УДК 513.8, 517. 9

В. А. Главан, канд. физ.-мат. наук (Ин-т математики АН Украины, Киев)

СТРУКТУРА ЛИНЕЙНЫХ РАСШИРЕНИЙ С УСЛОВИЯМИ ТИПА ФАВАРА. II. ЛИНЕЙНЫЕ РАСШИРЕНИЯ СО СВОЙСТВОМ АДДИТИВНОСТИ РЕКУРРЕНТНЫХ ДВИЖЕНИЙ

Исследована структура линейных расширений, внешние степени которых удовлетворяют условию аддитивности рекуррентных движений.

Досліджена структура лінійних розширень, зовнішні степені яких задовольняють умову адитивності рекурентних рухів.

1. Введение. Настоящая работа является обобщением и развитием результатов работы [1], где решается следующая задача: после спектрального разложения $H(A)\times\mathbb{R}^n = V_1\oplus V_2\oplus\ldots\oplus V_k$ [2] расширенного фазового пространства $H(A)\times\mathbb{R}^n$ линейной системы $\dot{x} = A(t)x,\ x\in\mathbb{R}^n$, с рекуррентной в смысле Биркгофа $A(t)$, возникает вопрос об отщеплении „вековых" решений по степеням роста относительно времени. Для этого можно было бы поступить следующим образом: выделить ограниченные решения $B\subset H(A)\times\mathbb{R}^n$, а затем взять фактор-систему на $(H(A)\times\mathbb{R}^n)/B$ и в ней выделить ограниченные решения и т. д. Но в общем случае подмножество B плохо расположено в $H(A)\times\mathbb{R}^n$; например, оно разрывно зависит от точки базы и поэтому нельзя говорить о фактор-системе. Тем не менее, в работе [3] выделен класс систем, для которых B является инвариантным векторным подрасслоением расширенного фазового пространства; это в точности системы, удовлетворяющие условию Фавара об отдаленности от нуля ограниченных решений. При этом, а также при дополнительном условии об отсутствии „вековых" решений в [3] построена трихотомия $H(A)\times\mathbb{R}^n = E^s\oplus E^u\oplus B$, где $E^s(E^u)$ — это экспоненциально устойчивые при $t\to+\infty$ (соответственно $t\to-\infty$) решения. Взяв за основу условие Фавара и распространив его на внешние степени линейной системы дифференциальных уравнений, в [1] доказана структурная теорема, в которой, в частности, выделяются и „вековые" решения.

Если же условие Фавара нарушено, то вместо B в качестве инструмента можно было бы использовать подмножество $R\subset B$ рекуррентных в смысле Биркгофа решений. Но и это подмножество является плохим в том смысле, что оно не является даже векториальным; как показано в [4], сумма двух рекуррентных решений линейной почти периодической системы не обязательно рекуррентное решение. В работе [5] доказано, что требование того, чтобы R было векторным подрасслоением расширенного фазового пространства, эквивалентно свойству аддитивности рекуррентных решений. Это позволило выделить в отдельный класс системы с аддитивным свойством рекуррентных решений, класс, содержащий множество систем с условием Фавара, но не совпадающий с ним. Там же обобщена на этот класс уравнений известная теорема Фавара о существовании почти периодического решения аффинного уравнения.

В настоящей работе изучается структура линейных систем, внешние степени которых обладают свойством аддитивности рекуррентных решений. При этом, как и в [1], в расширенном фазовом пространстве выделяется некоторый флаг инвариантных векторных подрасслоений, точки которых порождают „вековые" решения. Однако, в отличие от [1], где этот флаг исчерпывает все спектральное подрасслоение, содержащее B (это достигается благодаря тому, что равенство $B = \{0\}$ достаточно для существования экспоненциальной дихотомии), в рассматриваемом случае равенство $R = \{0\}$ не обязательно влечет экспоненциальную дихотомию, поэтому за пределами флага остаются точки, соответствующие ограниченным, но не отделимым от нуля решениям фактор-системы по максимальному элементу флага. Исходя из этого, не будем распространять условие аддитивности рекуррентных решений на все значения спектрального параметра с целью охвата всех спектральных подрасслоений, как в [1]. Вместо этого расширим время T до любой топологической группы с возможным приложением в теории вполне интегрируемых дифференциальных уравнений [6] или линейных дифференциальных уравнений с компактной группой симметрии.

