УДК 519.64

Ю. К. Подлипенко, канд. физ.-мат. наук (Киев. ун-т)

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА В УГЛОВОЙ ОБЛАСТИ. II

Изучаются краевые задачи, возникающие при исследовании дифракции акустических волн на бесконечном цилиндре с произвольной формой поперечного сечения, расположенном внутри клина так, что ось цилиндра параллельна ребру клина. Развита теория потенциала, позволяющая свести краевые задачи к интегральным уравнениям.

Вивчаються крайові задачі, які виникають при дослідженні дифракції акустичних хвиль на нескінченному циліндрі з довільною формою поперечного перерізу, що розміщений всередині клину так, що вісь циліндра паралельна ребру клина. Розвинута теорія потенціалу, що дає можливість звести вказані крайові задачі до інтегральних рівнянь.

Данная статья является продолжением работы [1]. При этом сохраняются все обозначения и определения, принятые в [1]. Ссылка вида (1.1) будет всюду в дальнейшем обозначать ссылку на формулу (1) из работы [1]. Особо отметим, что формулировки задач I—III содержатся в работе [1].

1. Потенциалы простого и двойного слоев и их свойства. Пусть заданы функции $\varphi, \psi \in C(\partial D)$; тогда функцию

$$u(M) := \int_{\partial D} G(M,P)\,\varphi(P)\,dl_P, \quad M \in \Omega \setminus \partial D, \tag{1}$$

будем называть потенциалом простого слоя с плотностью φ, а функцию

$$v(M) := \int_{\partial D} \frac{\partial G(M,P)}{\partial n_P} \psi(P)\,dl_P, \quad M \in \Omega \setminus \partial D, \tag{2}$$

—потенциалом двойного слоя с плотностью ψ.

Легко видеть, что потенциалы (1) и (2) удовлетворяют граничному условию (1.4). Будем далее обозначать индексами „+“ и „–“ пределы, полученные при приближении к границе ∂D из областей $\Omega \setminus \overline{D}$ и D соответственно, т.е.

$$v_+(M) = \lim_{\substack{P \to M \\ P \in \Omega \setminus \overline{D}}} v(P), \quad v_-(M) = \lim_{\substack{P \to M \\ P \in D}} v(P), \quad M \in \partial D.$$

Используя представление (1.46) и соотношения

$$G(M,P) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{M,P}} + O(1), \quad r_{M,P} \to 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial G(M,P)}{\partial n_P} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n_P} \ln \frac{1}{r_{M,P}} + O(1), \quad r_{M,P} \to 0, \tag{4}$$

вытекающие из (1.49) потенциалы (1) и (2) представим в виде суммы обычных гармонических потенциалов, в которых предельный переход при стремлении точки M на контур ∂D совершается в соответствии с теоремами Ляпунова — Таубера, и интегралов с ядрами, не имеющими особенностей при $M \to P$, в которых возможен переход к пределу под знаком интеграла. Проведенный анализ показывает, что все свойства гармонических потенциалов переносятся на потенциалы (1) и (2). Приведем, например, следующие свойства.

***Свойство* 1.** Потенциал простого слоя u с непрерывной плотностью φ может быть непрерывно продолжен из $\Omega \setminus \partial D$ в Ω таким образом, что

$$u_+(M) = u_-(M) = \int_{\partial D} G(M,P)\,\varphi(P)\,dl_P, \quad M \in \partial D. \tag{5}$$

***Свойство* 2.** Потенциал двойного слоя v с непрерывной плотностью ψ может быть непрерывно продолжен из $\Omega\setminus\overline{D}$ в $\Omega\setminus D$ и из D в $\overline{D}$ с предельными значениями на ∂D вида

$$v_{\pm}(M)=\int_{\partial D}\frac{\partial G(M,P)}{\partial n_P}\,\psi(P)\,dl_P\pm\frac{1}{2}\,\psi(P),\ M\in\partial D. \tag{6}$$

***Свойство* 3.** Для потенциала двойного слоя v с непрерывной плотностью ψ скачок предельных значений имеет вид

$$v_{+}-v_{-}=\psi\quad \text{на } \partial D. \tag{7}$$

***Свойство* 4.** Для потенциала простого слоя u с непрерывной плотностью φ справедливо равенство

$$\frac{\partial u_{\pm}(M)}{\partial n_M}=\int_{\partial D}\frac{\partial G(M,P)}{\partial n_M}\,\varphi(P)\,dl_P\mp\frac{1}{2}\,\varphi(M),\ M\in\partial D,$$

где

$$\frac{\partial u_{\pm}(M)}{\partial n_M}=\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\frac{\partial u\left(M\pm hn_M\right)}{\partial n_M}$$

понимается в смысле равномерной сходимости.

***Свойство* 5.** Для потенциала простого слоя u с непрерывной плотностью φ справедливо соотношение

$$\frac{\partial u_{+}}{\partial n}-\frac{\partial u_{-}}{\partial n}=-\varphi\ \text{ на } \partial D. \tag{8}$$

***Свойство* 6.** Для потенциала двойного слоя v с непрерывной плотностью ψ справеливо равенство

$$\frac{\partial v_{+}}{\partial n}=\frac{\partial v_{-}}{\partial n}\ \text{ на } \partial D \tag{9}$$

в том смысле, что

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\left(\frac{\partial v(M+hn_M)}{\partial n_M}-\frac{\partial v(M+hn_M)}{\partial n_M}\right)=0,\ M\in\partial D,$$

равномерно по M на ∂D.

Теорема 1. *Функции* $G(M,P)$, $\partial G(M,P)/\partial n_M$, $M\in\partial D$, *и потенциалы простого и двойного слоя, определенные соотношениями* (1) и (2) *соответственно, удовлетворяют условию излучения Зоммерфельда* (1.2) *и условию* (1.3) *на ребре. Кроме того, справедливы соотношения*

$$G(M,P)=O\left(r_P^{-1/2}\right),\ \partial G(M,P)/\partial n_M=O\left(r_P^{-1/2}\right)\ \text{при } r_P\to\infty.$$

Доказательство. Установим сначала, что $G(M,P)$ удовлетворяет условию Зоммерфельда (1.2). Имеем [2, с. 137]

$$H_{\nu}^{(1)}(z)=\frac{1}{\pi i}\int_0^{\infty}e^{\nu t-z\,\mathrm{sh}\,t}\,dt+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}e^{(-\nu t+z\sin t)i}\,dt+\frac{1}{\pi i}\int_0^{\infty}e^{-\nu\pi i}\,e^{-\nu t-z\,\mathrm{sh}\,t}\,dt:=$$

$$:=I_1+I_2+I_3. \tag{10}$$

Оценим I_1, полагая $z=x+iy$. Используя неравенство Шварца и $\mathrm{sh}\,t\ge t$, $t\in(0,\infty)$, получаем

$$\pi\,|I_1| = \left|\frac{1}{i}\int_0^\infty e^{\nu t - z\,\mathrm{sh}\,t}\,dt\right| \le \int_0^\infty e^{\nu t - x\,\mathrm{sh}\,t}\,dt = \int_0^\infty e^{\nu t - (x/2 + x/2)\,\mathrm{sh}\,t}\,dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-(x/2)\,\mathrm{sh}\,t}\, e^{\nu t - (x/2)\,\mathrm{sh}\,t}\,dt \le \left(\int_0^\infty e^{-x\,\mathrm{sh}\,t}\,dt\right)^{1/2}\left(\int_0^\infty e^{2\nu t - x\,\mathrm{sh}\,t}\,dt\right)^{1/2} \le$$

$$\le \left(\int_0^\infty e^{-xt}\,dt\right)^{1/2}\left(\int_0^\infty e^{2\nu t - x\,\mathrm{sh}\,t}\,dt\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\int_0^\infty e^{2\nu t - x\,\mathrm{sh}\,t}\,dt\right)^{1/2}. \qquad (11)$$

а) Пусть $x \ge 2\nu$. Тогда

$$\int_0^\infty e^{2\nu t - x\,\mathrm{sh}\,t}\,dt \le \int_0^\infty e^{x(t - \mathrm{sh}\,t)}\,dt.$$

Для оценки последнего интеграла используем лемму 1.1 из [3, с.30]. Имеем $\sup_{t\ge 0}(t - \mathrm{sh}\,t) = 0$. Зафиксируем $x = 1$. Тогда $\int_0^\infty e^{t - \mathrm{sh}\,t}\,dt < \infty$. По упомянутой лемме

$$\int_0^\infty e^{x(t - \mathrm{sh}\,t)}\,d\,t < c, \quad c = \mathrm{const} \quad (\text{при } x \ge 1).$$

Поэтому

$$\int_0^\infty e^{2\nu t - x\,\mathrm{sh}\,t}\,dt < c \quad \text{равномерно при } x \ge 2\nu. \qquad (12)$$

б) Зафиксируем x_0 (фактический выбор x_0 будет осуществлен позднее). Пусть $x_0 \le x \le 2\nu$. Тогда

$$\int_0^\infty e^{2\nu t - x\,\mathrm{sh}\,t}\,dt \le \int_0^\infty e^{2\nu t - x_0\,\mathrm{sh}\,t}\,dt = \int_0^\infty e^{(x_0/2)\,e^{-t}}\, e^{2\nu t - (x_0/2)\,e^{t}}\,dt. \qquad (13)$$

Учитывая, что

$$\max_{t\ge 0}\left(e^{2\nu t - (x_0/2)\,e^{t}}\right) = e^{2\nu\ln(4\nu/x_0) - 2\nu} < e^{2\nu\ln(4\nu/x_0)} = (4\nu/x_0)^{2\nu}, \qquad (14)$$

из (13), (14) находим

$$\int_0^\infty e^{2\nu t - x\,\mathrm{sh}\,t}\,d\,t \le (4\nu/x_0)^{2\nu}\int_0^\infty e^{(x_0/2)\,e^{-t}}\,dt = A\,(4\nu/x_0)^{2\nu}, \qquad (15)$$

$$x_0 \le x \le 2\nu, \quad A := \int_0^\infty e^{(x_0/2)\,e^{-t}}\,dt.$$

Из (12), (15) следует

$$\int_0^\infty e^{2\nu t - x\,\mathrm{sh}\,t}\,d\,t \le A_1\,(4\nu/x_0)^{2\nu} \quad \text{равномерно по } x \text{ при } x \ge x_0,\ \nu > \nu_0, \qquad (16)$$

$A_1 := \max(A, C) = \mathrm{const}$, ν_0 выбирается так, чтобы при $\nu > \nu_o$ выполнялось $4\nu/x_0 > 1$, т.е. из условия $4\nu_0/x_0 \ge 1 \Leftrightarrow \nu_0 \ge x_0/4$.

