УДК 517. 9

А. М. Самойленко (Ін-т математики НАН України, Київ),
Я. Р. Петришин (Чернів. ун-т)

МЕТОД УСЕРЕДНЕННЯ В БАГАТОТОЧКОВИХ ЗАДАЧАХ ТЕОРІЇ НЕЛІНІЙНИХ КОЛИВАНЬ*

By using the averaging method, we prove the solvability of multipoint problems for nonlinear oscillation systems and estimate the deviation of solutions of original and averaged problems.

Доведена розв'язність багатоточкових задач для нелінійних коливних систем за допомогою методу усереднення. Встановлені оцінки відхилення розв'язків вихідних і усереднених задач.

Нехай задана багаточастотна нелінійна система звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{d\tau} = X(x, \varphi, \tau, \varepsilon), \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{1}{\varepsilon}\omega(x, \tau) + \Phi(x, \varphi, \tau, \varepsilon), \tag{1}$$

права частина якої визначена при $(x, \varphi, \tau, \varepsilon) \in D \times R^m \times [0, L] \times (0, \varepsilon_0] \equiv G$ ($\varepsilon_0 \ll 1$, D — обмежена область дійсного евклідового простору R^n), неперервно диференційовна по x, φ, τ при кожному фіксованому ε, яка належить класу майже періодичних по φ_ν, $\nu = \overline{1, m}$, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$, функцій

$$X(x, \varphi, \tau, \varepsilon) = \sum_{\nu=0}^{\infty} X_\nu(x, \tau, \varepsilon) e^{i(\lambda_\nu, \varphi)}, \quad \Phi(x, \varphi, \tau, \varepsilon) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Phi_\nu(x, \tau, \varepsilon) e^{i(\lambda_\nu, \varphi)},$$

$$\lambda_0 = 0, \ \lambda_\nu = \left(\lambda_\nu^{(1)}, \ldots, \lambda_\nu^{(m)}\right) \neq 0 \ \ \forall \nu \geq 1, \ i^2 = -1, \ (\lambda_\nu, \varphi) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_\nu^{(j)} \varphi_j,$$

для яких

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\|\lambda_\nu\|}\right) \sup_G \|X_\nu\| + \frac{1}{\|\lambda_\nu\|} \left(\sup_G \left\| \frac{\partial}{\partial\tau} X_\nu \right\| + \sup_G \left\| \frac{\partial}{\partial x} X_\nu \right\| \right) \right] \leq c_1. \tag{2}$$

Тут c_1 — стала, незалежна від ε, а під нормою матриці будемо розуміти суму модулів її елементів. Вважатимемо також, що частинні похідні першого порядку по x, φ, τ від функцій X, Φ, ω рівномірно обмежені в G сталою c_1.

Задамо для рівнянь (1) крайові умови вигляду

$$F(x_{|\tau=\tau_1}, \ldots, x_{|\tau=\tau_r}, \varepsilon) = 0, \quad \varphi_{|\tau=\tau_{\nu_0}} = \varphi^0, \tag{3}$$

де $0 \leq \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_r \leq L$, $r \geq 2$, ν_0 — фіксоване $(1 \leq \nu_0 \leq r)$, $\varphi^0 \in R^m$ — сталий вектор, $F(p_1, \ldots, p_r, \varepsilon)$ — n-вимірна вектор-функція змінних $p_j \in D$, $j = \overline{1, r}$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, яка при кожному ε має неперервні і обмежені сталою c_1 частинні похідні першого порядку по всіх змінних p_j, $j = \overline{1, r}$.

Такого виду задачі виникають як при моделюванні поведінки реальних процесів, так і в задачах оптимального керування [1, 2].

Для вивчення питання розв'язності багатоточкової задачі (1), (3) використаємо метод усереднення за всіма швидкими змінними φ. Поряд із (1), (3) розглянемо усереднену задачу

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau} = X_0(\bar{x}, \tau, \varepsilon), \tag{4'}$$

---

* Частково підтримана Міжнародною Соросівською програмою підтримки освіти в галузі точних наук (грант № SPU061052).

$$F(\bar{x}_{|\tau=\tau_1}, \ldots, \bar{x}_{|\tau=\tau_r}, \varepsilon) = 0, \tag{4''}$$

$$\frac{d\bar{\varphi}}{d\tau} = \frac{1}{\varepsilon}\omega(\bar{x}, \tau) + \Phi_0(\bar{x}, \tau, \varepsilon), \tag{4'''}$$

$$\bar{\varphi}_{|\tau=\tau_{\nu_0}} = \varphi^0. \tag{4^{IV}}$$

Тут

$$[X_0; \Phi_0] = \lim_{T\to\infty} T^{-m} \int_0^T \ldots \int_0^T [X(\bar{x}, \varphi, \tau, \varepsilon); \Phi(\bar{x}, \varphi, \tau, \varepsilon)]\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_m.$$

Задача $(4')-(4^{IV})$ значно простіша, ніж (1), (3), оскільки $(4')$, $(4'')$ розв'язується незалежно від швидких змінних $\bar{\varphi}$, після чого розв'язок задачі Коші $(4''')$, (4^{IV}) визначається шляхом інтегрування.

