УДК 517. 925

А. О. Игнатьев (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ

We prove theorems on asymptotic, equiasymptotic, and uniform asymptotic stability of the integral set of a nonautonomous system of ordinary differential equations.

Доведено теореми про асимптотичну, еквіасимптотичну та рівномірно асимптотичну стійкість інтегральної множини неавтономної системи звичайних диференціальних рівнянь.

Для исследования устойчивости решений обыкновенных дифференциальных уравнений А. М. Ляпуновым был предложен метод, который сводится к построению вспомогательных функций, производные которых в силу системы уравнений возмущенного движения должны иметь определенные свойства. В дальнейшем прямой метод Ляпунова получил свое развитие в задачах исследования устойчивости относительно части переменных и устойчивости интегральных множеств систем обыкновенных дифференциальных уравнений [1–8]. Настоящая работа посвящена применению метода В. М. Матросова [9] к изучению устойчивости интегральных множеств.

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = X(t, x), \tag{1}$$

где $x, X \in R^n$, $t \in I = [0, \infty)$; точка в левой части уравнения (1) означает дифференцирование по t. Предположим, что при

$$(t, x) \in \Gamma_{H_1} = I \times B_{H_1};\ B_{H_1} = \left\{ x \in R^n : \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} < H_1 \right\} \tag{2}$$

выполнены условия существования и единственности решений системы (1). Приведем ряд определений из работ [7, 8], которые необходимы для дальнейшего изложения.

Определение 1. *Множество M пространства (t, x) называется интегральным, если для любой точки $(t_0, x_0) \in M$ выполняется $(t, x(t)) \in M$, где $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ — решение системы* (1) *с начальными данными $x(t_0) = x_0$.*

Пусть $M \subset I \times R^n$. Обозначим через M_s пересечение этого множества с гиперплоскостью $t = s$, а через $\rho\,(x, M_s)$ расстояние от точки x до множества M_s.

Определение 2. *Интегральное множество M системы* (1) *называется устойчивым, если для любых $t_0 \in I$, $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$ такое, что из неравенства $\rho\,(x_0, M_{t_0}) < \delta$ следует неравенство $\rho\,(x(t), M_t) < \varepsilon$ при $t \ge t_0$. M называется равномерно устойчивым, если число δ зависит только от ε.*

Обозначим $S(M_t, r) = \{x \in R^n :\ \rho(x, M_t) < r\}$.

Определение 3. *Интегральное множество M называется притягивающим, если для всякого $t_0 \in I$ существует $\eta = \eta(t_0) > 0$ такое, что для любых $\varepsilon > 0$ и $x_0 \in S(M_{t_0}, \eta)$ можно указать $\sigma = \sigma(t_0, \varepsilon, x_0) > 0$ такое, что $x(t, t_0, x_0) \in S(M_t, \varepsilon)$ для всех $t \ge t_0 + \sigma$. Область $S(M_{t_0}, \eta)$ называется областью притяжения интегрального множества M в момент t_0. M называется эквипритягивающим, если число σ не зависит от x_0, т.е. $\sigma = \sigma(t_0, \varepsilon) > 0$.*

Определение 4. *Интегральное множество M называется равномерно притягивающим, если для некоторого $\eta > 0$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется $\sigma = \sigma(\varepsilon) > 0$ такое, что справедливо неравенство $\rho(x(t, t_0, x_0), M_t) < \varepsilon$ для всех $t_0 \in I$, $x_0 \in S(M_{t_0}, \eta)$, $t \geq t_0 + \sigma$.*

Определение 5. *Интегральное множество M называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво и притягивающее; эквиасимптотически устойчивым, если оно устойчиво и эквипритягивающее; равномерно асимптотически устойчивым, если оно равномерно устойчиво и равномерно притягивающее.*

Будем рассматривать, следуя В. М. Матросову [9], вещественные функции $V(t, x)$, $W(t, x)$ переменных t, x определенные и непрерывно дифференцируемые в области

$$U_H(M) = \{(t, x) \in R^{n+1} : t \in I, \ x \in S(M_t, H)\},$$

причем $U_H(M) \subset \Gamma_{H_1}$. Будем предполагать, если не оговорено противное, выполнение равенства $V(t, x) = 0$ при $t \in I$, $x \in M_t$.