Из (11), (16) вытекает

$$\pi\,|I_1| \le \frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{A_1}\left(\frac{4\nu}{x_0}\right)^{\nu}, \quad x \ge x_0,\ \nu \ge \nu_0. \qquad (17)$$

Так же (только гораздо легче) оценивается I_3. Имеем

$$\pi\,|\,I_3\,| = \left|\frac{1}{i}\int_0^\infty e^{-\nu\pi i}\,e^{-\nu t - z\operatorname{sh} t}\,dt\right| \le \int_0^\infty e^{-\nu t - x\operatorname{sh} t}\,dt \le$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{x}}\Big(\int_0^\infty e^{-2\nu t - x\operatorname{sh} t}\,dt\Big)^{1/2} \le \frac{1}{\sqrt{x}}\Big(\int_0^\infty e^{-2t}\,dt\Big)^{1/2},\ \nu \ge 1,\ x \ge 1. \tag{18}$$

Оценим I_2, полагая $z = kr$.

а) Рассмотрим сначала случай $s = \operatorname{Im} k > 0$. Справедливы соотношения

$$\pi\,|\,I_2\,| = \left|\int_0^\pi e^{(-\nu t + z\sin t)\,i}\,dt\right| \le \int_0^\pi e^{-sr\sin t}\,dt = \int_0^{\pi/2} e^{-sr\sin t}\,dt +$$

$$+\int_{\pi/2}^\pi e^{-sr\sin t}\,dt < \int_0^{\pi/2} e^{-sr(2/\pi)t}\,dt + \int_{\pi/2}^\pi e^{-sr(-(2/\pi)t+2)}\,dt =$$

$$= \frac{\pi}{2sr}(1 - e^{-sr}) + e^{-2sr}\,\frac{\pi}{2sr}(e^{2sr} - e^{sr}) \le \frac{A}{r},\ \ A = \text{const}. \tag{19}$$

б) Пусть теперь $\operatorname{Im} k = 0$. Полагая $x = kr > 0$, для оценки интеграла

$$\pi I_2 = \int_0^\pi e^{(-\nu t + x\sin t)\,i}\,dt$$

воспользуемся следующей леммой.

Лемма 1. *Пусть* $f(\xi)$ *аналитическая всюду, вещественная при вещественных значениях* ξ *и монотонно убывает на* $[\alpha, \beta]$, $f'(\xi) \ne 0$ *при* $\xi \ne \alpha$, $f'(\alpha) = 0$ и $f''(\alpha) < 0$. *Пусть, далее,* $\varphi_\nu(\xi) = e^{\mp i\nu\xi}$. *Тогда при* $x \ge 1$, $\nu \ge 1$ *справедлива оценка*

$$\left|\int_\alpha^\beta e^{ixf(\xi)}\varphi(\xi)\,d\xi\right| \le \frac{A_1\nu^2}{x} + \frac{A_2}{\sqrt{x}},\ \ A_1,\ A_2 = \text{const} \tag{20}$$

(A_1, A_2 *не зависят* от ν *и* x).

Доказательство. Следуя рассуждениям из [4, с. 280] и сохраняя обозначения, введенные при доказательстве леммы 2 на с. 280 упомянутой книги, видим, что достаточно доказать справедливость соотношений

$$|\,\theta_2(u)\,| \le \tilde{A}_1\nu,\ |\theta_2'(u)| \le \tilde{A}_2\nu^2,\quad u \in [0, u_1],\ \tilde{A}_1, \tilde{A}_2 = \text{const}.$$

Имеем (см.[4, с. 281], для определенности берем $\varphi(u) = e^{-i\nu u}$; если $\varphi(u) = e^{i\nu u}$, то рассуждения точно такие же)

$$\theta_2(u) = \frac{e^{-i\nu\xi(u)} - e^{-i\nu\xi(0)}}{u} = \frac{1}{u}\int_0^u (-i\nu)\,\xi'(t)\,e^{-i\nu\xi(t)}\,dt =$$

$$= -i\nu\int_0^1 \xi'(uv)\,e^{-i\nu\xi(uv)}\,dv, \tag{21}$$

откуда $|\,\theta_2(u)\,| \le \tilde{A}_1\nu$, $u \in [0, u_1]$. Дифференцируя (21), получаем

$$\theta_2'(u) = -i\nu\left\{\int_0^1 v\,\xi''(uv)\,e^{-i\nu\xi(uv)}\,dv - i\nu\int_0^1 v(\xi'(uv))\,e^{-i\nu\xi(uv)}\,dv\right\},$$

откуда

$$|\theta_2'(u)| \le \tilde{A}_2\, \nu^2, \ u \in [0, u_1]. \tag{22}$$

Лемма доказана. Продолжая доказательство теоремы, далее следуем рассуждениям из [4, с. 282] (заменяя лемму 2 из [4, с. 280] на доказанную выше лемму). Имеем

$$\pi I_2 = \int_0^{\pi/2} e^{ix\sin t - i\nu t}\, dt + \int_{\pi/2}^{\pi} e^{ix\sin t - i\nu t}\, dt. \tag{23}$$

Применяя лемму 1 ко второму интегралу и полагая $f(t) = \sin t$, $\alpha = \pi/2$, $\beta = \pi$, $\varphi(u) = e^{-i\nu u}$, получаем

$$\left| \int_{\pi/2}^{\pi} e^{ix\sin t - i\nu t}\, dt \right| \le \frac{\hat{A}_1 \nu^2}{x} + \frac{\hat{A}_2}{\sqrt{x}} \ (x \ge 1, \ \nu \ge 1, \ \hat{A}_1, \hat{A}_2 = \text{const}). \tag{24}$$

В первом интеграле сделаем замену по формуле $t = \pi/2 - \xi$. Применяя затем лемму 1 и полагая $f(\xi) = \cos\xi$, $\alpha = 0$, $\beta = \pi/2$, $\varphi(\xi) = e^{i\nu\xi}$, получаем

$$\left| \int_0^{\pi/2} e^{ix\sin t - i\nu t}\, dt \right| = \left| \int_0^{\pi/2} e^{ix\cos\xi} e^{i\nu\xi - i\nu\pi/2}\, d\xi \right| \le$$

$$\le \frac{\hat{\hat{A}}_1 \nu^2}{x} + \frac{\hat{\hat{A}}_2}{\sqrt{x}}, \ x \ge 1, \ \nu \ge 1, \ \hat{\hat{A}}_1, \ \hat{\hat{A}}_2 = \text{const}. \tag{25}$$

Из (23) – (25) следует

$$|\pi I_2| \le \frac{A_1 \nu^2}{r} + \frac{A_2}{\sqrt{r}}, \ \ r \ge 1, \ \nu \ge 1, \ A_1, \ A_2 = \text{const}. \tag{26}$$

Из (19), (26) заключаем, что при фиксированом k, $\operatorname{Re} k > 0$, $\operatorname{Im} k \ge 0$, и $\nu \ge 1$, $r \ge 1$ выполняется неравенство

$$|\pi I_2| \le A \frac{\nu^2}{\sqrt{r}}. \tag{27}$$

Теперь из (10), (17), (18), (27) находим,что при фиксированном k, $\operatorname{Re} k > 0$, $\operatorname{Im} k \ge 0$, и $\nu \ge \nu_0$, $r \ge r_0$ $(r > x_0 / \operatorname{Re} k := r_0)$ выполняется неравенство

$$\left| H_\nu^{(1)}(kr) \right| \le \frac{A}{\sqrt{r}} (4\nu / x_0)^\nu \nu^2. \tag{28}$$

Полагая $s = \operatorname{Im} k$ и используя неравенство [5, с. 184] $|J_\nu(kr)| \le$ $\le (|k|(r/2))^\nu e^{sr} / \sqrt{\pi}\, \Gamma(\nu + 1/2)$, при фиксированном $r = r_m$, получаем

$$|J_\nu(k r_M)| \le \frac{A Q^\nu}{\nu^\nu}, \ Q = \frac{e|k| r_M}{2} = \text{const}. \tag{29}$$