Для того щоб метод усереднення правильно описував еволюцію повільних змінних x на часовому відрізку $[0, L]$, потрібно накласти деякі обмеження [3 – 6] на вектор частот $\omega(x, \tau) = (\omega_1(x, \tau), \ldots, \omega_m(x, \tau))$. Будемо вважати, що для будь-яких $x, \varphi, \tau, \varepsilon \in G$, $\nu \geq 1$ і деякого $\alpha \in [0, 1/2)$ виконується нерівність

$$|(\lambda_\nu, \omega(x, \tau))| + |(\lambda_\nu, \Omega(x, \varphi, \tau, \varepsilon))| \geq c_2 \|\lambda_\nu\|, \quad c_2 = \text{const} > 0, \tag{5}$$

в якій

$$\Omega = \frac{\partial\omega(x,\tau)}{\partial\tau} +$$

$$+ \frac{\partial\omega(x,\tau)}{\partial x}\left(X_0(x, \tau, \varepsilon) + \sum_{j=1}^{\infty} X_j(x, \tau, \varepsilon)\, a_{\varepsilon^\alpha}((\lambda_j, \omega(x, \tau)))\, e^{i(\lambda_j, \varphi)} \right),$$

(λ_ν, ω), (λ_ν, Ω), (λ_j, φ) — скалярні добутки векторів, $a_d(t)$ при $d = \varepsilon^\alpha$ — парна неперервно диференційовна при будь-якому $t \in R$ функція, що задовольняє умови

$$a_d(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, d]; \\ d^{-4}t^2(2d - t)^2, & t \in (d, 2d); \quad 0 \leq a_d(t) \leq 1. \\ 0, & t \in [2d, \infty). \end{cases}$$

В силу фінітності функції $a_d(t)$ умови (5) накладаються не на всі гармоніки функції $X(x, \varphi, \tau, \varepsilon)$ [3, 4], а лише на резонансні. Вперше на це звернув увагу М. М. Хапаєв [5], хоча він не встановив кількісну залежність оцінок похибки методу усереднення від величини малого параметра ε. При цих припущеннях в [6] одержана оцінка

$$\|x_t(\tau, y, \psi, \varepsilon) - \bar{x}_t(\tau, y, \varepsilon)\| < \sigma\sqrt{\varepsilon}, \quad \sigma = \text{const}, \tag{6}$$

для всіх $\tau \in [0, L]$, $y \in D_1 \subset D$, $\psi \in R^m$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. При цьому $(x_t(\tau, y, \psi, \varepsilon);$ $\varphi_t(\tau, y, \psi, \varepsilon))$ і $(\bar{x}_t(\tau, y, \varepsilon); \bar{\varphi}_t(\tau, y, \psi, \varepsilon))$ — розв'язки рівнянь (1) і усереднених рівнянь $(4')$, $(4''')$, які при $\tau = t$ набувають значення $(y; \psi)$, а крива $x = \bar{x}_t(\tau, y, \varepsilon)$ лежить в D разом із деяким своїм ρ-околом $\forall\, (\tau, y, \varepsilon) \in [0, L] \times D_1 \times (0, \varepsilon_0]$.

Теорема 1. *Нехай:* 1) *виконуються умови* (2), (5) *і наведені вище обмеження на* X, Φ, ω *і* F; 2) *матриці* $\partial X_0(x, \tau, \varepsilon)/\partial x$ *і* $\partial F(p, \varepsilon)/\partial p$ *одностайно по* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *рівномірно неперервні по* $x \in D$, $\tau \in (0, L]$, $p = (p_1, \ldots, p_r) \in$

