УДК 517.95

В. В. Курта, канд. физ.-мат. наук (Ин-т прикл. математики и механики АН Украины, Донецк)

О ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В НЕОГРАНИЧЕННЫХ НЕЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБЛАСТЯХ

Сформулированы теоремы о единственности решений смешанной начально-краевой задачи для вырождающихся квазипараболических уравнений второго порядка в неограниченных нецилиндрических областях в классах растущих функций. Приведены априорные оценки специального вида, аналогичные принципу Сен-Венана. Доказательства сформулированных результатов основаны на методе введения параметра.

Сформульовані теореми про єдиність розв'язків змішаної початково-крайової задачі для квазіпараболічних рівнянь другого порядку, які вироджуються, в необмежених нециліндричних областях у класах зростаючих функцій. Наведені апріорні оцінки спеціального вигляду, аналогічні принципу Сен-Венана. Доведення сформульованих результатів грунтуються на методі впровадження параметра.

Пусть ω — неограниченная область в $\mathbb{R}^{n+1}_{x,t}$, $n \geq 1$. Будем говорить, следуя [1], что ω имеет нижнюю огибающую $\chi(s)$, если $\omega \subset \mathbb{R}^{n+1}_{x,t} \cap \{(x, t): -\chi(|x|) < t < T < \infty\}$, где $\chi(s)$ — произвольная непрерывная монотонно неубывающая на $\mathbb{R}^1_+$ функция такая, что $\chi(0) = 0$, а $T \geq 0$.

Пусть граница $\partial\omega$ области ω такова, что $\partial\omega = \gamma \cup \Gamma$, где γ — верхняя крышка, а Γ — собственная граница ω (см., например, [2, с. 167]). Пусть также $\Gamma = \Gamma_\alpha \cup \Gamma_\beta, \Gamma_\beta \in C^1$, и $\nu = (\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_n)$ — единичный вектор внешней относительно ω нормали к Γ. Обозначим через $Q(l; \tau)$ криволинейный параллелепипед $\{(x, t): |x_i| < l; -\chi(|x|) < t < \tau\}$, $\tau \leq T$, и положим $\omega(l, \tau) = \omega \cap Q(l, \tau)$; $\omega(l; 0, T) = \omega \cap \{(x, t): |x_i| < l; 0 < t < T\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Относительно области ω будем предполагать, что для любого $\omega(l, \tau)$ справедлива формула Гаусса — Остроградского.

Пусть на множестве $\omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ определены измеримые функции $A_i(x, t, \eta, \xi)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, удовлетворяющие условию

$$\sum_{i=1}^{n} A_i^2(x, t, \eta, \xi) \leq k \sum_{i=1}^{n} A_i(x, t, \eta, \xi)\xi_i, \tag{1}$$

где k — положительная постоянная.

В области ω рассмотрим смешанную граничную задачу для уравнения вида

$$u_t - \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} A_i(x, t, u, \nabla_x u) \equiv u_t - L(x, t, u, \nabla_x u) = 0 \tag{2}$$

с граничными условиями

$$u|_{\Gamma_\alpha} = 0, \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} A_i(x, t, u, \nabla_x u)\nu_i|_{\Gamma_\beta} = 0. \tag{4}$$

Частным случаем граничной задачи (2) – (4) является задача Коши для уравнения (2).

Пусть открытое ограниченное множество $G \subset \omega$, $\tilde{\Gamma} \subset \partial G \cap \Gamma$. Через

 ISSN 0041-6053. Укр. мат. журн., 1993, т. 45, № 4

$W(G; \tilde{\Gamma}_\alpha)$ обозначим пространство функций $u(x, t)$, полученное пополнением по норме

$$\|u\| = \left(\int\limits_G \left(|u|^2 + |u_t|^2 + |\nabla_x u|^2\right) dxdt\right)^{1/2}$$

множества бесконечно дифференцируемых в G функций, равных нулю на $\tilde{\Gamma}_\alpha$.