Функцию $X(t, x) = (X_1(t, x), \ldots, X_n(t, x))$ считаем ограниченной в области (2): $|X_s(t, x)| \leq L$. Интегральное множество M полагаем достаточно гладким, а функцию $\rho(x(t), M_t)$ непрерывной при любой непрерывной $x(t)$.

Определение 6. *Функция $P(t, x)$ удовлетворяет условию* (A), *если можно указать такое число $h > 0$, что для любого сколь угодно малого $\alpha > 0$ $(\alpha < h)$ найдутся положительные числа $r_1(\alpha)$, $r_2(\alpha)$ такие, что*

$$|P(t, x)| > r_2 \ \text{при} \ \alpha < \rho(x, M_t) < h, \quad |\dot{V}(t, x)| > r_1, \ t \in I.$$

Теорема 1. *Пусть существуют функции $V(t, x)$, $W(t, x)$ которые имеют в области $U_H(M)$ следующие свойства:*

1) $a(\rho(x, M_t)) \leq V(t, x) \leq b(\rho(x, M_t))$, *где $a \in K$, $b \in K$, K — класс функций Хана*;

2) $\dot{V}(t, x) \leq 0$, *а частные производные $\partial V / \partial x_s$, $\partial V / \partial t$ непрерывны и ограничены* $\left(\left|\frac{\partial V}{\partial t}\right| < L_1, \left|\frac{\partial V}{\partial x_s}\right| < L_1\right)$;

3) *функция $W(t, x)$ ограничена* $(|W(t, x)| < N)$;

4) *функция $\dot{W}(t, x)$ удовлетворяет условию* (A).

Тогда интегральное множество M равномерно асимптотически устойчиво.

Доказательство. Равномерная устойчивость интегрального множества M следует из результатов работы [7]. Покажем, что M является равномерно притягивающим. Выберем произвольное h, $0 < h < H$, удовлетворяющее условию 4 теоремы 1. Из свойства равномерной устойчивости следует существование такого $\delta = \delta(h) > 0$, что при любом $t_0 \in I$ из неравенства $\rho(x_0, M_{t_0}) < \delta$ следует $\rho(x(t), M_t) < h$ при $t \geq t_0$. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Покажем, что для любых $t_0 \in I$, $x_0 \in S(M_{t_0}, \delta)$ найдется такое $\sigma = \sigma(\varepsilon) > 0$, что $\rho(x(t), M_t) < \varepsilon$ при $t \geq t_0 + \sigma$. Для этого достаточно показать существование такого $T = T(\varepsilon)$, что $\rho(x(t_0 + T), M_{t_0+T}) < b^{-1}(a(\varepsilon)) = \alpha$, где $b^{-1}(\cdot)$ — функция, обратная функции b. Предварительно установим некоторые свойства решения $x(t) = x(t, t_0, x_0)$.

Свойство 1. Для любых моментов времени t_1 и t_2 из условий

$$V(t_1, x(t_1)) = \frac{r_1}{2}, \quad V(t_2, x(t_2)) = r_1$$

следует

$$|t_1 - t_2| \geq \frac{r_1}{2L_1(1+Ln)}. \tag{3}$$

Действительно,

$$\frac{r_1}{2} = |V(t_2, x(t_2)) - V(t_1, x(t_1))| =$$
$$= \left| \frac{\partial V}{\partial t}(t_2 - t_1) + \frac{\partial V}{\partial x_1}(x_1(t_2) - x_1(t_1)) + \ldots + \frac{\partial V}{\partial x_n}(x_n(t_2) - x_n(t_1)) \right|, \tag{4}$$

где $\frac{\partial V}{\partial t}$, $\frac{\partial V}{\partial x_s}$ вычисляются в точке

$$t = t_1 + \theta(t_2 - t_1), \quad x = x(t_1) + \theta\big(x(t_2) - x(t_1)\big), \quad \theta \in (0; 1).$$

Учитывая, что

$$x_s(t_2) - x_s(t_1) = \frac{dx_s(t_1 + \theta_s(t_2 - t_1))}{dt}(t_2 - t_1),$$

где $\theta_s \in (0; 1)$, из (4) получаем

$$\frac{r_1}{2} \leq (L_1 + L_1 Ln)|t_2 - t_1|,$$

откуда следует неравенство (3).