$\in D\times\ldots\times D\equiv D^r$; 3) *при кожному* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ *існує розв'язок* $\bar{x}=\bar{x}_{\tau_{\nu_0}}(\tau,x^0,\varepsilon)$, $x^0=x^0(\varepsilon)$, *задачі* (4′), (4″), *який лежить в* D *разом із своїм* ρ-*околом;* 4) $\|S^{-1}(\varepsilon)\|\le c_3=\mathrm{const}\ \ \forall\,\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, *де*

$$S(\varepsilon)=\sum_{j=1}^{r}\frac{\partial}{\partial p_j}F^0\frac{\partial}{\partial x^0}\bar{x}_{\tau_{\nu_0}}(\tau_j,x^0,\varepsilon),$$

а через $\partial F^0/\partial p_j$ *позначено матрицю частинних похідних першого порядку функції* $F=(p_1,\ldots,p_r,\varepsilon)$ *по* p_j *при* $p_\mu=\bar{x}_{\tau_{\nu_0}}(\tau_\mu,x^0,\varepsilon)$, $\mu=\overline{1,r}$.

Тоді можна вказати такі сталі $\bar{c}_1>0$ *і* $\varepsilon_1\in(0,\varepsilon_0]$, *що при кожному* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_1]$ *задача* (1), (3) *має хоча б один розв'язок* $(x(\tau,\varepsilon);\varphi(\tau,\varepsilon))$, *для якого*

$$\|x(\tau,\varepsilon)-\bar{x}_{\tau_{\nu_0}}(\tau,x^0,\varepsilon)\|\le\bar{c}_1\sqrt{\varepsilon}\quad\forall\,(\tau,\varepsilon)\in[0,L]\times(0,\varepsilon_1].\tag{7}$$

Доведення. Розв'язок задачі (1), (3) шукаємо у вигляді $(x_{\tau_{\nu_0}}(\tau,x^0+y,\varphi^0,\varepsilon);\varphi_{\tau_{\nu_0}}(\tau,x^0+y,\varphi^0,\varepsilon))$, а невідомий параметр $y\in R^n$ визначаємо із крайових умов (3):

$$\begin{aligned}y=-S^{-1}(\varepsilon)\{[F(x_{\tau_{\nu_0}}(\tau_1,x^0+y,\varphi^0,\varepsilon),\ldots,x_{\tau_{\nu_0}}(\tau_r,x^0+y,\varphi^0,\varepsilon),\varepsilon)-\\-F(\bar{x}_{\tau_{\nu_0}}(\tau_1,x^0+y,\varepsilon),\ldots,\bar{x}_{\tau_{\nu_0}}(\tau_r,x^0+y,\varepsilon),\varepsilon)]+\\+[F(\bar{x}_{\tau_{\nu_0}}(\tau_1,x^0+y,\varepsilon),\ldots,\bar{x}_{\tau_{\nu_0}}(\tau_r,x^0+y,\varepsilon),\varepsilon)-S(\varepsilon)y]\}\equiv M_\varepsilon(y).\end{aligned}\tag{8}$$

Враховуючи обмеження на F і оцінку (6), маємо нерівність

$$\|F(x_{\tau_{\nu_0}}(\tau_1,x^0+y,\varphi^0,\varepsilon),\ldots,\varepsilon)-F(\bar{x}_{\tau_{\nu_0}}(\tau_1,x^0+y,\varepsilon),\ldots,\varepsilon)\|\le c_1r\sigma\sqrt{\varepsilon}.\tag{9}$$

Зафіксуємо тепер довільне додатне $\mu\le[2(1+Lc_1)nre^{2nc_1L}c_3]^{-1}\equiv\Delta$. Тоді з умови 2 теореми 1 випливає, що існує $\delta=\delta(\mu)>0$ таке, що

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x}X_0(x+z,\tau,\varepsilon)-\frac{\partial}{\partial x}X_0(x,\tau,\varepsilon)\right\|+\left\|\frac{\partial}{\partial p}F(p,\varepsilon)-\frac{\partial}{\partial p}F(p+\tilde{p},\varepsilon)\right\|<\mu\tag{10}$$

при $\|z\|+\|\tilde{p}\|<\delta$. Виберемо $\delta<n^{-1}e^{-nc_1L}\rho$ і перепишемо усереднені рівняння (4′) у вигляді

$$\bar{x}_{\tau_{\nu_0}}(\tau,x^0+y,\varepsilon)=x^0+y+\int_{\tau_{\nu_0}}^{\tau}X_0(\bar{x}_{\tau_{\nu_0}}(\tau,x^0+y,\varepsilon),t,\varepsilon)\,dt.$$

Диференціюючи цю рівність по x^0 і використовуючи (10) та нерівність Гронуолла–Беллмана, одержуємо оцінку

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x^0}\bar{x}_{\tau_{\nu_0}}(\tau,x^0+y,\varepsilon)-\frac{\partial}{\partial x^0}\bar{x}_{\tau_{\nu_0}}(\tau,x^0,\varepsilon)\right\|\le nLe^{2nc_1L}\mu$$

$\forall\,(\tau,\varepsilon)\in[0,L]\times(0,\varepsilon_0]$ при $\|y\|<\delta$.