Обобщенным решением уравнения (2) в G с граничными условиями (3), (4) на $\Gamma \cap \partial G$ при условии, что коэффициенты оператора L удовлетворяют соотношению (1), будем называть функцию $u(x, t)$, принадлежащую пространству $W(G; \Gamma_\alpha \cap \partial G)$, такую, что для любой $\psi \in \overset{\circ}{W}(G \cup \gamma \cup \Gamma_\beta)$ справедливо соотношение

$$\int\limits_G \left[u_t \psi + \sum_{i=1}^n A_i(x, t, u, \nabla_x u) \psi_{x_i}\right] dxdt = 0. \tag{5}$$

Обобщенным решением задачи (2) – (4) в неограниченной области ω будем называть функцию $u(x, t)$, которая для любого ограниченного открытого множества $G \subset \omega$ является обобщенным решением уравнения (2) в G с граничными условиями (3), (4) на $\Gamma \cap \partial G$.

Заметим, что граничное условие (3) должно быть задано на всей Γ_α, например, в том случае, когда в точках Γ_α имеем [3]

$$\sum_{i=1}^n A_i(x, t, u, \nabla_x u) \nu_i > 0.$$

Для изучения задачи (2) – (4) рассмотрим функцию $w(x, t) = \exp(-\mu^2 t) u(x, t)$, где $\mu \geq 0$ — параметр [4].

Лемма 1. *Пусть* $\omega \subset \mathbb{R}^{n+1}_{x,t}$ *имеет в качестве нижней огибающей функцию* $\chi(s)$ *и выполнено условие* (1). *Тогда для* $w(x, t) = \exp(-\mu^2 t) u(x, t)$, *где* $u(x, t)$ *— обобщенное решение однородной граничной задачи* (2) – (4) *при любых* $-\infty < t < \tau \leq T$ *и* $l_2 > l_1 > 1$, *справедлива оценка*

$$\mu^2 \int\limits_{\omega(l_1;\tau)} w^2(x, t) dxdt \leq \frac{2kn}{\rho^2} \int\limits_{\omega(l_2;\tau)} w^2(x, t) dxdt, \tag{6}$$

где $0 < \rho \leq l_2 - l_1$.

Доказательство. Положим в интегральном тождестве (5) $\psi(x, t) = w(x, t) \exp(-\mu^2 t) \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — непрерывно дифференцируемая в $\mathbb{R}^n_x$ функция, $\varphi(x) \geq 1$ в области $\{x: |x_i| < l_1,\ i = 1, 2, \dots, n\}$, $\varphi(x) \equiv 0$ вне $\{x: |x_i| < l_2,\ i = 1, 2, \dots, n\}$, $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ на множестве $\{x: l_1 < |x_i| < l_2,\ i = 1, 2, \dots, n\}$ и $|\operatorname{grad} \varphi|^2 \leq 4n\ (l_2 - l_1)^{-2} \varphi(x)$ в $\mathbb{R}^n_x$. При любом $-\infty < \tau \leq T$ имеем

$$\int\limits_{\omega(l_2;\tau)} \Big\{\left(w \exp(\mu^2 t)\right)_t w \exp(-\mu^2 t) \varphi + \sum_{i=1}^n A_i(x, t, u, \nabla_x u) \times$$

$$\times u_{x_i} \exp(-2\mu^2 t) \varphi + \sum_{i=1}^n A_i(x, t, u, \nabla_x u) \varphi_{x_i} w \exp(-\mu^2 t)\Big\} dxdt = 0.$$

