^3(t) = z_0 \exp(-\gamma t)$ вырожденной системы, проходящее через начальную точку $(y_0, \dot{y}_0, z_0)$, притягивается к лежащему на S решению (здесь $\omega^2 = a(0)$): $x^1 = \varphi^1(t) = x_s^1 \cos \omega t + \omega^{-1} x_s^2 \sin \omega t$, $x^2 = \varphi^2(t) = -\omega x_s^1 \sin \omega t + x_s^2 \cos \omega t$, $z = 0$, причем

$$x_s^1 = x_0^1 + \omega^{-1} \int_0^\infty [\, a(z_0 \exp(-\gamma t)) - a(0)\,]\, \varphi^1(\tau) \sin \omega \tau \, d\tau,$$

$$x_s^2 = x_0^2 - \int_0^\infty [\, a(z_0 \exp(-\gamma t)) - a(0)\,]\, \varphi^1(\tau) \cos \omega \tau \, d\tau.$$

Функция $\bar{z}_1(x^1, x^2)$, входящая в главный член асимптотики, определяется в данном случае из уравнения

$$x^2 \frac{\partial \bar{z}_1}{\partial x^1} - \omega^2 x^1 \frac{\partial \bar{z}_1}{\partial x^2} = -\gamma \bar{z}_1 + g(x^1, x^2, 0)$$

и имеет вид

$$\bar{z}_1(x^1, x^2) = \int_0^\infty \exp(-\gamma t)\, g(\varphi^1(t), \varphi^2(t), 0)\, d\tau.$$

В силу (10), (16) и (25) асимптотические формулы для решения $y(t)$, $z(t)$ системы (33) принимают вид: для $t \in [0, T/\varepsilon]$

$$y(t) = \bar{y}_0(t, \varepsilon) + \psi^1(t) - \varphi^1(t) + O(\varepsilon), \quad z(t) = z_0 \exp(-\gamma t) + O(\varepsilon),$$

где $\bar{y}_0(t, \varepsilon)$ — решение уравнения

$$\ddot{\bar{y}}_0 + a(0)\, \bar{y}_0 = \varepsilon\, [\, f(\bar{y}_0, \dot{\bar{y}}_0, 0) - a'(0)\, \bar{z}_1(\bar{y}_0, \dot{\bar{y}}_0)\, \bar{y}_0\,];$$

это решение можно найти, например, с помощью метода усреднения.

1. *Тихонов А. Н.* Системы дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры при производных // Мат. сб. – 1952. – **31**, № 3. – С. 575–586.
2. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. – М.: Наука, 1973. – 272 с.
3. *Задирака К. В.* О нелокальном интегральном многообразии нерегулярно возмущенной дифференциальной системы // Укр. мат. журн. – 1965. – **17**, № 1. – С. 47–63.
4. *Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике. – М.: Наука, 1973. – 512 с.
5. *Стрыгин В. В., Соболев В. А.* Разделение движений методом интегральных многообразий. – М.: Наука, 1988. – 256 с.
6. *Щитов И. Н.* Об одном обобщении теоремы А. Н. Тихонова // Укр. мат. журн. – 1986. – **38**, № 3. – С. 394–397.
7. *Щитов И. Н.* К вопросу об асимптотике решений задачи Коши для сингулярно возмущенной системы // Дифференц. уравнения. – 1985. – **21**, № 10. – С. 1823–1825.
8. *Неймарк Ю. И.* Интегральные многообразия дифференциальных уравнений // Изв. вузов. Радиофизика. – 1967. – **10**, № 3. – С. 321–334.
9. *Fenichel N.* Persistence and Smoothness of invariant manifolds for flows // Indiana Univ. Math. J. – 1971. – **21**, № 3. – P. 193–226.
10. *Hirsh M., Pugh C., Shub M.* Invariant manifolds. – Berlin: Springer, 1977. – 149 p.
11. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978. – 106 с.
12. *Понтрягин Л. С., Родыгин Л. В.* Приближенное решение одной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при производных // Докл. АН СССР. – 1960. – **131**, № 2. – С. 255–258.
13. *Щитов И. Н.* Асимптотика решений систем с медленными и быстрыми переменными // Укр. мат. журн. – 1987. – **39**, № 5. – С. 631–637.
14. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. – М.: Наука, 1966. – 530 с.
15. *Румянцев В. В., Озиранер А. С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. – М.: Наука, 1987. – 254 с.
16. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 536 с.
17. *Алексеев В. М.* Об одной оценке возмущений решений обыкновенных дифференциальных уравнений // Вестн. Моск. ун-та. Сер. математика, механика. – 1961. – № 2. – С. 28–36.

Получено 09. 08. 90