Тому

$$\bar{x}_{\tau_{\nu_0}}(\tau, x^0 + y, \varepsilon) = \bar{x}_{\tau_{\nu_0}}(\tau, x^0, \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x^0}\bar{x}_{\tau_{\nu_0}}(\tau, x^0, \varepsilon)y + h_1(\tau, y, \varepsilon), \quad (11)$$

де

$$h_1(\tau, y, \varepsilon) = \int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial x^0}\bar{x}_{\tau_{\nu_0}}(\tau, x^0 + ty, \varepsilon) - \frac{\partial}{\partial x^0}\bar{x}_{\tau_{\nu_0}}(\tau, x^0, \varepsilon)\right] dty, \quad (12)$$

$$\| h_1(\tau, y, \varepsilon) \| \le nLe^{2nc_1L}\mu \| y \|$$

для всіх $\tau \in [0, L]$, $\tau \in (0, \varepsilon_0]$, $\| y \| < \delta$.

Крайова умова (4″) і (10)–(12) приводять до представлення

$$F(\bar{x}_{\tau_{\nu_0}}(\tau_1, x^0 + y, \varepsilon), \ldots, \varepsilon) = S(\varepsilon)y + h_2(y, \varepsilon), \quad (13)$$

в якому

$$\| h_2(y, \varepsilon) \| \le nr(1 + Lc_1)e^{2nc_1L}\mu \| y \| \quad \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0],\ \| y \| < \delta. \quad (14)$$

Таким чином, із (8), (9), (13) і (14) виводимо нерівність

$$\| M_\varepsilon(y) \| < c_3\left(c_1 r\sigma\sqrt{\varepsilon} + \frac{1}{c_3 2\Delta}\mu \| y \| \right) \quad \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0],\ \| y \| < \delta.$$

Звідси випливає, що $M_\varepsilon(y)$ відображає множину $\| y \| \le 2c_1c_3r\sigma\sqrt{\varepsilon} \equiv c\sqrt{\varepsilon}$ в себе лише коли $\varepsilon > 0$ настільки мале, що $c\sqrt{\varepsilon} < \delta$. Відмітимо також, що при кожному ε вектор-функція $M_\varepsilon(y)$ неперервна по y, тому згідно з теоремою Брауера [7, с. 79] існує (не обов'язково єдиний) розв'язок $y = y(\varepsilon)$, $\| y(\varepsilon) \| \le \le c\sqrt{\varepsilon}$, рівняння (8), а значить, існує розв'язок

$$(x(\tau, \varepsilon); \varphi(\tau, \varepsilon)) = (x_{\tau_{\nu_0}}(\tau, x^0 + y(\varepsilon), \varphi^0, \varepsilon); \varphi_{\tau_{\nu_0}}(\tau, x^0 + y(\varepsilon), \varphi^0, \varepsilon))$$

багатоточкової задачі (1), (3). Оцінка (7) із сталою $\bar{c}_1 = \sigma + cne^{nc_1L}$ випливає із оцінки (6) і нерівності

$$\| \bar{x}_{\tau_{\nu_0}}(\tau, x^0 + y(\varepsilon), \varepsilon) - \bar{x}_{\tau_{\nu_0}}(\tau, x^0, \varepsilon)) \| \le ne^{nc_1L} \| y(\varepsilon) \| \le nce^{nc_1L}\sqrt{\varepsilon}.$$

Для завершення доведення теореми накладемо умову $\bar{c}_1\sqrt{\varepsilon} < \rho / 2$, яка гарантує, що крива $x = x(\tau, \varepsilon)$ лежить в D разом із своїм $\rho / 2$-околом $\forall\, \tau \in [0, L]$.