Выберем теперь x_0 так,чтобы выполнялось условие $q \equiv (4/x_0) Q < 1$. Тогда из (28), (29) (полагая в (28) $r = r_P$) следует

$$\left| J_\nu(k r_M) H_\nu^{(1)}(k r_P) \right| \le A_3 \frac{1}{\sqrt{r_P}} \left(\frac{4}{x_0} Q\right)^\nu \nu^2 \equiv \frac{A_3 \nu^2 q^\nu}{\sqrt{r_P}},$$

$$r_P \ge r_0, \ \nu \ge \nu_0, \ A_3 = \text{const},$$

откуда

$$\left| \sqrt{r_P} J_\nu(k r_M) H_\nu^{(1)}(k r_P) \right| \le A_4 \nu^2 q^\nu, \ q < 1, \ r_P \ge r_0, \ \nu \ge \nu_0, \ A_4 = \text{const}. \tag{30}$$

Из (30) сразу вытекает неравенство

$$\sqrt{r_P}\,|G(M,P)| \le \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{r_P}\,|J_{\nu_n}(k r_M)\, H^{(1)}_{\nu_n}(k r_P)| \le$$

$$\le A_5 \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n^2\, q^{\nu_n} < \infty,\ r_P \ge r_0,\ A_5 = \mathrm{const}, \tag{31}$$

т. е.

$$G(M,P) = O\left(\frac{1}{\sqrt{r_P}}\right)\ (r_P \to \infty). \tag{32}$$

В силу соотношений (28) и (1.54) получаем

$$\sqrt{r_P}\left|\frac{dH^{(1)}_{\nu_n}(k r_P)}{d r_P} - i\,k\,H^{(1)}_{\nu_n}(k r_P)\right| \le A_6\left(\frac{4\nu_n}{x_0}\right)^{\nu_n} \nu_n^3, \tag{33}$$

$$\nu \ge \nu_0,\ r \ge r_0,\ A_6 = \mathrm{const}.$$

Из этих соображений и (33) заключаем, что ряд

$$\frac{i\pi}{\Phi} \sum_{n=1}^{\infty} J_{\nu_n}(k r_M)\sqrt{r_P}\left(\frac{dH^{(1)}_{\nu_n}(k r_P)}{d r_P} - i\,k\,H^{(1)}_{\nu_n}(k r_P)\right) \sin(\nu_n\varphi_M)\sin(\nu_n\varphi_P)$$

равномерно по $r_P \ge r_0$ мажорируется рядом const $\sum_{n=1}^{\infty} \nu_n^3\, q^{\nu_n}$. Поэтому по теореме о почленном дифференцировании ряда, во-первых, выполняется равенство

$$\sqrt{r_P}\left(\frac{\partial G(M,P)}{\partial r_P} - i\,k\,G(M,P)\right) =$$

$$= \frac{i\pi}{\Phi} \sum_{n=1}^{\infty} J_{\nu_n}(k r_M)\sqrt{r_P}\left(\frac{dH^{(1)}_{\nu_n}(k r_P)}{d r_P} - i\,k\,H^{(1)}_{\nu_n}(k r_P)\right) \sin(\nu_n\varphi_M)\sin(\nu_n\varphi_P), \tag{34}$$

и, во-вторых (в силу равномерной сходимости ряда), в (34) можно почленно переходить к пределу при $r_P \to \infty$. Так как функция $H^{(1)}_{\nu_n}(k r_P)$ удовлетворяет условию излучения (1.2), то из (34) при $r_P \to \infty$ следует,что $G(M,P)$ удовлетворяет условию излучения.

Аналогично, легко видеть, что этому условию удовлетворяет также и потенциал простого слоя (1). Таким же способом проверяется, что условия (32) и (1.2) выполняются для функции $\partial G(M,P)/\partial n_M$ и условия (1.2) — для потенциала двойного слоя (2).

Теперь докажем, что потенциалы (1), (2) удовлетворяют условию (1.3). Учитывая замечание (1.1) и используя (1.21), (1.22), легко находим

$$|J_{\nu_n}(z)| \le A_1\, \nu_n^{-1/2}\, (e|z|/2\nu_n)^{\nu_n}, \tag{35}$$

$$|H^{(1)}_{\nu_n}(z)| \le A_2\, \nu_n^{-1/2}\, (2\nu_n/e|z|)^{\nu_n}, \tag{36}$$

где $n = 1, 2, \ldots,\ A_1,\ A_2 = \mathrm{const}$, $A_1,\ A_2$ не зависят от $z \in Q$, Q — фиксированный компакт в комплексной плоскости. Из (1.20б), используя (35) при $r_M \in \delta \cap \Omega$, $z = k r_M$ и (36) при $r_P \in \overline{D}$, $z = k r_P$, получаем

$$|G(M,P)| \le A_1 A_2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\nu_n}\left(r_M / r_P\right)^{\nu_n}. \tag{37}$$

Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство $r_P \geq (1+\varepsilon)\, r_M$ (ясно, что это всегда можно сделать). Тогда из (37) имеем

$$|G(M,P)| \leq A_1 A_2 \frac{\Phi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(r_M / r_P \right)^{\nu_n} =$$

$$= A_1 A_2 \frac{\Phi}{\pi} \frac{(r_M/r_P)^{\pi/\Phi}}{1-(r_M/r_P)^{\pi/\Phi}} \leq A\, r_M^{\pi/\Phi}, \tag{38}$$

где $A = \mathrm{const}$ не зависит от $M \in \delta \cap \Omega$ и $P \in \partial D$.

Аналогично, используя рекуррентное соотношение (1.54), легко найдем

$$|\operatorname{grad}_M G(P, M)| \leq B\, r_M^{\pi/\Phi - 1}, \tag{39}$$

где $B = \mathrm{const}$ не зависит от $M \in \delta \cap \Omega$ и $P \in \partial D$.

Из (28) и (39) для потенциала простого слоя получим

$$\int\limits_{\delta\cap\Omega} \left| u(M) \right|^2 d\,s_M = \int\limits_{\delta\cap\Omega} \left| \int\limits_{\partial\Omega} G(M,P)\, \varphi(P)\, dl_P \right|^2 ds_M \leq$$

$$\leq A \left\| \varphi \right\|^2_{C(\partial D)} (\operatorname{mes} \partial D)^2 \int\limits_{\delta\cap D} r_M^{2\pi/\Phi} d\,S_M < \infty,$$

$$\int\limits_{\delta\cap\Omega} \left| \operatorname{grad} u(M) \right|^2 d\,S_M = \int\limits_{\delta\cap\Omega} \left| \int\limits_{\partial\Omega} \operatorname{grad}_M G(M,P)\, \varphi(P)\, dl_P \right|^2 dS_M \leq$$

$$\leq B^2 \left\| \varphi \right\|^2_{C(\partial D)} (\operatorname{mes} \partial D)^2 \int\limits_{\delta\cap\Omega} r_M^{2(\pi/\Phi - 1)} d\,S_M < \infty.$$

Выполнимость условия (1.3) для потенциала двойного слоя (2) устанавливается аналогично. Теорема доказана.

Используя перечисленные выше свойства потенциалов (1), (2), установим следующие результаты.

Теорема 2. *Потенциал двойного слоя*

$$u(M) = \int\limits_{\partial D} \frac{\partial G(M,P)}{\partial n_P} \psi(P)\, dl_P, \quad M \in \Omega \setminus \partial D, \tag{40}$$

с непрерывной плотностью ψ *представляет собой решение задачи* 1 *в* $\Omega \setminus D$, *если* ψ *является решением интегрального уравнения*

$$\psi(M) + 2 \int\limits_{\partial D} \frac{\partial G(M,P)}{\partial n_P} \psi(P)\, dl_P = 2 f(M), \quad M \in \partial D. \tag{41}$$

Доказательство. Потенциал двойного слоя $u(M)$ удовлетворяет граничному условию (1.4) и в силу леммы 2 из [5] уравнению Гельмгольца (1.1) в $\Omega \setminus \partial D$. Кроме того, на основании теоремы 1 $u(M)$ удовлетворяет также условию излучения Зоммерфельда и условию (1.3) на ребре. Принимая во внимание свойство 2, видим, что $u(M)$ непрерывно примыкает к заданным граничным значениям на ∂D, если плотность ψ представляет собой решение интегрального уравнения (41) для задачи 1.

Рассуждая аналогичным способом и учитывая свойства 1 и 4, получаем следующие утверждения.