Рассмотрим множество

$$\Psi = \{(t, x) \in R^{n+1}: t \in I, \ \alpha < \rho(x, M_t) < h, \ \dot{V}(t, x) > -r_1\}.$$

Свойство 2. Траектория $x(t)$ не может постоянно принадлежать множеству Ψ в течение отрезка времени, равного $2N/r_2$. (Здесь и далее это означает, что это свойство имеет подвижная точка $(t, x(t))$.)

Предположим, что $(\tau, x(\tau)) \in \Psi$. При $t > \tau$ справедливо тождество

$$W(t, x(t)) - W(\tau, x(\tau)) = \int_\tau^t \dot{W}(s, x(s))\, ds. \tag{5}$$

Пока $x(t)$ принадлежит множеству Ψ, функция $\dot{W}(t, x)$ не меняет знак, поэтому

$$|W(t, x(t))| + |W(\tau, x(\tau))| \geq \int_\tau^t |\dot{W}(s, x(s))|\, ds > r_2(t - \tau). \tag{6}$$

Из условия 3 теоремы 1 и неравенства (6) имеем

$$t - \tau < \frac{2N}{r_2},$$

т.е. свойство 2 действительно справедливо.

Свойство 3. Если в момент τ выполняются условия

$$\rho(x(\tau), M_\tau) > \alpha, \quad \dot{V}(\tau, x(\tau)) > -\frac{r_1}{2}$$

и при всех $t \in [\tau; \tau + 2N/r_2]$ будет $\rho(x(t), M_t) > \alpha$, то в момент $\tau_1 \in (\tau; \tau + {}$ ${}+ 2N/r_2]$, когда $\rho(x(\tau_1), M_{\tau_1}) > \alpha$, $\dot{V}(\tau_1, x(\tau_1)) = -r_1$, справедливо неравенство

$$V(\tau_1, x(\tau_1)) < V(\tau, x(\tau)) - \omega(\alpha), \tag{7}$$

где

$$\omega(\alpha) = \frac{r_1^2}{4L_1(1+Ln)}. \tag{8}$$

Действительно, при сформулированных условиях найдется момент времени τ_2, $\tau < \tau_2 < \tau_1$, такой, что $\alpha < \rho(x(\tau_2), M_{\tau_2}) < h$, $\dot V(\tau_2, x(\tau_2)) = -r_1/2$ и при всех $\tau \in [\tau_2; \tau_1]$ выполняются соотношения

$$\alpha < \rho(x(t), M_t) < h, \quad -r_1 \le \dot V(t, x(t)) \le -\frac{r_1}{2},$$

из которых, учитывая свойства 1, 2, имеем

$$\frac{r_1}{2L_1(1+Ln)} \le \tau_1 - \tau_2 \le \frac{2N}{r_2}. \tag{9}$$

Используя неравенства (9), получаем

$$V(\tau_1, x(\tau_1)) - V(\tau, x(\tau)) =$$

$$= \int_\tau^{\tau_2} \dot V(s, x(s))\, ds + \int_{\tau_2}^{\tau_1} \dot V(s, x(s))\, ds <$$

$$< \int_{\tau_2}^{\tau_1} \dot V(s, x(s))\, ds < -\frac{r_1}{2}(\tau_1 - \tau_2) \le -\frac{r_1^2}{4L_1(1+Ln)} = -\omega(\alpha), \tag{10}$$

откуда следуют неравенство (7) и справедливость свойства 3.

Рассмотрим последовательность моментов времени

$$t_k = t_0 + \frac{2N_k}{r_2}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Свойство 4. Если решение $x(t)$ при любом $t \in [t_k; t_{k+2}]$ удовлетворяет условиям $\alpha < \rho(x(t), M_t) < h$, то

$$V(t_{k+2}, x(t_{k+2})) < V(t_k, x(t_k)) - \omega. \tag{11}$$

Действительно, если при $t \in [t_k; t_{k+1}]$ справедливы соотношения

$$\alpha < \rho(x(t), M_t) < h, \quad \dot V(t, x(t)) \le -\frac{r_1}{2},$$

то в силу неравенств (9)

$$V(t_{k+2}, x(t_{k+2})) - V(t_k, x(t_k)) \le$$

$$\le \int_{t_k}^{t_{k+1}} \dot V(s, x(s))\, ds \le -\frac{r_1}{2}\frac{2N}{r_2} = -\frac{r_1 N}{r_2} \le -\frac{r_1^2}{4L_1(1+Ln)}.$$