Преобразуя первый член этого равенства интегрированием по частям, получаем

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\omega(l_2;\tau)}(w^2)_t\varphi\,dxdt+\mu^2\int\limits_{\omega(l_2;\tau)}w^2\varphi\,dxdt+$$

$$+\int\limits_{\omega(l_2;\tau)}\sum_{i=1}^{n}A_i(x,t,u,\nabla_x u)u_{x_i}\varphi\exp(-\mu^2 t)\,dxdt\le$$

$$\le\frac{\mathit{k}}{2}\int\limits_{\omega(l_2;\tau)}\sum_{i=1}^{n}A_i^2(x,t,u,\nabla_x u)\varphi\exp(-2\mu^2 t)\,dxdt+$$

$$+\frac{\mathit{k}}{2}\int\limits_{\omega(l_2;\tau)}|\nabla_x\varphi|^2 w^2\varphi^{-1}\,dxdt.$$

Учитывая условие (1), нулевые граничные значения (3), (4) и оценку роста градиента функции $\varphi(x)$, находим

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\omega(l_2;\tau)}w^2(x,\tau)\varphi(x)dx+\mu^2\int\limits_{\omega(l_2;\tau)}w^2(x,t)\varphi(x)\,dxdt\le$$

$$\le\frac{2\mathit{k}n}{(l_2-l_1)^2}\int\limits_{\omega(l_2;\tau)}w^2(x,t)\,dxdt.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть* $\omega\subset\mathbb{R}^{n+1}_{x,t}$ *имеет в качестве нижней огибающей функцию* $\chi(s)$ *и выполнено условие* (1). *Тогда для любого обобщенного решения* $u(x,t)$ *однородной граничной задачи* (2) – (4) *при любых* $-\infty<t<\tau\le T$ *и* $l_2>l_1>1$ *справедлива оценка*

$$\int\limits_{\omega(l_1;\tau)}u^2\,dxdt\ \le\ \exp\left\{-k+2\mu^2\big(\tau+\chi(l_2)\big)\right\}\int\limits_{\omega(l_2;\tau)}u^2\,dxdt, \tag{7}$$

где постоянные k *и* μ *связаны соотношением*

$$p\ \equiv\ \frac{2\mathit{k}k^2 n}{\mu^2(l_2-l_1)^2}\ \le\ e^{-1}, \tag{8}$$

k *натуральное.*

Доказательство. Пусть $\rho_k=(l_2-l_1)/k$; $l_1(s)=l_1+s\rho_k$, $l_2(s)=l_1(s)+\rho_k$; $s=0,1,\dots,k-1$. Положим в неравенстве (6) $l_1=l_1(s)$, $l_2=l_2(s)$, $\rho=\rho_k$,

$$\int\limits_{\omega(l_1(s);\tau)}w^2\,dxdt\ \le\ \frac{2\mathit{k}n}{\rho_k^2\mu^2}\int\limits_{\omega(l_2(s);\tau)}w^2\,dxdt. \tag{9}$$

Применим последовательно неравенство (9), соответствующее $s=s_0>0$, для оценки правой части неравенства (9), соответствующего $s=s_0-1$, полагая $s_0=1,2,\dots,k-1$. В результате получим

$$\int\limits_{\omega(l_1(s);\tau)}w^2\,dx\,dt\ \le\ p^k\int\limits_{\omega(l_2(s);\tau)}w^2\,dx\,dt. \tag{10}$$

Согласно условию (8) $p<e^{-1}$. С учетом этого и связи между функциями $w(x,t)$ и $u(x,t)$ из (10) выводим неравенство (7). Лемма доказана.

Соотношение (7) позволяет доказать теорему о единственности однородной граничной задачи (2) – (4) в областях с нетривиальной нижней огибающей в классе растущих функций, аналогичную теореме А. Н. Тихонова [5].