2. Основные понятия и обозначения. Пусть дано конечномерное векторное расслоение $p: E \to Y$ со слоем $\mathbb{R}^n$ либо $\mathbb{C}^n$ [7], с компактной метризуемой базой Y и снабженное римановой метрикой. Пусть T означает топологическую группу, действующую минимально на Y и послойно линейно на E так, чтобы $p \circ \pi^t = \rho^t \circ p$, $t \in T$, где π и ρ — соответствующие действия на E и Y. Другими словами, пусть задано линейное расширение [8]

$$p: (E, T, \pi) \to (Y, T, \rho). \tag{1}$$

Наряду с векторным расслоением $p: E \to Y$ рассмотрим и его внешние степени [9, 10] $p_d: \wedge^d(E) \to Y$ вместе с индуцированными на них (поли)линейными расширениями (1) $p_d: (\wedge^d(E), T, \wedge^d(\pi)) \to (Y, T, \rho)$, которые назовем внешними d-степенями линейного расширения (1), $d = 1, 2, \ldots, n$. Нашей целью является изучение структуры исходного линейного расширения с помощью его внешних степеней.

Известно, что точка $x \in E$ (и движение $\pi^t(x)$) называется рекуррентной в смысле Биркгофа, если замыкание ее траектории $H(x) = \operatorname{cls}\{\pi^t(x): t \in T\}$ является компактным минимальным множеством. Пусть B означает, как и выше, множество точек $x \in E$, порождающих ограниченные движения, $R(E) \subset B$ — подмножество точек, рекуррентных под действием динамической системы π^t, $t \in T$, а $D(E) \subset E$ — подмножество точек $x \in E$, для которых расширение $p: (H(x), T, \pi \mid H(x)) \to (Y, T, \rho)$ дистально, т. е. $\inf\{\|\pi^t(x_1) - \pi^t(x_2)\|: t \in T\} > 0$ для любых двух точек $x_1, x_2 \in H(x)$ таких, что $p(x_1) = p(x_2)$. Согласно [11] $D(E) \subset \subset R(E)$, поэтому справедливы включения, вообще говоря, строгие: $\{0_E\} \subset D(E) \subset \subset R(E) \subset B \subset E$ (здесь $\{0_E\}$ означает нулевое сечение векторного расслоения $p: E \to Y$; в дальнейшем индекс E опускаем, если из контекста ясно о каком расслоении идет речь).

Понятие дистальности относительно расширения является обобщением условия Фавара (см., например, [8]), которое означает справедливость неравенства $\inf\{\|\pi^t(x)\|: t \in T\} > 0$ для всех $x \in B$.

Следующее предложение является обобщением критерия Сакера — Селла [3].

Предложение 1. *Следующие утверждения равносильны:*

1) *линейное расширение* (1) *удовлетворяет условию Фавара*;

2) *справедливо равенство* $B = D(E)$;

3) *множество* B *составляет векторное подрасслоение в* E *и существуют положительные постоянные* m *и* M *такие, что для всех* $x \in B$ *справедливы неравенства*

$$m\| x \| \leq \| \pi^t(x) \| \leq M \| x \|, \quad t \in T. \tag{2}$$

Действительно, импликация 1) $\Rightarrow$ 2) очевидна, а 3) $\Rightarrow$ 1) верна в силу неравенства (2) для всех $x \in B$. Импликация 2) $\Rightarrow$ 3) справедлива в силу включений $D(E) \subset R(E) \subset B = D(E)$, а значит, и равенства $B = D(E)$, которое влечет утверждение 3 согласно доказанному ниже предложению 2.

3. Линейные расширения со свойством аддитивности рекуррентных движений.

Определение. *Линейное расширение* (1) *удовлетворяет условию аддитивности рекуррентных движений* (*АРД*), *если для любых* $x_1, x_2 \in R$, $p(x_1) = p(x_2)$, *имеем* $x_1 + x_2 \in R$.

***Замечание* 1.** Очевидно, $x \in R$ тогда и только тогда, когда $-x \in R$, поэтому утверждение о том, что сумма двух рекуррентных движений есть рекуррентное движение, равносильно требованию, чтобы разность двух рекуррентных движений была рекуррентной. Этот факт, а также доказываемое ниже предложение 2 показывают, что условие АРД представляет собой некоторое ослабление условия Фавара. Именно: в отличие от условия Фавара, где требуется разделенность всех ограниченных движений, условие АРД равносильно требованию разделенности рекуррентных движений. При этом два рекуррентных движения автоматически разделены, если замыкания их траекторий не совпадают. Если же две рекуррентные точки принадлежат одному и тому же минимальному множеству, то это, вообще говоря, не так.