Если же имеется $\tau \in [t_k; t_{k+1}]$ такое, что

$$\alpha < \rho(x(\tau), M_\tau) < h, \quad \dot V(\tau, x(\tau)) > -\frac{r_1}{2},$$

то найдется такое значение τ_*, $\tau < \tau_* \le t_{k+2}$, при котором $\dot V(\tau_*, x(\tau_*)) = -r_1$ и согласно свойству 3

$$V(\tau_*, x(\tau_*)) < V(\tau, x(\tau)) - \omega \le V(t_k, x(t_k)) - \omega,$$

следовательно,

$$V(t_{k+2}, x(t_{k+2})) \le V(\tau_*, x(\tau_*)) < V(t_k, x(t_k)) - \omega,$$

что и доказывает справедливость свойства 4.

Положим $T_* = (4nk)/r_2$, где натуральное число k удовлетворяет условию

$$k > \frac{b(h) - a(\alpha)}{\omega}. \tag{12}$$

Покажем, что существует $T \in (0; T_*]$ такое, что $\rho\left(x(t_0 + T), M_{t_0+T}\right) < \alpha$. Предположим противное, т.е. при любом $t \in (0; T_*]$ справедливо

$$\alpha \le \rho\left(x(t_0 + t), M_{t_0+t}\right) < h.$$

По предположению

$$V(t_0, x_0) \le b(h), \quad V(t_0 + t, x(t_0 + t)) \ge a(\alpha)$$

при $t \in (0; T_*]$, следовательно,

$$V(t_0, x_0) - V(t_0 + t, x(t_0 + t)) \le b(h) - a(\alpha). \tag{13}$$

С другой стороны, из свойства 4 вытекает неравенство

$$V(t_0, x_0) - V(t_{2k}, x(t_{2k})) > k\omega. \tag{14}$$

Из соотношений (12), (14) имеем

$$V(t_0, x_0) - V(t_{2k}, x(t_{2k})) > b(h) - a(\alpha),$$

что противоречит условию (13) при $t = T_*$. Полученное противоречие доказывает существование числа $T \in (0; T_*]$ такого, что $\rho\left(x(t_0 + T), M_{t_0+T}\right) < \alpha(\varepsilon)$. Учитывая, что $T \le T_*$, где T_* зависит только от ε, заключаем, что интегральное множество M является равномерно притягивающим. Теорема 1 доказана.

Определение 7. *Функция* $P(t, x)$ *удовлетворяет условию* (B), *если существует такое* $h > 0$, *что для любого достаточно малого положительного* α $(\alpha < h)$ *можно указать положительное число* $r_1(\alpha)$ *и непрерывную функцию* $\xi_\alpha(t)$ *такие, что при любом* $t \in I$

$$\xi_\alpha(t) > 0, \quad \int_t^\infty \xi_\alpha(s)\, ds = \infty \tag{15}$$

и на множестве Ψ, *где*

$$\Psi = \{(t, x) \in R^{n+1}: t \in I,\ \rho(x, M_t) < h,\ V(t, x) > \alpha,\ |\dot V(t, x)| < r_1\},$$

выполняется неравенство

$$P(t, x) \ge \xi_\alpha(t).$$

Теорема 2. *Пусть существуют функции* $V(t, x)$, $W(t, x)$, *которые в области* $U_H(M)$ *имеют следующие свойства:*

1) $V(t, x) \ge a(\rho(x, M_t))$, $a \in K$;

2) $\dot V(t, x) \le 0$, *а частные производные* $\partial V/\partial x_s$, $\partial V/\partial t$ *непрерывны и ограничены* $(|\partial V/\partial t| < L_1,\ |\partial V/\partial x_s| < L_1)$;

3) *функция* $W(t, x)$ *ограничена* $(|W(t, x)| < N)$;

4) *функция* $\dot{W}(t, x)$ *удовлетворяет условию* (B).