Теорема 3. *Потенциал простого слоя*

$$u(M) = \int\limits_{\partial D} G(M,P)\, \varphi(P)\, dl_P, \quad M \in \Omega \setminus \partial D, \tag{42}$$

с непрерывной плотностью φ *представляет собой решение задачи* II *в* $\Omega\setminus\overline{D}$, *если* φ *является решением интегрального уравнения*

$$\varphi(M) - 2\int_{\partial D} \frac{\partial G(M,P)}{\partial n_M}\varphi(P)\,dl_P = -2g(M), \quad M\in\partial D. \tag{43}$$

Теорема 4. *Потенциал простого слоя* (42) *с непрерывной плотностью* φ *представляет собой решение задачи* III *в* $\Omega\setminus\overline{D}$, *если* φ *является решением интегрального уравнения*

$$\varphi(M) - 2\int_{\partial D}\left(\frac{\partial G(M,P)}{\partial n_M} + \lambda\, G(M,P)\right)\varphi(P)\,dl_P = -2g(M), \quad M\in\partial D. \tag{44}$$

2. Существование решений краевых задач и соответствующих им граничных интегральных уравнений второго рода. Для исследования проблемы существования решений уравнений (42) – (44) представляет интерес изучение свойств операторов

$$(K\psi)(M) := 2\int_{\partial D}\frac{\partial G(M,P)}{\partial n_P}\psi(P)\,dl_P, \quad M\in\partial D,$$

$$(K'\varphi)(M) := 2\int_{\partial D}\frac{\partial G(M,P)}{\partial n_M}\psi(P)\,dl_P, \quad M\in\partial D,$$

$$(S\varphi)(M) := 2\int_{\partial D} G(M,P)\varphi(P)\,dl_P, \quad M\in\partial D,$$

задаваемых правыми частями этих уравнений.

Приведем вначале следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть граница* ∂D *принадлежит классу* C^2. *Тогда ядра* $\dfrac{\partial G(M,P)}{\partial n_P}$ и $\dfrac{\partial G(M,P)}{\partial n_M}$ *интегральных операторов* K *и* K' *непрерывны на* ∂D.

Доказательство леммы приведено в [6].

Из свойства 1 и леммы 2 вытекает, что операторы K, K' и S отображают $C(\partial D)$ в $C(\partial D)$.

Определение [7, с 27]. *Пусть* X и Y — *нормированные пространства,* $\langle\cdot,\cdot\rangle : X\times Y\to\mathbb{C}$ *представляет собой невырожденную билинейную форму. Пара нормированных пространств* X *и* Y, *оснащенная невырожденной билинейной формой, называется дуальной системой и обозначается* $\langle X, Y\rangle$.

Справедливы следующие результаты.

Теорема 5. *Операторы* K, K' *и* S *компактны в* $C(\partial D)$. *Кроме того, операторы* K *и* K' *являются сопряженными, а* S — *самосопряженный оператор в том смысле, что для всех* $\varphi,\psi\in C(\partial D)$ $\langle K\psi,\varphi\rangle = \langle\psi, K'\varphi\rangle$, $\langle S\psi,\varphi\rangle = \langle\psi, S\varphi\rangle$, *где* $\langle\psi,\varphi) := \int_{\partial D}\psi\varphi\,dl$ — *билинейная форма, которой оснащена дуальная система* $\langle C(\partial D), C(\partial D)\rangle$.

Доказательство. В силу леммы 2 ядра $(\partial G(M,P))/\partial n_P$ и $(\partial G(M,P))/\partial n_M$ интегральных операторов K и K' непрерывны на ∂D и согласно теореме 1.10 из [7] эти операторы компактны в $C(\partial D)$. Компактность оператора S установим с помощью представления (1.46) его ядра и соотношения (1.49). Тогда

$$S\varphi = \int_{\partial D} G_0(M,P)\varphi(P)\,dl_P + \frac{1}{4\pi}\int_{\partial D}\ln\Psi(M,P)\varphi(P)\,dl_P =: S_1\varphi + S_2\varphi. \tag{45}$$

По теореме 1.10 из [7] интегральный оператор S_1 компактен в $C(\partial D)$, так как его ядро $G_0(M,P)$ непрерывно на ∂D. Для доказательства компактности оператора S_2 заметим, что из представления (1.49) следует, что его ядро удовлетворяет неравенству

$$|\ln\Psi(M,P)| \le A_1\left|\ln\frac{1}{r_{M,P}}\right| + A_2,\ \ A_1,\ A_2 = \text{const}, \tag{46}$$

для любых M и $P \in \partial D$, $M \ne P$. Учитывая этот факт и применяя рассуждения, аналогичные приведенным при доказательстве теоремы 2.6 из [7], установим компактность в $C(\partial D)$ оператора S_2. Отсюда и из теоремы 1.4 из [7] следует компактность оператора S.

Покажем теперь, что операторы K и K' являются сопряженными. Действительно, меняя порядок интегрирования и учитывая симметрию функции $G(M,P)$, получаем

$$\langle K\psi,\varphi\rangle = \int\limits_{\partial D}\left(\int\limits_{\partial D}\frac{\partial G(M,P)}{\partial n_P}\psi(P)\,dl_P\right)\varphi(M)\,dl_M =$$

$$= \int\limits_{\partial D}\left(\int\limits_{\partial D}\frac{\partial G(P,M)}{\partial n_P}\varphi(M)\,dl_M\right)\psi(P)\,dl_P = \int\limits_{\partial D}\psi(P)(K'\varphi)(P)\,dl_P = \langle\psi,K'\varphi\rangle.$$

Аналогично устанавливается самосопряженность оператора S. Теорема доказана.

Для дальнейшего изучения свойств операторов K, K' и S потребуются следующие результати об интегральном представлении решения уравнения Гельмгольца (1.1).

Теорема 6. *Пусть* $u \in \Re(\Omega\setminus\overline{D})$ *является решением уравнения Гельмгольца* $\Delta u + k^2u = 0$ *в* $\Omega\setminus\overline{D}$, *удовлетворяющим условию Зоммерфельда* (1.2), *условию* (1.3) *и граничному условию* (1.4). *Тогда*

$$\int\limits_{\partial D}\left\{u(P)\frac{\partial G(M,P)}{\partial n_P} - \frac{\partial u(P)}{\partial n_P}G(M,P)\right\}dl_P = \begin{cases}0, & M\in D,\\ u(M), & M\in\Omega\setminus\overline{D}.\end{cases} \tag{47}$$

Доказательство. Зафиксируем произвольную точку $M\in\Omega\setminus\overline{D}$ и обозначим через $S_{M,r} := \{P\in\Omega\setminus\overline{D}\ |\ |P-M| = r\}$ окружность радиуса r с центром в этой точке. Предположим, что радиус r достаточно мал для того, чтобы имело место включение $S_{M,r}\subset\Omega\setminus\overline{D}$, а число R выбрано так, чтобы $S_{M,r}\subset\subset\Omega_R\setminus\overline{D}$. Применим вторую формулу Грина к функциям $u(P)$ и $G(M,P)$ в области $\Omega_{R,r} := \{P\in\Omega_R\setminus\overline{D}\ |\ |P-M| > r\}$. В результате с учетом граничного условия (1.4) получим

$$\int\limits_{\partial D + S_{M,r} + C_R}\left\{G(M,P)\frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P)\frac{\partial G(M,P)}{\partial n_P}\right\}dl_P = 0. \tag{48}$$

Очевидно,

$$\int\limits_{C_R}\left\{G(M,P)\frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P)\frac{\partial G(M,P)}{\partial n_P}\right\}dl_P = \int\limits_{C_R}G(M,P)\left\{\frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - iku(P)\right\}dl_P -$$

$$- \int\limits_{C_R}u(P)\left\{\frac{\partial G(M,P)}{\partial n_P} - ikG(M,P)\right\}dl_P =: I_1 + I_2. \tag{49}$$

Чтобы оценить I_2, заметим, что

$$\int_{C_R} |u(P)|^2 dl_P = O(1), \quad R \to \infty. \tag{50}$$

Этот факт следует из соотношения (1.11) (доказанного без предположения о том, что выполняется условие (1.8)). Применяя неравенство Шварца к интегралу I_2 и учитывая, что в силу теоремы 1 функция $G(M, P)$ удовлетворяет условию излучения, а также соотношение (50), находим

$$|I_2| \le \left(\int_{C_R} |u(P)|^2 dl_P \right)^{1/2} \left(\int_{C_R} \left| \frac{\partial G(M, P)}{\partial n_P} - ikG(M, P) \right|^2 dl_P \right)^{1/2} = o(1), \ R \to \infty. \tag{51}$$

Аналогично, принимая во внимание условие (1.2) и равенство $\int_{C_R} |G(M, P)|^2 dl_P = O(1)$, вытекающее из теоремы 1, получаем

$$|I_1| \le \left(\int_{C_R} |G(M, P)|^2 dl_P \right)^{1/2} \left(\int_{C_R} \left| \frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - iku(P) \right|^2 dl_P \right)^{1/2} = o(1), \ R \to \infty. \tag{52}$$

Из (51), (52) и (49) имеем

$$\int_{C_R} \left(G(M, P) \frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P) \frac{\partial G(M, P)}{\partial n_P} \right) dl_P = o(1), \quad R \to \infty. \tag{53}$$

Далее, так как на окружности $S_{M,r}$ из представлений (3), (4) следует

$$G(M, P) = -\frac{1}{2\pi} \ln r + O(1), \quad \frac{\partial G(M, P)}{\partial n_P} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{r} + O(1), \quad r \to 0,$$

то непосредственные вычисления с использованием теоремы о среднем показывают, что

$$\lim_{r \to 0} \int_{S_{M,r}} \left\{ G(M, P) \frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - \frac{\partial G(M, P)}{\partial n_P} u(P) \right\} dl_P = -u(M). \tag{54}$$

Устремляя $R \to \infty$, $r \to 0$ в соотношении (48) и принимая во внимание (53) – (54), получаем представление (47).