Теорема 1. *Пусть* ω *— неограниченная область в* $\mathbb{R}^{n+1}_{x,t}$ *и* $\xi(s)$ *— произвольная непрерывная монотонно неубывающая на* $\mathbb{R}^1_+$ *функция такая, что* $\xi(0) = 0$ *и* $\lim \xi(s)s^{-2} = 0$ *при* $s \to \infty$; *коэффициенты оператора* L *удовлетворяют условию* (1); *для обобщенного решения* $u(x, t)$ *однородной граничной задачи* (2) – (4) *в* ω *существуют положительные постоянные* a *и* b *такие, что для некоторой последовательности целых чисел* $m_j \to \infty$

$$\int\limits_{\omega(2^{m_j};0)} u^2(x,t)\,dxdt \le \exp\left\{a\frac{2^{2m_j}}{\xi(2^{m_j})+1}\right\} \tag{11}$$

и

$$\int\limits_{\omega(2^{m_j};0,T)} u^2(x,t)\,dxdt \le \exp\left\{b2^{2m_j}\right\}. \tag{12}$$

Если область ω *имеет в качестве нижней огибающей функцию* $A\,\xi(s)$, *где* $0 < A < n^{-1}(16e\kappa(2+[a]))^{-1}$, *то* $u(x,t) \equiv 0$ *в* ω.

Здесь и всюду ниже квадратные скобки обозначают целую часть числа.

Заметим, что первый результат о зависимости класса единственности решений смешанной краевой задачи для уравнения теплопроводности от огибающей $\chi(s)$ (при $\chi(s) = s^2$) получен А. Н. Тихоновым [5].

***Доказательство теоремы* 1.** Докажем вначале, что $u(x, t) \equiv 0$ в $\omega \cap \{(x, t)\colon t \le 0\}$, если, конечно, последнее не пусто. Положим в оценке (7) $\tau = 0$, $l_1 = 2^m$, $l_2 = 2^{m+1}$,

$$k = \lambda\frac{2^{2(m+1)}}{[\xi(2^{m+1})+1]};\quad \mu = \lambda\frac{2^{m+1}}{[\xi(2^{m+1})+1]}(8e\kappa n)^{1/2};\quad \lambda = 2+[a].$$

Легко проверить, что при любом $m \ge 1$ условие (8) выполнено. Поэтому

$$\int\limits_{\omega(l_1;\tau)} u^2dxdt \le \exp\left\{-k\left(1+2A\frac{\xi(2^{m+1})}{[\xi(2^{m+1})+1]}8e\kappa n\right)\right\}\int\limits_{\omega(l_2;\tau)} u^2dxdt.$$

Учитывая условие (11), налагаемое на рост решения $u(x, t)$, получаем, что при $m+1 = m_j$

$$\int\limits_{\omega(2^{m_j-1};0)} u^2dxdt \le \exp\Big\{(-\lambda + a + 16\lambda^2 e\kappa nA)\times$$

$$\times\frac{2^{2m_j}}{[\xi(2^{m_j})+1]}\Big\} \le \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{2^{2m_j}}{[\xi(2^{m_j})+1]}\right\}.$$

Следовательно, $u(x,t) \equiv 0$ на множестве $\omega \cap \{(x,t)\colon -\infty < t \le 0\}$ и, в частности, на $\omega_0 = \omega \cap \{(x,t)\colon t = 0\}$, если, конечно, последнее не пусто.

В результате получаем начально-краевую задачу (2) – (4) для области $\tilde{\omega}$, лежащей между плоскостями $t = 0$ и $t = T$.

Покажем, что $u(x,t) \equiv 0$ в $\tilde{\omega}$. В этом случае в качестве нижней огибающей области ω служит функция $\chi(s) \equiv 0$. Выберем в оценке (7) $\tau = \min\{T, (2\delta\lambda)^{-2}\}$, $l_1 = 2^m$, $l_2 = 2^{m+1}$, $k = \lambda 2^{2(m+1)}$, $\mu = \delta\lambda 2^{m+1}$, где $\lambda = [b]+2$, $\delta = (8\kappa en)^{1/2}$.