Предложение 2. *Следующие утверждения равносильны*:

1) *линейное расширение* (1) *удовлетворяет условию АРД*;

2) *справедливо равенство* $R(E) = D(E)$;

3) *множество* $R(E)$ *составляет векторное подрасслоение* в E *и существуют постоянные* $m > 0$, $M > 0$ *такие, что для всех* $x \in R(E)$ *справедливо неравенство* (2).

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть x — произвольная точка из $R(E)$ и $x_1, x_2 \in H(x)$, $p(x_1) = p(x_2)$. Тогда точки x_1 и x_2 принадлежат множеству $R(E)$ вместе с точками $x_1 + x_2$ и $x_1 - x_2$, поэтому $H(x_1 - x_2)$ — минимальное множество. Так как нулевое сечение тоже является минимальным множеством, то $H(x_1 - x_2)$ не пересекает его, если $x_1 \neq x_2$. Следовательно, $\inf\{\| \pi^t(x_1) - \pi^t(x_2) \|: t \in T\} > 0$, поэтому $x \in D(E)$.

2) $\Rightarrow$ 3). Пусть $R(E) = D(E)$. Докажем, что $R(E)$ — векториальное множество, т. е. $x_1 + x_2 \in R(E)$ и $\lambda x \in R(E)$ для всех $x_1, x_2, x \in R(E)$, и всех скаляров λ. Действительно, согласно ([11], теорема 14. 7) из равенства $R(E) = D(E)$ следует, что точка $(x_1, x_2) \in E \oplus E$, где $E \oplus E$ означает сумму Уитни векторных расслоений, порождает рекуррентное движение. С другой стороны, функция $(x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$ непрерывна на $E \oplus E$. Отсюда с учетом непрерывности проекции $H(x_1) \oplus H(x_2) \to H(x_1 + x_2)$ следует, что $H(x_1 + x_2)$ — минимальное множество, т. е. $x_1 + x_2 \in R(E)$.

Покажем, что размерность слоя множества $R(E)$ не зависит от точки базы. Для этого выберем точку $y_0 \in Y$ так, чтобы размерность подпространства R_{y_0} была максимальной, и ортонормированный базис $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ в R_{y_0}. Согласно ([11], теорема 14. 10) $H(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) \subset E \oplus E \oplus \ldots \oplus E$ (m слагаемых) — минимальное множество динамической системы $\pi \oplus \pi \oplus \ldots \oplus \pi$ (m раз), поэтому оно проектируется на всю базу. Следовательно, для любой точки $y \in Y$ найдется точка $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m) \in H(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ такая, что $p(\eta_1) = p(\eta_2) = \ldots$ $\ldots = p(\eta_m) = y$. Далее, множество $H(\xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \ldots \wedge \xi_m)$ минимально как непрерывный образ минимального множества $H(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ при (непрерывной) операции внешнего произведения, поэтому оно не пересекает нулевого сечения векторного расслоения $\wedge^m(E) \to Y$. В частности, $\eta_1 \wedge \eta_2 \wedge \ldots \wedge \eta_m \neq 0$, т. е. векторы $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ линейно независимы, поэтому $\dim R_y \geq R_{y_0}$, откуда следует равенство в силу выбора точки y_0.

Докажем неравенство (2) для множества $R(E)$, откуда будет следовать его замкнутость. Для этого обозначим

$$m(\xi_i) = \inf\{\|\pi^t(\xi_i)\|: t \in T\}, \quad M(\xi_i) = \sup\{\|\pi^t(\xi_i)\|: t \in T\},$$

$$m = \min\{m(\xi_i): i = 1, 2, \ldots, m\}, \quad M = \max\{M(\xi_i): i = 1, 2, \ldots, m\}.$$

Тогда в силу минимальности $H(\xi_j)$, $j = 1, 2, \ldots, m$, имеем

$$m \leq \|\pi^t(\eta)\| \leq M, \quad t \in T, \quad \eta \in H(\xi_j), \quad j = 1, 2, \ldots, m. \tag{3}$$

Покажем, что существуют положительные постоянные γ_1 и γ_2 такие, что

$$\gamma_1(|\alpha_1| + \ldots + |\alpha_m|) \leq \|\alpha_1\eta_1 + \ldots + \alpha_m\eta_m\| \leq \gamma_2(|\alpha_1| + \ldots + |\alpha_m|) \tag{4}$$

для всех наборов скаляров $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ и всех $(\eta_1, \ldots, \eta_m)$ из $H(\xi_1, \ldots, \xi_m)$.