Пусть теперь точка $M \in D$. Тогда, применяя формулу Грина к функциям $u(P)$ и $G(M, P)$ в области $\Omega R \setminus \overline{D}$, получаем

$$\int_{\partial D + C_R} \left\{ G(M, P) \frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - \frac{\partial G(M, P)}{\partial n_P} u(P) \right\} dl_P = 0.$$

Отсюда в силу равенства (53) вытекает соотношение (47). Теорема доказана.

Из этой теоремы и соотношений $G(M, P) = O(r_M^{-1/2})$, $(\partial G(M, P))/\partial n_P = O(r_M^{-1/2})$, $P \in \partial D$, $r_M \to \infty$, доказанных в теореме 1, непосредственно вытекает такое следствие.

Следствие 1. *Любое решение $u(r, \varphi)$ уравнения Гельмгольца* (1.1) *в $\Omega \setminus \overline{D}$, удовлетворяющее условию излучения Зоммерфельда* (1.2), *условию на ребре* (1.3) *и граничному условию* (1.4), *автоматически удовлетворяет условию $u(r, \varphi) = O(r^{-1/2})$, $r \to \infty$, равномерно по $\varphi \in [-\Phi, 0]$.*

Аналогично, но проще, доказывается следующий результат.

Теорема 7. *Пусть $u \in \Re(D)$ — решение уравнения Гельмгольца (определение класса $\Re(D)$ содержится в* [7, с. 79]) *$\Delta u + k^2 u = 0$ в D. Тогда*

$$\int_{\partial D}\left\{u(P)\frac{\partial G(M,P)}{\partial n_P}-\frac{\partial u(P)}{\partial n_P}G(M,P)\right\}dl_P=\begin{cases}-u(M), \; M\in D,\\ 0, \; M\in\Omega\setminus\overline{D}.\end{cases} \tag{55}$$

Введем в рассмотрение линейные пространства

$$U:=\left\{u|_{\partial D}\,|\,u\in\Re(D),\ \Delta u+k^2u=0 \text{ в } D,\ \frac{\partial u}{\partial n}=0 \text{ на } \partial D\right\},$$

$$V:=\left\{\frac{\partial v}{\partial n}|_{\partial D}\,|\,v\in\Re(D),\ \Delta v+k^2v=0 \text{ в } D,\ v=0 \text{ на } \partial D\right\}.$$

При определении V использован тот факт, что решение однородной задачи Дирихле автоматически принадлежит $\Re(D)$ по теореме 3.27 из [7].

Пространство нулей линейного оператора A, отображающего нормированное пространство X в себя (т. е. совокупность тех $\varphi\in X$, для которых $A\varphi=0$) будем обозначать через $N(A)$. Через I обозначим единичный оператор.

Теорема 8. $N(I-K')=V$.

Доказательство. Пусть $\varphi\in N(I-K')$. Определим потенциал простого слоя соотношением

$$u(M)=\int_{\partial D}G(M,P)\varphi(P)\,dl_P,\quad M\in\Omega/\partial D. \tag{56}$$

Тогда по лемме 2 [1] и теореме 1 $u(P)$ удовлетворяет в $\Omega\setminus\partial D$ уравнению Гельмгольца (1.1), условию излучения (1.2), условию на ребре (1.3), а также граничному условию (1.4). Кроме того, из свойства 4 вытекает, что $\partial u_+/\partial n=0$ на ∂D и из единственности решения задачи II (теорема 2 [1]) следует, что $u=0$ в $\Omega\setminus D$. Вследствие непрерывности потенциала простого слоя (свойство 1) при переходе точки через границу области D получим, что $u_-=0$ на ∂D. Таким образом, $u(M)$ является решением однородной внутренней задачи Дирихле в области D для уравнения Гельмгольца и, значит, по теореме 3.27 из [7] $u\in\Re(D)$. Далее, учитывая (8), находим

$$\varphi=\frac{\partial u_-}{\partial n}-\frac{\partial u_+}{\partial n}=\frac{\partial u_-}{\partial n}\quad\text{на } \partial D,$$

и, следовательно, $\varphi\in V$.

Обратно, пусть $\varphi=\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial D}$, где u — решение однородной внутренней задачи Дирихле. Тогда из интегрального представления (55) вытекает

$$\int_{\partial D}\varphi(P)G(M,P)\,dl_P=0,\quad M\in\Omega\setminus\overline{D}.$$

Устремляя M к ∂D и используя свойство 4, получаем $\varphi-K'\varphi=0$, т. е. $\varphi\in N(I-K')$. Теорема доказана.

Аналогичным способом доказывается следующее утверждение.

Теорема 9. $N(I+K)=U$.

Теорема 10. *Если функция* $\lambda\in C(\partial D)$ *удовлетворяет соотношению* $\mathrm{Im}(\bar{k}\lambda)\geq 0$, *то* $N(I-K'-\lambda S)=N(I-K')=V$.

Доказательство. Пусть $\varphi\in N(I-K'-\lambda S)$, т. е.

$$\varphi-K'\varphi-\lambda S\varphi=0. \tag{57}$$

Определим потенциал простого слоя соотношением

$$u(M) = \int_{\partial D} G(M, P)\varphi(P)\, dl_P, \quad M \in \Omega \setminus \partial D.$$

Тогда $u(M)$ удовлетворяет в $\Omega \setminus \overline{D}$ однородному уравнению Гельмгольца, условию Зоммерфельда, условию (1.3) на ребре и граничному условию (1.4). Кроме того, $\partial u_+ / \partial n + \lambda u_+ = 0$ на ∂D в силу (57) и из теоремы 2 [1] следует, что $u = 0$ в $\Omega \setminus D$. Далее, повторяя рассуждения, с помощью которых была доказана теорема 8, получаем, что $\varphi \in V$.

Обратно, пусть $\varphi \in V$. Тогда из теоремы 7 следует

$$\int_{\partial D} G(M, P)\varphi(P)\, dl_P = 0, \quad M \in \Omega \setminus \overline{D}.$$

Опуская точку M на ∂D и используя свойство 1, отсюда находим, что $S\varphi = 0$. Из доказательства теоремы 8 вытекает соотношение $\varphi - K'\varphi = 0$ на ∂D. Поэтому $\varphi - K'\varphi - \lambda S\varphi = 0$ на ∂D, т. е. $\varphi \in N(I - K' - \lambda S)$, что и требовалось доказать.

Теперь, используя теоремы 8 – 10 и альтернативу Фредгольма, можно решить проблему существования решений краевых задач I – III и соответствующих им интегральных уравнений.

Вначале отметим, что при вещественных k внутренняя задача Дирихле

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad \text{в} \quad D, \tag{58'}$$

$$u = f \quad \text{на} \quad \partial D \quad (f \text{— заданная непрерывная функция на } \partial D) \tag{59}$$

и внутренняя задача Неймана

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad \text{в} \quad D, \tag{60}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g \quad \text{на} \quad \partial D, \quad u \in \Re(D), \tag{61}$$

разрешимы, вообще говоря, не единственным образом [7].

Как известно, для любой ограниченной области D существует счетное множество положительных волновых чисел k, имеющее предельную точку лишь на бесконечности, для которых внутренняя задача Дирихле с однородным граничным условием (59) допускает нетривиальное решение. Будем называть эти значения собственными значениями внутренней задачи Дирихле. Для внутренней задачи Неймана с однородным граничным условием (61) также существует счетное множество волновых чисел k, имеющее предельную точку на бесконечности, для которых существуют нетривиальные решения. Эти значения назовем собственными значениями внутренней задачи Неймана.

Сформулируем следущее обобщение альтернативы Фредгольма, принадлежащее Д. Колтону и Р. Крессу [7, с. 33], которое будет далее применяться при доказательстве теорем существования.

Альтернатива Фредгольма. Пусть $\langle X, Y \rangle$ — дуальная система, $A : X \to X$; $B : Y \to Y$ — компактные сопряженные операторы. Тогда или

$$N(I - A) = \{0\} \quad \text{и} \quad N(I - B) = \{0\},$$
$$\text{и} \quad (I - A)(X) = X \quad \text{и} \quad (I - B)(Y) = Y$$

или

$$\dim N(I - A) = \dim(I - B) \in \mathbb{N},$$
$$\text{и} \quad (I - A)(X) = \{f \in X \mid \langle f, \psi \rangle = 0, \ \psi \in N(I - B)\},$$
$$\text{и} \quad (I - B)(Y) = \{g \in Y \mid \langle \varphi, g \rangle = 0, \ \varphi \in N(I - A)\}.$$

Теорема 11. *Если выполняется неравенство* $\operatorname{Im}(\bar{k}\lambda) \ge 0$, *то интегральное уравнение*

$$\varphi - K'\varphi - \lambda S\varphi = -2g \tag{62}$$

для неоднородной краевой задачи III *имеет единственное решение при любой правой части* g *тогда и только тогда, когда волновое число* k *не является собственным значением внутренней задачи Дирихле* (58), (59).

Доказательство. В силу первой части альтернативы Фредгольма [7] существование единственного решения интегрального уравнения (62) эквивалентно выполнению равенства

$$N(I - K' - \lambda S) = 0. \tag{63}$$

На основании теоремы 10 соотношение (63) эквивалентно тому, что $V = \{0\}$, откуда следует искомый результат.

Из доказанной теоремы непосредственно вытекает следующее утверждение.