Аналогично предыдущему легко проверить, что условие (8) выполнено. Поэтому справедливо соотношение

$$\int\limits_{\omega(2^m;0,\tau)} u^2 dxdt \le \exp\left\{(-\lambda + 2\tau\delta^2\lambda^2)\, 2^{2(m+1)}\right\} \int\limits_{\omega(2^{m+1};0,\tau)} u^2 dxdt.$$

Учитывая (12), получаем при $m+1 = m_j$

$$\int\limits_{\omega(2^{m_j-1};0,\tau)} u^2 dxdt \le \exp\left\{(-\lambda + 2\tau\delta^2\lambda^2 + b)2^{2m_j}\right\}. \tag{13}$$

Так как $\tau \le \min\{T, (2\delta\lambda)^{-2}\}$, то $-\lambda + b + 2\tau\delta^2\lambda^2 < -1/2$ и, значит, при $m_j \to \infty$ из (13) имеем

$$\int\limits_{\omega \cap \{(x,t):0\le t\le\tau\}} u^2 dxdt = 0.$$

Следовательно, $u = 0$ почти всюду (п. в.) в $\omega \cap \{(x, t){:}\ 0 \le t \le \tau\}$. Далее, последовательно проводя рассуждения для конечного числа s множеств $\omega \cap \{(x, t){:}\ \tau < t < 2\tau\}, \dots, \omega \cap \{(x, t){:}\ s\tau < t < T\}$, где $s\tau < T \le (s+1)\tau$, получаем, что $u \equiv 0$ в $\omega \cap \{(x, t){:}\ 0 \le t < T\}$, а с учетом доказанного ранее — что $u \equiv 0$ в ω.

Следующую теорему принято рассматривать как аналог принципа Сен-Венана [4].

Теорема 2. *Пусть* $\omega \subset \mathbb{R}^{n+1}_{x,t}$ *и имеет в качестве нижней огибающей функцию* $\chi(s)$ *такую, что* $\lim \chi(s) s^{-2} = 0$ *при* $s \to \infty$. *Пусть коэффициенты оператора* L *удовлетворяют условию* (1) *и* $0 < R_1 < R_2 < \infty$. *Тогда для обобщенного решения* $u(x, t)$ *однородной граничной задачи* (2) – (4) *в области* ω *для любого* $\hat{t}, -\chi(R_1) < \hat{t} \le T$, *справедлива оценка*

$$\int\limits_{\omega(R_1;\hat{t})} u^2 dxdt \le 2\exp\left(-\frac{1}{16e\varkappa n}\,\frac{(R_2 - R_1)^2}{\chi(R_2) + \hat{t}}\right) \int\limits_{\omega(R_2;\hat{t})} u^2 dxdt, \tag{14}$$

если

$$(R_2 - R_1)^2 \le \max\{1, 8\varkappa en(\chi(R_2) + \hat{t})\}. \tag{15}$$

Доказательство. Положим в лемме 2 $l_2 = R_2$, $l_1 = R_1$,

$$k = \left[\frac{(R_2 - R_1)^2}{8n\varkappa e\left(\chi(R_2) + \hat{t}\right)}\right];\quad \mu = \frac{R_2 - R_1}{\chi(R_2) + \hat{t}}\left(\frac{1}{32\varkappa en}\right)^{1/2}$$

и покажем, что при таком выборе l_1, l_2, k и μ выполнено соотношение (8). Действительно,

$$p \equiv \frac{2\varkappa k^2 n}{\mu^2 (l_2 - l_1)^2} \le 2\varkappa n\left(\frac{1}{8\varkappa en}\right)^2 \frac{(R_2 - R_1)^4}{\left(\chi(R_2) + \hat{t}\right)^2}\,\frac{\left(\chi(R_2) + \hat{t}\right)^2}{(R_2 - R_1)^4}\, 32\varkappa en = e^{-1}.$$

Выполнимость неравенства (15) необходима для того, чтобы выбранное k было натуральным. Из оценки (7) получаем

$$\int\limits_{\omega(R_1;\hat{t})} u^2 dxdt \le \exp\left(-\frac{k}{2}\right) \int\limits_{\omega(R_2;\hat{t})} u^2 dxdt \le$$

$$\le \sqrt{e}\exp\left(-\frac{(R_2 - R_1)^2}{16e\varkappa n\left(\chi(R_2) + \hat{t}\right)}\right) \int\limits_{\omega(R_2;\hat{t})} u^2 dxdt.$$

Теорема доказана.