Істотним припущенням в теоремі 1 є умова 4. Далі ми розглянемо випадок, коли ця умова порушується, а саме, будемо вважати, що

$$\| S^{-1}(\varepsilon) \| \le K\varepsilon^{-l_1}, \quad l_1 = \text{const} > 0,\ K = \text{const} > 0. \quad (15)$$

Теорема 2. *Припустимо, що:*

а) *виконуються умови* 1–3 *теореми* 1 *і нерівність* (15):

б) *матриці* $\partial X_0(x, \tau, \varepsilon) / \partial x$ *і* $\partial F(p, \varepsilon) / \partial p$ *задовольняють умову Гельдера*

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x} X_0(x, \tau, \varepsilon) - \frac{\partial}{\partial x} X_0(\bar{x}, \tau, \varepsilon) \right\| \le M \| x - \bar{x} \|^{l_2}, \quad 0 < l_2 \le 1,$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial p} F(p, \varepsilon) - \frac{\partial}{\partial p} F(\bar{p}, \varepsilon) \right\| \le M \| p - \bar{p} \|^{l_2}$$

$\forall\, x, \bar{x} \in D$, $p, \bar{p} \in D^r$, $\tau \in [0, L]$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *із сталою* M, *незалежною від* ε;

в) $l_1 < \dfrac{l_2}{2(1+l_2)}$.

Тоді при досить малому $\varepsilon_0 > 0$ *для кожного* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *існує хоча б один розв'язок* $(x(\tau, \varepsilon); \varphi(\tau, \varepsilon))$ *задачі* (1), (3), *який справджує нерівність*

$$\| x(\tau, \varepsilon) - \bar{x}_{\tau_{\nu_0}}(\tau, x^0, \varepsilon) \| \leq \underline{c}_1 \varepsilon^{1/2 - l_1} \quad \forall (\tau, \varepsilon) \in [0, L] \times (0, \varepsilon_0], \ \underline{c}_1 = \text{const}.$$

Доведення. Повторимо схему доведення теореми 1. Для визначення розв'язку $(x_{\tau_{\nu_0}}(\tau, x^0 + y, \varphi^0, \varepsilon); \varphi_{\tau_{\nu_0}}(\tau, x^0 + y, \varphi^0, \varepsilon))$ задачі (1), (3), тобто для знаходження y, запишемо рівність (8) і нерівність (9). Легко переконатись, що належність $\partial X_0(x, \tau, \varepsilon)/\partial x$ класу Гельдера гарантує виконання нерівності

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x^0} \bar{x}_{\tau_{\nu_0}}(\tau, x^0 + y, \varepsilon) - \frac{\partial}{\partial x^0} \bar{x}_{\tau_{\nu_0}}(\tau, x^0, \varepsilon) \right\| \leq M_1 \| y \|^{l_2},$$

$$M_1 = MLn^{1 + l_2} e^{nc_1(2 + l_2)L}$$

при $\| y \| \leq (\rho / 2n) e^{-nc_1 L}$, $\tau \in [0, L]$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Тому для функції $h_1(\tau, y, \varepsilon)$, що визначається рівністю (12), справедлива оцінка

$$\| h_1(\tau, y, \varepsilon) \| \leq \frac{1}{1 + l_2} M_1 \| y \|^{1 + l_2}. \tag{16}$$

Використовуючи гельдеровість матриці $\partial F(p, \varepsilon) / \partial p$, рівність (1), оцінку (16) і крайову умову (4″), одержуємо співвідношення (13), в якому

$$\| h_2(y, \varepsilon) \| \leq [3rc_1 M_1 + rn^{1 + l_2} M e^{nc_1(2 + l_2)L}] \| y \|^{1 + l_2} \equiv M_2 \| y \|^{1 + l_2}.$$

Отже,

$$\| M_\varepsilon(y) \| \leq K \varepsilon^{-l_1} [rc_1 \sigma \sqrt{\varepsilon} + M_2 \| y \|^{1 + l_2}]$$
$$\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0], \ \| y \| \leq (\rho / 2n) e^{-nc_1 L}.$$

Аналіз останньої нерівності показує, що при $l_1 < \dfrac{l_2}{2(1+l_2)} M_\varepsilon(y)$ відображає множину

$$\{ y: \| y \| \leq 2Krc_1 \sigma \varepsilon^{1/2 - l_1} \}$$

в себе для кожного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, якщо

$$\varepsilon_0 \leq \min \left\{ \left(\frac{4}{\rho} nc_1 r \sigma K e^{nc_1 L} \right)^{2/(2l_1 - 1)}; \left[\frac{1}{2KM_2} (2c_1 r \sigma K)^{-l_2} \right]^{2/(l_2 - 2(1 + l_2) l_1)} \right\}.$$

Оскільки $M_\varepsilon(y)$ неперервна по y, то існує розв'язок $y = y(\varepsilon)$ рівняння (8), який справджує нерівність $\| y(\varepsilon) \| \leq 2Krc_1 \sigma \varepsilon^{1/2 - l_1}$. Тому

$$(x(\tau, \varepsilon); \varphi(\tau, \varepsilon)) = (x_{\tau_{\nu_0}}(\tau, x^0 + y(\varepsilon), \varphi^0, \varepsilon); \varphi_{\tau_{\nu_0}}(\tau, x^0 + y(\varepsilon), \varphi^0, \varepsilon))$$