Тогда интегральное множество M *эквиасимптотически устойчиво.*

Доказательство. Устойчивость интегрального множества следует из работы [7]. Покажем, что M — эквипритягивающее. Выберем произвольное положительное число h $(h < H)$.

При любом $t_0 \in I$ можно указать такое число $\delta = \delta(t_0, h) > 0$, что при любых $x_0 \in S(M_{t_0}, \delta)$, $t \geq t_0$ будет выполняться $x(t) \in S(M_t, h)$. Так как $h \in (0, H)$ фиксировано, то $\delta = \delta(t_0)$. Рассмотрим траекторию $x(t) = x(t, t_0, x_0)$, где $x_0 \in S(M_{t_0}, \delta)$. По выбору числа δ эта траектория во все время движения $t \geq t_0$ остается в области $U_h(M)$. Оценим время, в течение которого $x(t)$ принадлежит множеству $V(t, x) > \alpha(\varepsilon) = \alpha$.

Предварительно установим некоторые свойства решения $x(t)$.

Свойство 1. Для любых моментов t_1 и t_2 из условий $V(t_1, x(t_1)) = r_1/2$, $V(t_2, x(t_2)) = r_1$ следует неравенство (3).

Справедливость этого свойства показана при доказательстве теоремы 1.

Свойство 2. Траектория $x(t)$ не может постоянно принадлежать множеству Ψ.

Предположим, что $(\tau, x(\tau)) \in \Psi$. При $t > \tau$ выполняется тождество (5). Пока траектория расположена на множестве Ψ, функция $\dot{W}(t, x)$ не меняет знак, поэтому

$$|W(t, x(t))| + |W(\tau, x(\tau))| \geq \int_{\tau}^{t} |\dot{W}(s, x(s))| ds \geq \int_{\tau}^{t} \xi_\alpha(s) ds. \qquad (16)$$

По условию (15) существует $T_1 = T_1(\alpha, \tau)$ такое, что при $t \geq \tau + T_1$

$$\int_{\tau}^{t} \xi_\alpha(s) ds > 2N.$$

Из последнего неравенства и соотношений (16) получаем

$$|W(t, x(t))| + |W(\tau, x(\tau))| > 2N,$$

что противоречит предположению п.3 теоремы 2. Полученное противоречие доказывает справедливость свойства 2.

Свойство 3. Если в момент τ выполняются условия

$$\tau \in I, \; \rho(x(\tau), M_\tau) < h, \quad V(\tau, x(\tau)) > \alpha, \quad \dot{V}(\tau, x(\tau)) \leq -\frac{r_1}{2}$$

и при всех $t \in [\tau; \tau + T_1]$ будет $V(t, x(t)) > \alpha$, то в момент $\tau_1 \in (\tau; \tau + T_1]$, когда

$$V(\tau_1, x(\tau_1)) > \alpha, \quad \rho(x(\tau_1), M_{\tau_1}) < h, \quad \dot{V}(\tau_1, x(\tau_1)) = -r_1,$$

справедливо неравенство (7), где ω определяется соотношением (8).

Действительно, при сформулированных условиях найдется момент времени τ_2, $\tau < \tau_2 < \tau_1$, такой, что

$$V(\tau_2, x(\tau_2)) > \alpha, \quad \dot{V}(\tau_2, x(\tau_2)) = -\frac{r_1}{2}$$

и при всех $t \in [\tau_2; \tau_1]$

$$V(t, x(t)) > \alpha, \quad -r_1 \le \dot{V}(t, x(t)) \le -\frac{r_1}{2}.$$

Из свойств 1, 2 следует

$$\frac{r_1}{2L_1(1+Ln)} \le \tau_1 - \tau_2 \le T_1,$$

откуда получаем неравенства (10), что и доказывает справедливость свойства 3.

Рассмотрим последовательность моментов времени $t_k = t_{k-1} + T_k$, $k = 1, 2, \dots$, где числа $T_k = T_k(\alpha, t_0)$ определяются равенствами

$$\int_{t_{k-1}}^{t_{k-1}+T_k^*} \xi_\alpha(s)\, ds = 2N+1, \quad T_k = \max\left\{ T_k^*, \frac{r_1}{2L_1(1+Ln)} \right\}.$$

Свойство 4. Если решение $x(t)$ при любом $t \in [t_k; t_{k+2}]$ удовлетворяет условию $V(t, x(t)) > \alpha$, то справедливо неравенство (11).