Полученные результаты являются новыми для рассмотренных выше квазилинейных параболических уравнений, но по форме совпадают с аналогичными утверждениями для вырождающихся линейных дивергентных параболических уравнений второго порядка [1]. Совершенно по-другому ведут себя решения однородной граничной задачи (2) – (4), когда коэффициенты оператора L удовлетворяют дополнительно условиям

$$\sum_{i=1}^{n} A_i(x,t,\eta,\xi)\xi_i \geq 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{ess\,sup}|A| < \infty. \tag{16}$$

В этом случае естественно рассмотреть другое энергетическое пространство. По аналогии с предыдущим через $V(G, \tilde{\Gamma}_\alpha)$ обозначим пространство функций $u(x,t)$, полученное пополнением по норме

$$||u|| = \int_G \left(|u| + |u_t| + |\nabla_x u|\right) dxdt$$

множества бесконечно дифференцируемых в G функций, равных нулю на $\tilde{\Gamma}_\alpha$.

Под обобщенным решением уравнения (2) в G с граничными условиями (3), (4) на $\Gamma \cap \partial G$ при условии, что коэффициенты оператора L удовлетворяют соотношениям (16), будем называть функцию $u(x, t)$, принадлежащую пространству $V(G; \Gamma_\alpha \cap \partial G) \cap L^\infty(G)$ такую, что для любой $\psi \in \overset{\circ}{V}(G \cup \gamma \cup \Gamma) \cap$ $\cap\, L^\infty(G)$ справедливо соотношение (5).

***Замечание* 1.** Если коэффициенты оператора L удовлетворяют соотношениям (1) и (16), то утверждение теоремы 1 справедливо дле решений $u(x,t)$ однородной граничной задачи (2) – (4), принадлежащих пространству $V(G;$ $\Gamma_\alpha \cap \partial G) \cap L^\infty(G)$ для любой ограниченной области $G \subset \omega$. Установить этот факт можно дословным повторением доказательства теоремы 1.

Теорема 3. *Пусть область* $\omega \subset \mathbb{R}^{n+1}_{x,t}$ *имеет нижнюю огибающую* $\chi(s)$ *такую, что* $\lim \chi(s)s^{-2}\ln s = 0$ *при* $s \to \infty$. *Пусть коэффициенты оператора* L *удовлетворяют соотношениям* (1), (16), *а* $u(x, t)$ — *обобщенное решение однородной граничной задачи* (2) – (4). *Тогда* $u(x,t) \equiv 0$.

Доказательство теоремы 3 непосредственно следует из замечания 1 и следующего утверждения, имеющего, по-видимому, самостоятельный интерес.

Лемма 3. *Пусть* $\omega \subset \mathbb{R}^{n+1}_{x,t}$ *имеет в качестве нижней огибающей функцию* $\chi(s)$. *Пусть для коэффициентов оператора* L *выполнены условия* (16). *Тогда для любого обобщенного решения однородной граничной задачи* (2) – (4) *при любых* $-\infty < t < \tau \leq T$ *и любого* $l > 1$ *справедлива оценка*

$$\int_{\omega(l;\tau)} u^2 dxdt \leq \text{const}\,(l+1)^{n-2}\left(\chi(l+1) + \tau\right)^2, \tag{17}$$

где const *зависит лишь от* n *и* $\|A\|_\infty$.