Теорема 12. *Интегральное уравнение*

$$\varphi - K'\varphi = -2g \tag{64}$$

для неоднородной задачи II *имеет единственное решение при любой правой части* g *тогда и только тогда, когда волновое число* k *не является собственным значением внутренней задачи Дирихле* (58), (59).

Теорема 13. *Интегральное уравнение*

$$\psi + K\psi = 2f \tag{65}$$

для неоднородной краевой задачи I *однозначно разрешимо при любой правой части* f *тогда и только тогда, когда волновое число* k *не является собственным значением внутренней задачи Неймана* (60), (61).

Доказательство. В силу первой части альтернативы Фредгольма и теоремы 9 для однозначной разрешимости уравнения (65) необходимо и достаточно выполнения следующего условия: $N(I + K) = U = \{0\}$, откуда следует утверждение теоремы.

Согласно второй части альтернативы Фредгольма $\dim N(I + K) = \dim N(I + K') = m_N$, где $m_N = 0$, если k не является собственным значением внутренней задачи Неймана (это следует из теоремы 9) и $m_N \in \mathbb{N}$, если k является таковым. В последнем случае справедлив следующий результат (доказательство этой теоремы и теорем 15, 17 проводится методами, аналогичными изложенным в [7], гл. 3).

Теорема 14. *Пусть* $\varphi_1, \ldots, \varphi_{m_N}$ — *базис* $N(I + K')$ *и*

$$u_j(M) := \int_{\partial D} G(M, P)\varphi_j(P)\, dl_P, \quad M \in \Omega \backslash \partial D, \tag{66}$$

$j = 1, \ldots, m_N$. *Тогда*

$$\varphi_j = -\partial u_{j+}/\partial n \quad \text{на} \quad \partial D, \tag{67}$$

$j = 1, \ldots, m_N$, *а функции*

$$\psi_j := -\bar{u}_{j+} \quad \text{на} \quad \partial D, \tag{68}$$

$j = 1, \ldots, m_N$, *образуют базис в* $N(I + K)$. *Матрица*

$$\langle \psi_j, \varphi_s \rangle = \int_{\partial D} \bar{u}_{j+} \frac{\partial u_s}{\partial n} dl, \quad j, s = 1, \ldots, m_N, \tag{69}$$

является невырожденной.

Доказательство. Так как $\varphi_j + K'\varphi_j = 0$, то на основании свойства 4 имеем

$\partial u_{j-}/\partial n = 0$. Учитывая соотношение для скачка нормальной производной потенциала простого слоя (8), находим, что $\varphi_j = -\partial u_{j+}/\partial n$ на ∂D и равенство (67) доказано. Далее, так как в силу свойства 4 и леммы 2 [1] $u_j(M) \in \Re(D)$ и удовлетворяет в D уравнению Гельмгольца (1.1), то $u_{j-} \in U$. Поскольку k вещественно, отсюда с учетом свойства 1 вытекает $\overline{u}_{j-} = \overline{u}_{j+} \in U = N(I+K)$.

Докажем теперь, что функции $\psi_j = -\overline{u}_{j+}$ образуют базис в $N(I+K)$. Пусть

$$\sum_{j=1}^{m_N} \alpha_j \psi_j = 0.$$

Покажем, что тогда $\alpha_j = 0$, $j = 1, \ldots, m_N$. Действительно, умножив обе части этого равенства на $\varphi_l = -\partial u_{l+}/\partial n$, $l = 1, \ldots, m_N$, и проинтегрировав по ∂D, получим, что α_j являются решением следующей системы линейных уравнений:

$$\sum_{j=1}^{m_N} \alpha_j \langle \psi_j, \varphi_l \rangle = 0, \quad l = 1, \ldots, m_N. \tag{70}$$

Определим

$$u := \sum_{j=1}^{m_N} \overline{\alpha}_j u_j.$$

Тогда u удовлетворяет граничным условиям (1.4). Кроме того,

$$\int_{\partial D} \overline{u}_+ \frac{\partial u_+}{\partial n} dl = \sum_{l=1}^{m_N} \overline{\alpha}_l \sum_{j=1}^{m_N} \alpha_j \langle \psi_j, \varphi_l \rangle = 0$$

в силу (70) и из теоремы 1 [1] вытекает, что $u = 0$ в $\Omega \setminus D$. Отсюда следует, что $\partial u_+/\partial n = 0$ на ∂D и, значит, $\sum_{j=1}^{m_N} \overline{\alpha}_j \varphi_j = 0$. Но $\varphi_1, \ldots, \varphi_{m_N}$ — базис в $N(I +$ $+ K)$, поэтому $\alpha_j = 0$, $j = 1, \ldots, m_N$, и линейная независимость функций $\psi_1, \ldots$ $\ldots, \psi_{m_N}$, а также невырожденность матрицы (69) установлена.

***Замечание* 1.** Так как собственные значения внутренней задачи Неймана вещественны, то можно образовать вещественный базис из решений однородной внутренней задачи Неймана. Поэтому можно выбрать базис $\varphi_1, \ldots, \varphi_{m_N}$ в $N(I +$ $+ K')$ в теореме 14 таким, что $\psi_1, \ldots, \psi_{m_N}$ принимают вещественные значения.

Теорема 15. *Краевая задача* I *разрешима и притом единственным способом.*

Доказательство. Если k не является собственным значением внутренней задачи Неймана (60), (61), то искомый результат вытекает из первой части альтернативы Фредгольма и теорем 9 и 2 [1].

Если k является собственным значением, то решение задачи I будем искать в виде

$$u(M) = \int_{\partial D} \frac{\partial G(M,P)}{\partial n_P} \psi(P) dl_P - \sum_{j=1}^{m_N} \alpha_j u_j(M), \quad M \in \Omega \setminus \overline{D},$$

где u_j, $j = 1, \ldots, m_N$, определяются по формулам (66).

При этом предполагается в соответствии с замечанием 1, что функции $\psi_j =$ $= -u_{j+}|_{\partial D}$, $j = 1, \ldots, m_N$, вещественны. Тогда $u(M)$ удовлетворяет граничным условиям (1.4), уравнению (1.1), условию Зоммерфельда и условию (1.3). Учитывая свойства 1 и 2, легко видеть, что для $u(M)$ будет выполняться также граничное условие (1.5) и, значит, $u(M)$ будет являться решением задачи 1, если ψ и коэффициенты α_j, $j = 1, \ldots, m_N$, выбраны таким образом, что

$$\psi + K\psi = 2f - 2\sum_{j=1}^{m_N} \alpha_j \psi_j. \tag{71}$$

Для разрешимости интегрального уравнения (71) в силу второй части альтернативы Фредгольма должно выполняться условие

$$\left\langle 2f - 2\sum_{j=1}^{m_N} \alpha_j \psi_j, \varphi_l \right\rangle = 0, \quad l = 1, \ldots, m_N,$$

т. е. α_j, $j = 1, \ldots, m_N$, должны удовлетворять следующей системе алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=1}^{m_N} \alpha_j \langle \psi_j, \varphi_l \rangle = \langle f, \varphi_l \rangle, \quad l = 1, \ldots, m_N.$$

Эта система имеет единственное решение, так как согласно теореме 14 ее матрица $\langle \psi_j, \varphi_l \rangle$, $j, l = 1, \ldots, m_N$, невырождена. Этим теорема доказана.

Отметим, что решение интегрального уравнения (71) не единственно.

Аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема 16. *Краевая задача* II *разрешима и притом единственным способом.*

Учитывая, что собственные значения внутренних задач Дирихле и Неймана, как правило, заранее неизвестны, представляет интерес получение интегральных уравнений для краевых задач I – III, имеющих (в отличие от уравнений (41), (43), (44)) единственное решение при всех значениях волнового числа.

С этой целью решение $u(M)$ краевой задачи I будем искать в виде комбинации потенциалов простого и двойного слоев

$$u(M) = \int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial G(M, P)}{\partial n_P} - i\eta G(M, P) \right\} \psi(P)\, dl_P, \quad M \in \Omega \setminus \partial D, \tag{72}$$

где $\eta \neq 0$ — произвольное вещественное число, удовлетворяющее неравенству

$$\eta \operatorname{Re} k \geq 0. \tag{73}$$

Ясно, что если плотность $\psi \in C(\partial D)$ является решением интегрального уравнения

$$\psi + K\psi - i\eta S\psi = 2f, \tag{74}$$

то функция $u(M)$, определяемая формулой (72), представляет собой решение краевой задачи I.

Теорема 17. *Интегральное уравнение* (74) *для краевой задачи* I *имеет единственное решение для всех значений волновых чисел, удовлетворяющих условию* $\operatorname{Im} k \geq 0$.

Доказательство. Учитывая, что оператор $K - i\eta S : C(\partial D) \to C(\partial D)$ является компактным, для однозначной разрешимости уравнения (74) в силу теоремы 1.16 из [7] достаточно показать, что однородное уравнение

$$\psi + K\psi - i\eta S\psi = 0 \tag{75}$$

имеет только тривиальное решение $\psi = 0$. Пусть $\psi \in C(\partial D)$ является решением (75). Тогда $u(M)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца (1.1) в $\Omega \setminus \overline{D}$, условию Зоммерфельда (1.2), условию (1.3) и однородным граничным условиям (1.4) и (1.5), и значит, $u = 0$ в $\Omega \backslash D$ согласно теореме о единственности. Поэтому на основании следствий 3 и 5 получим $u_- = -\psi$, $\partial u_- / \partial n = -i\eta\psi$ на ∂D. Из первой формулы Грина отсюда находим

$$i\eta \int_{\partial D} |\psi|^2 \, dl = \int_D \left(|\operatorname{grad} u|^2 - k^2 |u|^2 \right) dS.$$

Взяв мнимую часть от обеих частей, получим

$$\eta \int_{\partial D} |\psi|^2 \, dl = -2 \operatorname{Re} k \operatorname{Im} k \int_D |u|^2 \, dS,$$

откуда следует, что $\psi = 0$. Теорема доказана.