є розв'язком задачі (1), (3), причому

$$\| x(\tau, \varepsilon) - \bar{x}_{\tau_{\nu_0}}(\tau, x^0, \varepsilon) \| \leq$$

$$\leq \| x_{\tau_{\nu_0}}(\tau, x^0 + y(\varepsilon), \varphi^0, \varepsilon) - \bar{x}_{\tau_{\nu_0}}(\tau, x^0 + y(\varepsilon), \varepsilon) \| +$$

$$+ \| \bar{x}_{\tau_{\nu_0}}(\tau, x^0 + y(\varepsilon), \varepsilon) - \bar{x}_{\tau_{\nu_0}}(\tau, x^0, \varepsilon) \| \le \underline{c}_1 \varepsilon^{1/2 - l_1}, \quad \underline{c}_1 = \sigma + 2Krc_1\sigma n e^{nc_1 L}.$$

Теорема доведена.

Задамо тепер для рівнянь (1) крайові умови вигляду

$$x_{|\tau=\tau_{\nu_0}} = y^0 \in D, \quad \sum_{j=1}^{n} B_j(\varepsilon)\varphi_{|\tau=\tau_j} = f(x_{|\tau=\tau_1}, \ldots, x_{|\tau=\tau_r}, \varepsilon). \tag{17}$$

Тут $B_j(\varepsilon)$, $j = \overline{1, r}$, — квадратні m-вимірні матриці, $f(p_1, \ldots, p_r, \varepsilon)$ — m-вимірна вектор-функція.

Теорема 3. *Нехай*: а) *виконується умова* 1 *теореми* 1; б) $f(p_1, \ldots, p_r, \varepsilon)$ — *неперервна по* $p_j \in D$, $j = \overline{1, r}$, *і*

$$\det \sum_{j=1}^{n} B_j(\varepsilon) \ne 0 \quad \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0];$$

в) *крива* $x = \bar{x}_{\tau_{\nu_0}}(\tau, y^0, \varepsilon)$ *лежить в* D *разом із своїм* ρ-*околом.*

Тоді розв'язок $(x(\tau, \varepsilon); \varphi(\tau, \varepsilon))$ *задачі* (1), (17) *існує, причому повільні змінні* $x(\tau, \varepsilon)$ *кожного розв'язку лежать в* $\sigma\sqrt{\varepsilon}$-*околі кривої* $x = \bar{x}_{\tau_{\nu_0}}(\tau, y^0, \varepsilon)$ $\forall\, (\tau, \varepsilon) \in [0, L] \times (0, \varepsilon_0]$.

Доведення. Представимо швидкі змінні $\varphi(\tau, \varepsilon)$ шуканого розв'язку

$$(x(\tau, \varepsilon); \varphi(\tau, \varepsilon)) = (x_{\tau_{\nu_0}}(\tau, y^0, \psi, \varepsilon); \varphi_{\tau_{\nu_0}}(\tau, y^0, \psi, \varepsilon)) \tag{18}$$

багатоточкової задачі (1), (17) у вигляді

$$\varphi(\tau, \varepsilon) = \psi + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau_{\nu_0}}^{\tau} [\omega(x_{\tau_{\nu_0}}(t, y^0, \psi, \varepsilon), t) +$$

$$+ \varepsilon\Phi(x_{\tau_{\nu_0}}(t, y^0, \psi, \varepsilon), \varphi_{\tau_{\nu_0}}(t, y^0, \psi, \varepsilon), t, \varepsilon)]\, dt \equiv \psi + \frac{1}{\varepsilon}\theta(\tau, \psi, \varepsilon),$$

$$\| \theta(\tau, \psi, \varepsilon) \| \le c_1 L(1 + \varepsilon) \quad \forall\, (\tau, \psi, \varepsilon) \in [0, L] \times R^m \times (0, \varepsilon_0].$$

Тут ψ — поки що невідоме. Для знаходження ψ скористаємось крайовими умовами (17), в результаті чого одержимо рівність

$$\psi = \left(\sum_{j=1}^{r} B_j(\varepsilon) \right)^{-1} \left[\tilde{f}(\psi, \varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon} \sum_{j=1}^{r} B_j(\varepsilon)\theta(\tau_j, \psi, \varepsilon) \right] \equiv T_\varepsilon(\psi), \tag{19}$$