Доказательство. Положим в интегральном тождестве (5) $\psi(x,t) = w(x,t) \times$ $\times \exp(-\mu^2 t)\varphi(x)$, взяв в качестве $\varphi(x)$ функцию из леммы 1 при $l_2 = l+1$ и $l_1 = l$. Тогда

$$\int_{\omega(l+1;\tau)} \left\{ \left(w\exp(\mu^2 t)\right)_t w\exp(-\mu^2 t)\varphi + \sum_{i=1}^{n} A_i(x,t,u,\nabla_x u)\, u_{x_i} \exp(-2\mu^2 t)\varphi + \right.$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} A_i(x, t, u, \nabla_x u)\varphi_{x_i} w \exp(-\mu^2 t)\Big\} dxdt = 0.$$

Преобразуя первый член этого равенства интегрированием по частям, как в лемме 1, получим

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\omega(l+1;\tau)} (w^2)_t \varphi\, dxdt + \mu^2 \int\limits_{\omega(l+1;\tau)} w^2 \varphi\, dxdt +$$

$$+ \int\limits_{\omega(l+1;\tau)} \sum_{i=1}^{n} A_i(x, t, u, \nabla_x u) u_{x_i} \exp(-2\mu^2 t)\varphi\, dxdt =$$

$$= - \int\limits_{\omega(l+1;\tau)} \sum_{i=1}^{n} A_i(x, t, u, \nabla_x u)\varphi_{x_i} w \exp(-\mu^2 t)\, dxdt.$$

Отсюда и из соотношений (16), (3), (4) заключаем, что

$$\mu^2 \int\limits_{\omega(l+1;\tau)} w^2 \varphi\, dxdt \le \int\limits_{\omega(l+1;\tau)} |A|\, |\nabla\varphi| |w| \exp(-\mu^2 t)\, dxdt \le$$

$$\le \|A\|_\infty \left\| \frac{\nabla\varphi}{\sqrt{\varphi}} \right\|_\infty \left(\int\limits_{\omega(l+1;\tau)} w^2 \varphi\, dxdt \right) \left(\int\limits_{\omega(l+1;\tau)} \exp(-2\mu^2 t)\, dxdt \right)^{1/2} \le$$

$$\le \text{const} \exp\Big(\mu^2 \chi(l+1)\Big)(l+1)^{(n-2)/2} \left(\int\limits_{\omega(l+1;\tau)} w^2 \varphi\, dxdt \right)^{1/2}.$$

Далее, с учетом связи, существующей между функциями $w(x, t)$ и $u(x, t)$, из полученного неравенства находим

$$\int\limits_{\omega(l+1;\tau)} u^2 \varphi\, dxdt \le \frac{\text{const}}{\mu^4} (l+1)^{n-2} \exp\Big\{2\mu^2\big(\chi(l+1) + \tau\big)\Big\}.$$

Выбирая в предыдущем соотношении свободный параметр $\mu^2 = (\chi(l + 1) + + \tau)^{-1}$, получаем искомую оценку. Лемма доказана.

Сформулированные утверждения являются основными в работе и имеют, очевидно, широкую область применения. В частности, они справедливы в случае, когда уравнение (2) имеет вид

$$u_t = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{u_{x_i}}{\sqrt{1 + |\nabla_x u|^2}} \right). \tag{18}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть* $\omega \subset \mathbb{R}^{n+1}_{x,t}$ *имеет в качестве нижней огибающей функцию* $\chi(s)$ *такую, что* $\lim \chi(s) s^{-2} \ln s = 0$ *при* $s \to \infty$. *Пусть* $u_1(x, t)$ *и* $u_2(x, t)$ *— обобщенные в смысле интегрального тождества типа* (5) *решения смешанной граничной задачи типа* (3), (4) *для уравнения* (18) *в* ω *с не обязательно нулевыми одинаковыми граничными значениями. Тогда* $u_1(x, t) \equiv u_2(x, t)$ *в* ω.

Доказательство. Пусть

$$A_i(x, t, \eta, \xi) = \frac{\nabla_{x_i} u_1}{\sqrt{1 + |\nabla_x u_1|^2}} - \frac{\nabla_{x_i} u_2}{\sqrt{1 + |\nabla_x u_2|^2}} - \nabla_{x_i}(u_1 - u_2) + \xi_i$$

при $\xi_i = \nabla_{x_i}(u_1 - u_2)$ и

$$A_i(x, t, \eta, \xi) = \frac{\xi_i}{\sqrt{1 + |\xi|^2}}$$

при $\xi_i \neq \nabla_{x_i}(u_1 - u_2)$, $i = 1, \ldots, n$.