Отметим, что можно также получить интегральные уравнения для задач II и III, однозначно разрешимые при всех значениях k, удовлетворяющих неравенству $\operatorname{Im} k \geq 0$. Эти уравнения в отличие от (74) будут иметь сильную особенность и при их численном решении подлежат регуляризации.

В предыдущих пунктах решения краевых задач I – III представлены в виде потенциалов простого и двойного слоев и получены соответствующие этим задачам интегральные уравнения (41), (43), (44). Можно также получить интегральные уравнения, отправляясь от теоремы 6 об интегральном представлении решения. Найденные таким способом уравнения оказываются сопряженными к уравнениям, полученным посредством поверхностных потенциалов. Проиллюстрируем этот подход на примере краевой задачи III.

Пусть u представляет собой решение задачи III. Тогда $u \in \Re(\Omega \backslash \overline{D})$ и по теореме 6 имеем

$$u(M) = \int_{\partial D} \left\{ u(P) \frac{\partial G(M,P)}{\partial n_P} - \frac{\partial u(P)}{\partial n_P} G(M,P) \right\} dl_P, \quad M \in \Omega \backslash \overline{D}.$$

Опуская точку M на границу ∂D и используя свойства 1 и 2, находим

$$-u + Ku - S\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \quad \partial D. \tag{76}$$

Учитывая граничные условия (1.7), из соотношения (76) получаем интегральное уравнение

$$\varphi - K\varphi - \lambda S\varphi = -2g \tag{77}$$

второго рода для неизвестного граничного значения $\varphi := u$ на ∂D.

Уравнение (77) является сопряженным к уравнению (44), которое получено с использованием потенциала простого слоя. Поэтому, на основании альтернативы Фредгольма и теоремы 10 получаем следующие результаты.

Теорема 18. *Пусть функция* $\lambda \in C(\partial D)$ *удовлетворяет соотношению* $\operatorname{Im}(\bar{k}\lambda) \geq 0$. *Тогда интегральное уравнение* (77) *имеет единственное решение тогда и только тогда, когда волновое число* k *не является собственным значением внутренней задачи Дирихле* (58), (59).

До сих пор исследовались граничные задачи для однородного уравнения Гельмгольца (1.1). В общем случае задача нахождения функции u, удовлетворяющей неоднородному уравнению Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 u = f \quad \text{в} \quad \Omega \backslash \overline{D}, \tag{78}$$

условиям (1.2) – (1.4) и одному из условий (1.5), (1.6) или (1.7), сводится к решению соответствующей краевой задачи I, II или III. В самом деле, без ограничения общности можно считать, что $f = -\delta(P, M)$ — дельта-функция, а граничные условия (1.5) – (1.7) однородные. Решение этих задач ищем в виде $u = v + G$, где v — новая неизвестная функция. В силу того, что для u выполняется одно из однородных условий (1.5) – (1.7) и учитывая, что $G|_{\partial\Omega} = 0$, функция v должна удовлетворять соответственно одному из следующих граничных условий:

$$v|_{\partial D} = -G|_{\partial D}, \tag{79}$$

$$\partial v/\partial n|_{\partial D} = -\partial G/\partial n|_{\partial D} \tag{80}$$

или

$$\left(\frac{\partial v}{\partial n} + \lambda v\right)\Big|_{\partial D} = -\left(\frac{\partial G}{\partial n} + \lambda G\right)\Big|_{\partial D}, \tag{81}$$

и условию

$$v|_{\partial\Omega} = 0.$$

Кроме того, можно показать, что $\Delta G(P, M) + k^2 G(P, M) = -\delta(P, M)$. Поэтому функция v должна удовлетворять однородному уравнению Гельмгольца $\Delta v + k^2 v = 0$, условиям (1.2) – (1.4) и одному из краевых условий (79), (80) или (81).

3. Об алгоритме эффективного вычисления ядер интегральных операторов и о представлении решений краевых задач в виде рядов по цилиндрическим функциям. Для решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода (41), (43), (44), (74), (77), к которым сведены исследуемые в работе краевые задачи, существует целый ряд численных методов. При использовании этих методов необходимо иметь алгоритмы эффективного вычисления функций $G(M, P)$, $\partial G(M, P)/\partial n_P$ и $\partial G(M, P)/\partial n_M$, входящих в ядра соответствующих интегральных уравнений. Соотношение (1.46) представляет собой такой алгоритм для вычисления функции $G(P, M)$. Будем строить алгоритм вычисления $\partial G(M, P)/\partial n_P$, исходя из выражения (1.59). Из асимптотических оценок (1.56) – (1.58), полученных при доказательстве леммы 2 [1], находим, что общие члены рядов (1.50) – (1.53) имеют порядок убывания $O((r_P/r_M)^{\nu_m \operatorname{sign}(r_P - r_M)}/\nu_m)$, если $r_P \neq r_M$, и $O(1/\nu_m^2)$, если $r_P = r_M$. Используя эти же оценки для улучшения сходимости указанных рядов, получаем для $\partial G_0(M, P)/\partial n_P$ следующее представление:

$$\frac{\partial G_0(M, P)}{\partial n_P} = G_1(M, P) + G_2(M, P) + G_3(M, P), \tag{82}$$

где

$$G_1(M, P) = \begin{cases} \dfrac{i\pi}{\Phi}\cos\alpha(P)\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\Big\{ kJ'_{\nu_m}(kr_P)H^{(1)}_{\nu_m}(kr_M) + \dfrac{i}{\pi r_P}\left(\dfrac{r_P}{r_M}\right)^{\nu_m} + \\ \quad + \dfrac{i}{\pi r_P}\dfrac{k^2(r_M^2 - r_P^2)}{4\nu_m}\left(\dfrac{r_P}{r_M}\right)^{\nu_m}\Big\}\sin(\nu_m\varphi_P)\sin(\nu_m\varphi_M), \ r_P \le r_M, \\ \dfrac{i\pi}{\Phi}\cos\alpha(P)\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\Big\{ kH^{(1)\prime}_{\nu_m}(kr_P)J_{\nu_m}(kr_M) - \dfrac{i}{\pi r_P}\left(\dfrac{r_M}{r_P}\right)^{\nu_m} - \\ \quad - \dfrac{i}{\pi r_P}\dfrac{k^2(r_P^2 - r_M^2)}{4\nu_m}\left(\dfrac{r_M}{r_P}\right)^{\nu_m}\Big\}\sin(\nu_m\varphi_P)\sin(\nu_m\varphi_M), \ r_M \le r_P, \end{cases}$$

$$G_2(M,P)=\begin{cases}-\dfrac{i\pi}{\Phi r_P}\sin\alpha(P)\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\nu_m J_{\nu_m}(kr_P)H^{(1)}_{\nu_m}(kr_M)+\dfrac{i}{\pi}\left(\dfrac{r_P}{r_M}\right)^{\nu_m}+\right.\\ \left.+\;\dfrac{i}{\pi}\,\dfrac{k^2(r_M^2-r_P^2)}{4\nu_m}\left(\dfrac{r_P}{r_M}\right)^{\nu_m}\right\}\cos(\nu_m\varphi_P)\sin(\nu_m\varphi_M),\;\; r_P\le r_M,\\ -\dfrac{i\pi}{\Phi r_P}\sin\alpha(P)\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\nu_m H^{(1)}_{\nu_m}(kr_P)J_{\nu_m}(kr_M)+\dfrac{i}{\pi}\left(\dfrac{r_M}{r_P}\right)^{\nu_m}+\right.\\ \left.+\;\dfrac{i}{\pi}\,\dfrac{k^2(r_P^2-r_M^2)}{4\nu_m}\left(\dfrac{r_M}{r_P}\right)^{\nu_m}\right\}\cos(\nu_m\varphi_P)\sin(\nu_m\varphi_M),\;\; r_M\le r_P,\end{cases}$$