в якій

$$\tilde{f}(\psi, \varepsilon) = f(x_{\tau_{\nu_0}}(\tau_1, y^0, \psi, \varepsilon), \ldots, x_{\tau_{\nu_0}}(\tau_r, y^0, \psi, \varepsilon), \varepsilon).$$

Враховуючи неперервність $f(p_1, \ldots, p_r, \varepsilon)$ по $p_j \in D$, $j = \overline{1, r}$, умову в) теореми 3 і оцінку виду (6)

$$\| x(\tau, \varepsilon) - \bar{x}_{\tau_{\nu_0}}(\tau, y^0, \varepsilon) \| < \sigma\sqrt{\varepsilon}$$

та вибираючи $\varepsilon_0 \le (\rho / (2\sigma))^2$, встановлюємо існування такої сталої $c(\varepsilon)$, що $\| \tilde{f}(\psi, \varepsilon) \| \le c(\varepsilon)$ $\forall\, \psi \times R^m$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Тоді із (19) виводимо нерівність

$$\| T_\varepsilon(\psi) \| \le \left\| \left(\sum_{j=1}^{r} B_j(\varepsilon) \right)^{-1} \right\| \left[c(\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} L c_1 (1+\varepsilon) \sum_{j=1}^{r} \| B_j(\varepsilon) \| \right] \equiv \bar{c}(\varepsilon),$$

яка разом із неперервністю $T_\varepsilon(\psi)$ по ψ приводить до існування розв'язку $\psi = \psi(\varepsilon)$, $\| \psi(\varepsilon) \| \le \bar{c}(\varepsilon)$, рівняння (19), а значить, і розв'язку (18) задачі (1), (17). Теорема доведена.

В теоремі 3 суттєвим припущенням є лінійна залежність крайових умов (17) від $\varphi_{|\tau=\tau_j}$. Нижче ми встановимо достатні умови розв'язності багатоточкової задачі для одночастотної системи при наявності вказаних вище нелінійностей в крайових умовах.

Розглянемо випадок одночастотної $(m = 1)$ системи (1), для якої задано крайові умови

$$x_{|\tau=\tau_{\nu_0}} = y^0, \quad g(\varphi_{|\tau=\tau_1}, \dots, \varphi_{|\tau=\tau_r}, \varepsilon) = f(x_{|\tau=\tau_1}, \dots, x_{|\tau=\tau_r}, \varepsilon). \tag{20}$$

Тут $g(q_1, \dots, q_r, \varepsilon)$ і $f(p_1, \dots, p_r, \varepsilon)$ — скалярні функції змінних $q_j \in R$, $p_j \in D \subset R^n$, $j = \overline{1, r}$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

Теорема 4. *Припустимо, що:*

1) *виконуються умови* а), в) *теореми* 3;

2) $f(p_1, \dots, p_r, \varepsilon)$ *і* $g(q_1, \dots, q_r, \varepsilon)$ — *неперервні по* $q_j \in R$, $p_j \in D$, $j = \overline{1, r}$;

3) *для кожного* $N > 0$ *рівномірно по* $c^{(j)} = \text{const}$, $j = \overline{1, r}$, $|c^{(j)}| \le N$, *існують границі*

$$\lim_{t \to -\infty} g(t + c^{(1)}, \dots, t + c^{(r)}, \varepsilon) = -\infty,$$
$$\lim_{t \to \infty} g(t + c^{(1)}, \dots, t + c^{(r)}, \varepsilon) = \infty \tag{21'}$$

або

$$\lim_{t \to -\infty} q(t + c^{(1)}, \dots, t + c^{(r)}, \varepsilon) = \infty,$$
$$\lim_{t \to \infty} g(t + c^{(1)}, \dots, t + c^{(r)}, \varepsilon) = -\infty. \tag{21''}$$

Тоді розв'язок $(x(\tau, \varepsilon); \varphi(\tau, \varepsilon))$ *багатоточкової задачі* (1), (20) *існує, причому повільні змінні* $x(\tau, \varepsilon)$ *кожного розв'язку задовольняють оцінку*

$$\| x(\tau, \varepsilon) - \bar{x}_{\tau_{\nu_0}}(\tau, y^0, \varepsilon) \| < \sigma\sqrt{\varepsilon} \quad \forall\, (\tau, \varepsilon) \in [0, L] \times (0, \varepsilon_0]. \tag{22}$$