Действительно, если при $t \in [t_k; t_{k+1}]$ постоянно

$$V(t, x(t)) > \alpha, \quad \dot{V}(t, x(t)) \le -\frac{r_1}{2},$$

то

$$V(t_{k+2}, x(t_{k+2})) - V(t_k, x(t_k)) \le \int_{t_k}^{t_{k+1}} \dot{V}(s, x(s))\, ds \le -\omega.$$

Если же имеется $\tau \in [t_k; t_{k+1}]$ такое, что

$$V(\tau, x(\tau)) > \alpha, \quad \dot{V}(\tau, x(\tau)) > -\frac{r_1}{2},$$

то найдется такое значение τ_*, $\tau < \tau_* \le t_{k+2}$, при котором $\dot{V}(\tau_*, x(\tau_*)) = -r_1$. Тогда согласно свойству 3

$$V(t_{k+2}, x(t_{k+2})) \le V(\tau_*, x(\tau_*)) \le V(\tau, x(\tau)) - \omega \le V(t_k, x(t_k)) - \omega,$$

что и доказывает справедливость свойства 4.

Из неравенства (11) получаем

$$V(t_{2k}, x(t_{2k})) \le V(t_0, x(t_0)) - k\omega. \tag{17}$$

При

$$k > \frac{V(t_0, x_0) - \alpha}{\omega} \tag{18}$$

соотношение (17) нарушится. Это означает, что, выбирая $T = T(\varepsilon, t_0, x_0) = t_{2k}$, где k удовлетворяет условию (18), имеем $V(t, x(t, t_0, x_0)) < \alpha$ при $t \ge t_0 + T$, откуда в соответствии с п.1 теоремы 2 получаем $\rho(x(t), M_t) < \varepsilon$ при $t \ge t_0 + T$. Этим доказано, что M является притягивающим.

Докажем теперь, что $V(t, x(t, t_0, x_0))$ стремится к нулю равномерно по $x_0 \in S(M_{t_0}, \delta)$ при $t \to \infty$. Согласно доказанному для любых $\varepsilon > 0$, $t_0 \in I$, $x_0 \in S(M_{t_0}, \delta)$ можно указать такое $T = T(\varepsilon, t_0, x_0) > 0$, при котором

$$V(t_0 + T, x(t_0 + T, t_0, x_0)) < a(\varepsilon). \tag{19}$$

Так как по предположению функция V непрерывна, а решение $x(t)$ непрерывно зависит от начальных условий, неравенство (19) выполняется в некоторой окрестности $Q(x_0)$ точки x_0, т.е.

$$V(t_0+T, x(t_0+T, t_0, y_0)) < a(\varepsilon) \text{ при } y_0 \in Q(x_0).$$

Обозначим $\eta = \delta/2$. Компактное множество $\overline{S(M_{t_0}, \eta)}$ покрыто семейством окрестностей $\{Q(x_0)\}$, из которого можно выделить конечное подпокрытие $Q_1, \ldots, Q_p$ с соответствующими числами $T_1, \ldots, T_p$. Полагая

$$\sigma(t_0, \varepsilon) = \max\{T_1, \ldots, T_p\},$$

получаем, что $V(t, x(t, t_0, x_0)) < a(\varepsilon)$ для всех $x_0 \in S(M_{t_0}, \eta)$, $t \geq t_0 + \sigma(t_0, \varepsilon)$. Это означает, что $x(t) \in S(M_t, \varepsilon)$ при $x_0 \in S(M_{t_0}, \eta)$, $t \geq t_0 + \sigma(t_0, \varepsilon)$, что и доказывает эквипритяжение интегрального множества M. Теорема доказана.

Введем в рассмотрение функцию $V_*(x)$, которая определена и непрерывна в B_{H_1} и обращается в нуль на множестве E. Пусть H — положительное число $(H < H_1)$.