– ряды, общие члены которых убывают со скоростью $O((r_P/r_M)^{\nu_m \operatorname{sign}(r_P-r_M)}/\nu_m^2)$, а

$$G_3(M,P)=\begin{cases}\cos\alpha(P)\,\dfrac{k^2(r_M^2-r_P^2)}{16\pi r_P}\ln\Psi(M,P)-\\ \qquad -\sin\alpha(P)\,\dfrac{k^2(r_M^2-r_P^2)}{8\pi r_P}\,\Psi_1(M,P),\quad r_P\le r_M,\\ \cos\alpha(P)\,\dfrac{k^2(r_M^2-r_P^2)}{16\pi r_P}\ln\Psi(M,P)-\\ \qquad -\sin\alpha(P)\,\dfrac{k^2(r_P^2-r_M^2)}{8\pi r_P}\,\Psi_2(M,P),\quad r_M\le r_P,\end{cases}$$

$$\Psi_1(M,P)=\operatorname{arctg}\frac{(r_P/r_M)^{\pi/\Phi}\sin\dfrac{\pi}{\Phi}(\varphi_P+\varphi_M)}{1-(r_P/r_M)^{\pi/\Phi}\cos\dfrac{\pi}{\Phi}(\varphi_M+\varphi_P)}-$$

$$-\operatorname{arctg}\frac{(r_P/r_M)^{\pi/\Phi}\sin\dfrac{\pi}{\Phi}(\varphi_P-\varphi_M)}{1-(r_P/r_M)^{\pi/\Phi}\cos\dfrac{\pi}{\Phi}(\varphi_P-\varphi_M)},$$

$$\Psi_2(M,P)=\operatorname{arctg}\frac{(r_M/r_P)^{\pi/\Phi}\sin\dfrac{\pi}{\Phi}(\varphi_P+\varphi_M)}{1-(r_M/r_P)^{\pi/\Phi}\cos\dfrac{\pi}{\Phi}(\varphi_P+\varphi_M)}-$$

$$-\operatorname{arctg}\frac{(r_M/r_P)^{\pi/\Phi}\sin\dfrac{\pi}{\Phi}(\varphi_P-\varphi_M)}{1-(r_M/r_P)^{\pi/\Phi}\cos\dfrac{\pi}{\Phi}(\varphi_P-\varphi_M)}.$$

Соотношение (1.59), в котором функция $\partial G_0(M,P)/\partial n_P$ представлена в виде (82), и есть эффективный алгоритм для вычисления $\partial G(M,P)/\partial n_P$. Аналогично получается алгоритм для вычисления $\partial G(M,P)/\partial n_M$.

Отметим, что, зная решение интегральных уравнений, можно с помощью соответствующих интегральных представлений находить решения краевых задач I – III. Однако в этом случае для вычисления решения в заданных точках области $\Omega\setminus\overline{D}$ необходимо каждый раз выполнять интегрирование по контуру ∂D.

Эту процедуру можно сделать излишней для точек из областей $K_{r_1} := \{M(r_M, \varphi_M) \in \Omega \mid 0 < r_M \le r_1\}$ и $K_{r_2} := \{M(r_M, \varphi_M) \in \Omega \mid r_2 \le r_M < \infty\}$, где r_1 и r_2 выбраны так, чтобы $\overline{D} \subset \{M(r_M, \varphi_M) \in \Omega \mid r_1 < r_M < r_2\}$. Для этого заметим, что общее решение уравнения (1.1) в области K_{r_1}, удовлетворяющее граничному условию (1.4) и условию (1.3), представимо в виде

$$u(r_M, \varphi_M) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_{\nu_n}(kr_M)\sin(\nu_n\varphi_M), \quad M \in K_{r_1}, \tag{83}$$

а общее решение уравнения (1.1) в K_{r_2}, удовлетворяющее условиям (1.4) и (1.2), имеет вид

$$u(r_M, \varphi_M) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n H^{(1)}_{\nu_n}(kr_M)\sin(\nu_n\varphi_M), \quad M \in K_{r_2}. \tag{84}$$

Выразим коэффициенты A_n и B_n, $n = 1, 2, \ldots$, например, в случае задачи III, через решение интегрального уравнения (44). Полагая в (84) $r_M = r_2$ и учитывая соотношения (42) и (1.20), находим

$$B_m = \frac{2}{\Phi H^{(1)}_{\nu_m}(kr_2)} \int_{-\Phi}^{0} u(r_2, \varphi_M)\sin(\nu_m\varphi_M)\,d\varphi_M =$$

$$= \frac{2}{\Phi H^{(1)}_{\nu_m}(kr_2)} \int_{-\Phi}^{0} \left(\int_{\partial D} \frac{i\pi}{\Phi} \sum_{n=1}^{\infty} H^{(1)}_{\nu_n}(kr_2) J_{\nu_n}(kr_P)\sin(\nu_n\varphi_M)\sin(\nu_n\varphi_P)\varphi(P)\,dS_P \right) \times$$

$$\times \sin(\nu_m\varphi_M)\,d\varphi_M = \frac{i\pi}{\Phi} \int_{\partial D} J_{\nu_m}(kr_P)\sin(\nu_m\varphi_P)\varphi(P)\,dl_P, \quad m = 1, 2, \ldots . \tag{85}$$

Аналогично,

$$A_m = \frac{i\pi}{\Phi} \int_{\partial D} H^{(1)}_{\nu_m}(kr_P)\sin(\nu_m\varphi_P)\varphi(P)\,dl_P, \quad m = 1, 2, \ldots . \tag{86}$$

Формулы (83) – (86) полностью определяют решения в областях K_{r_1} и K_{r_2}.

В заключение сделаем следующие замечания.

1. Все результаты этой работы справедливы также в случае, когда граничные условия (1.4) заменены следующими условиями:

$$u(r, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(r, -\Phi)}{\partial \varphi} = 0, \quad 0 < r < \infty, \tag{87}$$

или же условиями

$$\frac{\partial u(r, 0)}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial u(r, -\Phi)}{\partial \varphi} = 0, \quad 0 < r < \infty.$$

При этом, например, если заданы граничные условия (87), во всех соотношениях следует положить $\nu_n = (2n-1)\pi/(2\Phi)$, $n = 1, 2, \ldots$, а функцию $\Psi(M, P)$ задать по формуле

$$\Psi(M, P) = \frac{\operatorname{ch}^2\left(\frac{\pi}{4\Phi}\ln\frac{r_P}{r_M}\right) - \sin^2\frac{\pi}{4\Phi}(\varphi_P - \varphi_M)}{\operatorname{sh}^2\left(\frac{\pi}{4\Phi}\ln\frac{r_P}{r_M}\right) + \sin^2\frac{\pi}{4\Phi}(\varphi_P - \varphi_M)} \times$$

$$\times \frac{\operatorname{sh}^2\left(\frac{\pi}{4\Phi}\ln\frac{r_P}{r_M}\right) + \sin^2\frac{\pi}{4\Phi}(\varphi_P + \varphi_M)}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{\pi}{4\Phi}\ln\frac{r_P}{r_M}\right) - \sin^2\frac{\pi}{4\Phi}(\varphi_P + \varphi_M)}.$$

2. Легко видеть (см. доказательство теоремы 1 и теоремы 3.1 из [8]), что условие (1.2) эквивалентно следующему условию:

$$u(r, \varphi) = O(1) \quad \text{в} \quad \Omega\setminus\overline{D} \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} k > 0,$$

$$\frac{\partial u(r, \varphi)}{\partial r} - iku(r, \varphi) = o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad r \to \infty \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} k = 0,$$

а значит, все результаты работы справедливы при этом условии.

3. Еще одним способом выделения решения в случае $\operatorname{Im} k = 0$ является принцип предельного поглощения. Проводя рассуждения, аналогичные тем, с помощью которых доказана теорема 6.1 из [8], получаем следующий результат.

Теорема 19 (принцип предельного поглощения). *Пусть* $\operatorname{Im} k = 0$. *Тогда решение* u_ε *уравнения*

$$\Delta u_\varepsilon + (k^2 + i\varepsilon)u_\varepsilon = 0, \quad \varepsilon > 0,$$

удовлетворяющее граничным условиям (1.4), (1.5), *условию на ребре* (1.3) *и условию* $u_\varepsilon = O(1)$ *в* $\Omega\setminus\overline{D}$ *при* $\varepsilon \to +\infty$, *стремится к решению* u *задачи* 1 *в следующем смысле:* $u_\varepsilon \to u$ *в любой области* $\Omega_R\setminus\overline{D}$ *в метрике пространства* $W_2^{(1)}(\Omega_R\setminus\overline{D})$; $u_\varepsilon \to u$ *в любой конечной внутренней подобласти* ω *из* $\Omega\setminus\overline{D}$ *в метрике* $W_2^{(2)}(\omega)$. *Кроме того,* $u_\varepsilon \to u$ *равномерно в любой внутренней подобласти из* $\Omega\setminus\overline{D}$.

Аналогичные теореме 19 рассуждения справедливы также для краевых задач II и III.

Автор выражает благодарность В. К. Дзядыку за полезное обсуждение результатов данной статьи, а также статьи [1], которое привело к улучшению изложения ряда мест этих работ.

1. *Подлипенко Ю. К.* О краевых задачах дифракции в угловой области // Укр. мат. журн.– – 1993.– **45**, № 3. – С. 403 – 418.
2. *Кузнецов Д. С.* Специальные функции. – М.: Высш. шк., 1965. – 241 с.
3. *Федорюк М. В.* Метод перевала. – М.: Наука, 1967. – 368 с.
4. *Арсенин В. Я.* Методы математической физики и специальные функции. – М.: Наука, 1984. – 383 с.
5. *Справочник* по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 830 с.
6. *Подлипенко Ю. К.* Применение метода интегральных уравнений к решению задачи дифракции в клине. – Киев, 1985. – 31 с. – (Деп. в УкрНИИНТИ, №1119 Ук 85).
7. *Колтон Д., Кресс Р.* Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. – М.: Мир, 1987. – 311 с.
8. *Подлипенко Ю. К.* О краевых задачах для уравнения Гельмгольца в клине. – Киев, 1991. – – 51 с. – (Препринт / АН Украины. Ин-т математики; 91. 47).

Получено 28. 09. 92