Рассмотрим уравнение

$$u_t - \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} A_i(x, t, u, \nabla_x u) \equiv u_t - N(x, t, u, \nabla_x u) = 0. \tag{19}$$

Функция $v = u_1 - u_2$ является обобщенным решением однородной граничной задачи (19), (3) – (4). Поэтому, для того чтобы установить истинность высказанного выше утверждения, достаточно убедиться в том, что оператор N удовлетворяет условиям (1) и (16).

Справедливость (1), (16) при $\xi \neq \nabla_x v$ очевидна.

Покажем, что соотношения (1), (16) выполнены также и при $\xi = \nabla_x v$.

Положим $Tu = \dfrac{\nabla_x u}{\sqrt{1 + |\nabla_x u|^2}}$ и, следуя, например, [6], докажем неравенство (1) для коэффициентов оператора N.

Пусть $\alpha = (1, \nabla_x u_1)$, $\beta = (1, \nabla_x u_2)$ и $\cos\varphi = (\alpha \cdot \beta) / |\alpha| \cdot |\beta|$. Тогда

$$(Tu_1 - Tu_2)\nabla_x(u_1 - u_2) = \left(\frac{\alpha}{|\alpha|} - \frac{\beta}{|\beta|}\right)(\alpha - \beta) = (|\alpha| + |\beta|)(1 - \cos\varphi) \tag{20}$$

и

$$\frac{\sqrt{1 + |\nabla_x u_1|^2} + \sqrt{1 + |\nabla_x u_2|^2}}{2} | Tu_1 - Tu_2 |^2 \leq$$

$$\leq \frac{|\alpha| + |\beta|}{2} \left| \frac{\alpha}{|\alpha|} - \frac{\beta}{|\beta|} \right|^2 \leq (|\alpha| + |\beta|)(1 - \cos\varphi). \tag{21}$$

Соотношение (1) для коэффициентов оператора N при $k = 1$ немедленно следует из (20), (21).

Условие (16) для оператора N при $\xi = \nabla_x v$ проверяется тривиально:

$$\sum_{i=1}^{n} A_i^2 \leq 2\left(\frac{|\nabla_x u_1|^2}{1 + |\nabla_x u_1|^2} + \frac{|\nabla_x u_2|^2}{1 + |\nabla_x u_2|^2}\right) \leq 4.$$

В заключение отметим, что если $\omega \subset \mathbb{R}^{n+1}_{x,t}$ и находится между плоскостями $t = 0$ и $t = T$, то доказательство первых двух теорем может быть проведено с использованием абстрактной схемы метода введения параметра [4].

1. *Шишков А. Е.* Классы единственности решений смешанных задач для параболических уравнений в нецилиндрических областях // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1988. – № 11. – С. 35 – 37.
2. *Ландис Е. М.* Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. – М.: Наука, 1971. – 287 с.
3 *Олейник О. А., Радкевич Е. В.* Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой. – М.: ВИНИТИ. Итоги науки и техники. Сер. мат. – 1971. – 252 с.
4. *Олейник О. А., Радкевич Е. В.* Метод введения параметра для исследования эволюционных уравнений // Успехи мат. наук. – 1978. – **33**, вып. 5. – С. 7 – 76.
5. *Тихонов А. Н.* Теоремы единственности для уравнения теплопроводности // Мат. сб. – 1935. – **42**, № 2. – С. 199 – 215.
6. *Hwang J.* Comparison Principles and Liouville Theorems for Prescribed Mean Curvature Equations in Unbounded Domains // Annali Scuola Norm. Sup. Pisa.– 1988. – Ser. 4. – **15**, № 3. – P. 341 – 355.

Получено 06. 03. 91