Действительно, (4) выполняется на множестве $\Gamma = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_m): |\alpha_1| + \ldots$ $\ldots + |\alpha_m| = 1\}$ в силу компактности $H(\xi_1, \ldots, \xi_m) \times \Gamma$ и отделенности от нулевого сечения множества $H(\xi_1, \ldots, \xi_m)$. Общий же случай сводится к этому с помощью замены $\eta'_j = \beta^{-1}\eta_j$ с $\beta = |\alpha_1| + \ldots + |\alpha_m|$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

Пусть теперь $(\eta_1, \ldots, \eta_m)$ означает произвольный базис из $H(\xi_1, \ldots, \xi_m)$, x — точка из $R(E)$, $x = \alpha_1\eta_1 + \ldots + \alpha_m\eta_m$ — разложение по этому базису. Тогда с учетом (3) и (4) имеем

$$\gamma_1\gamma_2^{-1}\|x\| \leq \|\pi^t(x)\| \equiv \|\alpha_1\eta_1(\rho^t(y)) + \ldots + \alpha_m\eta_m(\rho^t(y))\| \leq M\gamma_1^{-1}\|x\|, \quad t \in T.$$

Из этих неравенств следует, что подмножество $R(E)$ замкнуто, поэтому ([8], теорема 5. 2.) оно является векторным подрасслоением. Этим доказательство предложения завершается, так как импликация 3) $\Rightarrow$ 1) очевидна.

4. Линейные расширения, внешние степени которых имеют свойство аддитивности рекуррентных движений. Пусть $W \subset E$ означает инвариантное векторное подрасслоение относительно расширения (1). На векторном фактор-расслоении E/W (см., например, [7], определение 7.5.2) определено линейное расширение $p_2: (E/W, T, \mu) \to (Y, T, \rho)$, называемое фактор-расширением линейного расширения (1) по инвариантному векторному подрасслоению W [8, 1].

Пусть $\dim W = r$ и обозначим через $\mathfrak{A} \subset \wedge^{r+k}(E)$ подрасслоение, каждый слой которого состоит из всех $(r+k)$-векторов с общим r-множителем из $\bigwedge^r(W)$. Легко видеть, что $\mathfrak{A}$ инвариантно под действием $\bigwedge^{r+k}(\pi)$. Пусть $y \in Y$ — произвольная точка. Как доказано в [1], для любой сколь угодно малой окрестности U точки y существует id_U-изоморфизм между ограничениями на U векторных расслоений $\mathfrak{A}$ и $\bigwedge^k(E/W)$ такой, что

$$\Psi \circ \bigwedge^{r+k}(\pi^t) \mid \mathfrak{A} = \bigwedge^r(\pi^t \mid W) \circ \bigwedge^k(\mu^t) \circ \Psi$$

для всех $t \in T$, для которых из $z \in U$ следует $\rho^t(z) \in U$. Как известно [11], эти значения времени t образуют относительно плотное подмножество S в T (т. е. $T = SK$ для некоторого компакта K). Если при этом

$$\sup\{\| \bigwedge^r(\pi^t(\xi)) \| : t \in T\} < \infty, \quad \xi \in \bigwedge^r(W), \tag{5}$$

то найдутся постоянные $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$ такие, что $c_1 \le \| \bigwedge^r(\pi^t \mid W) \| \le c_2$, $t \in T$. Следовательно, изоморфизм Ψ сохраняет дистальность относительно расширения, так же как и рекуррентность.

Предложение 3. *Если $W \subset E$ означает инвариантное векторное подрасслоение такое, что выполнено неравенство* (5), *то линейное расширение*

$$\overline{p}_2 : (\bigwedge^k(E/W), T, \bigwedge^k(\mu)) \to (Y, T, \rho)$$

имеет свойство АРД тогда и только тогда, когда это свойство имеет линейное расширение

$$\overline{p}_1 : (\mathfrak{A}, T, \bigwedge^{r+k}(\pi)) \to (Y, T, \rho) \quad (k = 1, 2, \ldots, n-r).$$

Доказательство. Действительно, из равенства $R = D$ для одного расширения следует такое же равенство для другого расширения, ибо Ψ сохраняет рекуррентность и дистальность относительно расширения. Далее используем предложение 2.

Основной результат работы содержится в следующем утверждении.