Определение 8. *Функция $P(t, x)$ удовлетворяет условию* (Д), *если существует положительное число h $(h < H)$ такое, что для любого сколь угодно малого $\alpha > 0$ $(\alpha < h)$ можно указать числа $r_1(\alpha) > 0$, $r_2(\alpha) > 0$ такие, что $|P(t, x)| > r_2$ при $t \in I$, $\rho(x, E) < r_1$, $V(t, x) \geq \alpha$, $\rho(x, M_t) < h$.*

Теорема 3. *Пусть существуют функции $V(t, x)$, $W(t, x)$ которые в области $U_H(M)$ имеют следующие свойства:*

1) $V(t, x) \geq a(\rho(x, M_t))$, $a \in K$;

2) $\dot V(t, x) \leq 0$ *и в каждой области* $t \in I$, $V(t, x) \geq \alpha$, $\rho(x, M_t) < H$ *справедлива оценка* $\dot V(t, x) \leq \varphi_\alpha(t) V_*(x)$, *где* $V_*(x) \leq 0$, *а* $\varphi_\alpha(t)$ — *непрерывная неотрицательная функция* t *такая, что для любой бесконечной системы* Ω *замкнутых непересекающихся отрезков полуоси* $[0, \infty)$ *одинаковой фиксированной длины каждый*

$$\int_\Omega \varphi_\alpha(t)\, dt = \infty;$$

3) *функция* $W(t, x)$ *ограничена;*

4) *функция* $\dot W(t, x)$ *удовлетворяет условию* (Д).

Тогда интегральное множество M асимптотически устойчиво.

Доказательство. Устойчивость интегрального множества следует из работы [7] на основании свойств 1, 2 теоремы 3. Выберем произвольное положительное число h $(h < H)$. Существует такое $\delta = \delta(t_0) > 0$, что при любых $x_0 \in S(M_{t_0}, \delta)$, $t \geq t_0$ справедливо неравенство $\rho(x(t), M_t) < h$, где $x(t) = x(t, t_0, x_0)$. Возьмем произвольное $x_0 \in S(M_{t_0}, \delta)$ и покажем, что

$$\lim_{t \to \infty} \rho(x(t), M_t) = 0.$$

По выбору числа δ траектория $x(t)$ во все время движения остается в области $S(M_t, h)$. Пусть $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon < h)$ — сколь угодно малое число. Покажем, что существует такой момент времени, начиная с которого $\rho(x(t), M_t) < \varepsilon$. Из предположений пп.1, 2 теоремы 3 для этого достаточно показать, что в какой-то момент времени t выполняется соотношение $V(t, x(t)) < \alpha = a(\varepsilon)$. Доказательство проведем от противного, т.е. будем считать, что во все время движения $V(t, x(t)) \geq \alpha$.

Предварительно установим некоторые свойства решения $x(t)$.

Свойство 1 [9]. Если $\rho(x(t), x(\tau)) \geq r_1/2$, то

$$|t-\tau| \geq \frac{r_1}{2L\sqrt{n}}.$$

Свойство 2. Если в момент τ справедливо неравенство $\rho(x(\tau), E) < r_1$, то существует момент τ_1 $(\tau_1 > \tau)$ такой, что $\rho(x(\tau_1), E) = r_1$.

Свойство 3. Если в момент τ выполняется соотношение $\rho(x(\tau), E) < r_1/2$, то при $t = t_1$, когда $\rho(x(t_1), E) = r_1$, имеем

$$V(t_1, x(t_1)) \leq V(\tau, x(\tau)) + \beta \int\limits_{T_1^*}^{t_1} \varphi_\alpha(t)\,dt,$$

где

$$T_1^* = t_1 - \frac{r_1}{2L\sqrt{n}}, \quad \beta = \sup V_*(x) \text{ при } \rho(x, E) \geq \frac{r_1}{2},\ x \in B_H,$$

причем $T_1^* \geq \tau$, $\beta < 0$.