Доведення. Для визначення розв'язку (18) задачі (1), (20) перепишемо крайові умови у вигляді

$$\tilde{g}(\psi, \varepsilon) \equiv g\left(\psi + \frac{1}{\varepsilon}\theta(\tau_1, \psi, \varepsilon), \dots, \psi + \frac{1}{\varepsilon}\theta(\tau_r, \psi, \varepsilon), \varepsilon\right) - \tilde{f}(\psi, \varepsilon) = 0,$$

де

$$\tilde{f}(\psi, \varepsilon) \ \ (| \tilde{f}(\psi, \varepsilon) | \le c(\varepsilon) \ \ \forall\, \psi \in R)$$

і

$$\theta(\tau, \psi, \varepsilon) \ \ (| \theta(\tau, \psi, \varepsilon) | \le c_1 L (1 + \varepsilon) \quad \forall\, \tau \in [0, L], \ \psi \in R)$$

означені в процесі доведення теореми 3. Скористаємось умовою 3 теореми 4 при

$N = (1+\varepsilon)Lc_1/\varepsilon$, розглянувши при цьому, наприклад, випадок (21′). Згідно з умовою 3 існує $N_1(\varepsilon) > 0$ таке, що при $\varphi^{(1)} < -N_1(\varepsilon)$ і $\varphi^{(2)} > N_1(\varepsilon)$ виконуються нерівності

$$g\left(\psi^{(1)} + \frac{1}{\varepsilon}\theta(\tau_1, \psi^{(1)}, \varepsilon), \ldots, \psi^{(1)} + \frac{1}{\varepsilon}\theta(\tau_r, \psi^{(1)}, \varepsilon), \varepsilon\right) < -2c(\varepsilon),$$

$$g\left(\psi^{(2)} + \frac{1}{\varepsilon}\theta(\tau_1, \psi^{(2)}, \varepsilon), \ldots, \psi^{(2)} + \frac{1}{\varepsilon}\theta(\tau_r, \psi^{(2)}, \varepsilon), \varepsilon\right) > 2c(\varepsilon).$$

Враховуючи, що $|\tilde{f}(\psi, \varepsilon)| \le c(\varepsilon)$, одержуємо

$$\tilde{g}(\psi^{(1)}, \varepsilon) \le -c(\varepsilon) < 0, \quad \tilde{g}(\psi^{(2)}, \varepsilon) \ge c(\varepsilon) > 0.$$

Оскільки згідно із зробленими припущеннями функція $\tilde{g}(\psi, \varepsilon)$ неперервна по $\psi \in R$, то існує $\psi = \psi(\varepsilon)$ таке, що $\tilde{g}(\psi(\varepsilon), \varepsilon) = 0$. Звідси випливає існування розв'язку (18) задачі (1), (20), а оцінка (22) — із (6). Теорема доведена.

Зауваження. Одержані в роботі результати гарантують існування розв'язків багатоточкових задач, але не їх єдиність. Залежність частот ω в системі (1) від змінних x не дозволяє встановити властивість стиску відображень $M_\varepsilon(y)$ і $T_\varepsilon(\psi)$, які визначаються рівностями (8) і (19). Відмітимо, що в частинних випадках $\omega = \omega(\tau)$ або $X(x, \varphi, \tau, \varepsilon) = X^{(1)}(x, \tau, \varepsilon) + \varepsilon X^{(2)}(x, \varphi, \tau, \varepsilon)$ в [6] доведена єдиність розв'язку багатоточкової задачі в малому околі розв'язку усередненої задачі.

1. *Байнов Д. Д., Милушева С. Д.* О некоторых применениях метода усреднения для решения начальных и краевых задач для обыкновенных дифференциальных, интегро-дифференциальных и дифференциально-функциональных уравнений // Proc. VIII Int. Conf. Nonlinear Oscil. – Prague. – 1978. – P. 771–789.
2. *Плотников В. А.* Метод усреднения в задачах управления. – Киев; Одесса: Лыбидь, 1992. – 188 с.
3. *Самойленко А. М.* К вопросу обоснования метода усреднения многочастотных колебательных систем // Дифференц. уравнения. – 1987. – **23**, № 2. – С. 267–278.
4. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений – М.: Наука, 1978. – 304 с.
5. *Хапаев М. М.* Усреднение в теории устойчивости. – М.: Наука, 1986. – 192 с.
6. *Петришин Р. І.* Дослідження коливних систем з повільно змінними частотами за допомогою методу усереднення: Дис. ... д-ра фіз.-мат. наук. – Київ, 1995. – 248 с.
7. *Рейссинг Р., Сансоне Г., Конти Р.* Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1974. – 320 с.

Одержано 16.01.96