Теорема. *Пусть для всех $d = 1, 2, \ldots, n$ внешняя d-степень линейного расширения* (1) *имеет свойство аддитивности рекуррентных движений. Тогда подмножества $W_1 := R(E)$, $W_2 := \{x \in E,\ x + W_1 \in R(E/W_1)\}, \ldots, W_3 := \{x \in E,\ x + W_{s-1} \in R(E/W_{s-1})\}$, где s — наименьшее натуральное число такое, что $R(E/W_s) = \{0\}$, образуют флаг инвариантных векторных подрасслоений $\{0\} = W_0 \subset W_1 \subset \ldots \subset W_s \subset E$ и для каждого $k = 1, 2, \ldots, s$ найдутся положительные постоянные m_k и M_k такие, что*

$$m_k \| x + W_{k-1} \| \le \| \pi^t(x) + W_{k-1} \| \le M_k \| x + W_{k-1} \|, \quad x \in W_k, \quad t \in T. \tag{6}$$

Доказательство. Обозначим через W_0 нулевое сечение векторного расслоения $p : E \to Y$ и построим искомый флаг методом индукции. Случай $R(E) = \{0\}$ тривиальный, поэтому предположим, что $R(E) \ne \{0\}$. В силу предложения 2 $W_1 := R(E)$ — инвариантное векторное подрасслоение и на нем справедливы неравенства (2), которые совпадают с (6) для $k = 1$. Согласно предложению 3 фактор-расширение по подрасслоению W_1, а также все его внешние степени обладают свойством АРД, поэтому множество его рекуррентных точек $R(E/W_1)$ образует векторное расслоение. Если $R(E/W_1) = \{0\}$, то на этом процесс завершается. Если нет, то обозначим $W_2 := \{x \in E, x + W_1 \in R(E / W_1)\}$ и введем на W_2 структуру векторного расслоения путем отождествления $W_2 \equiv W_1 \oplus R(E / W_1)$. Неравенство (6) при $k = 2$ — это в точности неравенство (2) на $R(E / W_1)$. Продолжая таким образом, получаем искомый флаг. Теорема доказана.

***Замечания.* 2.** Из этой теоремы в качестве следствия получаем основной результат работы [1] в части достаточности. Действительно, условие Фавара равносильно равенству $B = D(E)$, из которого следует равенство $R(E) = D(E)$, поэтому на каждом шаге построения флага отщепляем все ограниченные движения соответствующего фактор-расширения, а не только рекуррентные. В силу этого, а также того факта, что для линейных расширений с временем $T = \mathbb{R}$ либо $T = \mathbb{Z}$ минимальных динамических систем из равенства $B = \{0\}$ следует экспоненциальная дихотомия, этот процесс будет продолжен, пока мы не исчерпаем все спектральное подрасслоение.

3. Как показывает пример Джонсона ([12], см. также [13]), требование, чтобы все внешние степени имели свойство АРД, существенно. В этом примере внешняя 2-я степень обладает свойством АРД, а сама система — нет, поэтому она не допускает фильтрации в смысле доказанной выше теоремы.

1. *Главан В. А.* Структура линейных расширений с условиями типа Фавара // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 5. – С. 596 – 604.
2. *Sacker R. J., Sell G. R.* A spectral theory for linear differential systems // J. Different. Equat.– 1978. – **27**.– P. 320 – 358.
3. *Sacker R. J., Sell G. R.* Existence of dichotomies and invariant splittings for linear differential systems. III // Ibid. – 1976. – **22**, № 2.– P. 497 – 522.
4. *Hino Y.* Recurrent solutions for linear almost periodic systems // Funkc. ekvacioj. – 1986. – **28**. – P. 117 – 119.
5. *Главан В. А.* Линейные системы дифференциальных уравнений со свойством аддитивности рекуррентных решений // Асимптотические решения нелинейных уравнений с малыми параметрами. – Киев: Ин-т математики АН Украины, 1991. – С. 15 – 23.
6. *Гайшун И. В.* Линейные уравнения в полных производных. – Минск: Наука и техника, 1989. – 254 с.
7. *Бурбаки Н.* Дифференцируемые и аналитические многообразия. Сводка результатов. – М.: Мир, 1975. – 220 с.
8. *Бронштейн И. У.* Неавтономные динамические системы. – Кишинев: Штиинца, 1984. – 291 с.
9. *Бурбаки Н.* Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра. – М.: Физматгиз, 1962. – 516 с.
10. *Бронштейн И. У.* Расширения минимальных групп преобразований. – Кишинев: Штиинца, 1975. – 312 с.
11. *Muldowney J. S.* Compound matrices and ordinary differential equations // Rocky Mountain J. Math. – 1990. – **20**. – P. 857 – 872.
12. *Johnson R.A.* A linear, almost periodic equation with an l almost automorphic solution // Proc. Amer. Math. Soc. – 1981. – **82**, № 2. – P. 199 – 205.
13. *Sell G. R.* A remark on an example of R. A. Johnson // Ibid. – P. 206 – 208.

Получено 31. 10. 91