Для доказательства этого свойства обозначим через τ_1 $(\tau < \tau_1 < t_1)$ такое число, что $\rho(x(\tau_1), E) = r_1/2$, а при $t \in [\tau_1; t_1]$ справедливы оценки $r_1/2 \leq \rho(x(t), E) \leq r_1$. Согласно п.2 теоремы 3 имеем

$$\dot V(t, x(t)) \leq \varphi_\alpha(t) V_*(x(t)) \leq \beta\varphi_\alpha(t),$$

откуда

$$V(t_1, x(t_1)) - V(\tau, x(\tau)) = \int\limits_{\tau}^{t_1} \dot V(s, x(s))\,ds \leq$$

$$\leq \int\limits_{\tau_1}^{t_1} \dot V(s, x(s))\,ds \leq \beta \int\limits_{\tau_1}^{t_1} \varphi_\alpha(s)\,ds.$$

Учитывая, что $\rho(x(\tau_1), x(t_1)) \geq r_1/2$, на основании свойства 1 получаем

$$t_1 - \tau \geq t_1 - \tau_1 \geq \frac{r_1}{2L\sqrt{n}},$$

что и доказывает справедливость неравенства $T_1^* \geq \tau$ и свойства 3.

Свойство 4. Не существует момента времени t_* такого, что при всех $t \geq t_*$ выполняется условие

$$\rho(x(t), E) \geq \frac{r_1}{2}.$$

Предполагая противное, получаем

$$V(t, x(t)) - V(t_*, x(t_*)) \leq \beta \int\limits_{t_*}^{t} \varphi_\alpha(s)\,ds.$$

Учитывая, что правая часть последнего неравенства стремится к $-\infty$, заключаем, что $V(t, x(t)) \to -\infty$, а это противоречит п.1 теоремы 3. Полученное противоречие и доказывает свойство 4.

Таким образом, для любого t_i найдется $T_{i+1} \geq t_i$ такое, что $\rho(x(T_{i+1}), E) < r_1/2$. По доказанному ему соответствует $t_{i+1} > T_i$ такое, что $\rho(x(t_{i+1}), E) = r_1$. Рассмотрим последовательность чисел

$$t_0 < T_1 < t_1 < T_2 < \ldots < t_i < T_{i+1} < \ldots .$$

Согласно свойству 3

$$V(t_i, x(t_i)) \leq V(t_0, x(t_0)) + \beta \sum_{s=1}^{i} \int_{T_s^*}^{t_s} \varphi_\alpha(t)\,dt, \tag{20}$$

где $T_s \leq T_s^* = t_s - r_1 / (2L\sqrt{n})$. Система отрезков $[T_s^*; t_s]$ удовлетворяет условию п.2 теоремы 3 для системы Ω, поэтому сумма в правой части неравенства (20) стремится к $+\infty$ при $i \to \infty$. Учитывая, что $\beta < 0$, получаем

$$\lim_{t\to\infty} V(t_i, x(t_i)) = -\infty,$$

что противоречит предположению $V(t, x(t)) \geq \alpha$. Полученное противоречие доказывает, что существует такое σ, что при $t > t_0 + \sigma$ выполняется неравенство $V(t, x(t)) < \alpha(\varepsilon)$, т. е. интегральное множество M асимптотически устойчиво.

В качестве примера рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + \frac{1}{2}x(2 - x^2 - y^2)(1 + \sin^2 t), \\ \dot{y} &= x, \end{aligned} \tag{21}$$

имеющую интегральное множество

$$x^2 + y^2 - 2 = 0. \tag{22}$$

Вспомогательные функции

$$V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - 2)^2, \quad W = x$$

удовлетворяют условиям теоремы 1. Следовательно, интегральное множество (22) системы (21) равномерно асимптотически устойчиво.

1. *Румянцев В. В., Озиранер А. С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. – М.: Наука, 1987. – 256 с.
2. *Савченко А. Я., Игнатьев А. О.* Некоторые задачи устойчивости неавтономных динамических систем. – Киев: Наук. думка, 1989. – 208 с.
3. *Зубов В. И.* Устойчивость движения. – М.: Высш. шк., 1973. – 271 с.
4. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. – М.: Наука, 1987. – 304 с.
5. *Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике. – М.: Наука, 1973. – 512 с.
6. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. – М.: Мир, 1980. – 300 с.
7. *Игнатьев А. О.* Применение прямого метода Ляпунова к исследованию интегральных множеств // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 10. – С. 1342–1348.
8. *Игнатьев А. О.* О существовании функций Ляпунова в задачах устойчивости интегральных множеств // Там же. – 1993. – **45**, № 7. – С. 932–941.
9. *Матросов В. М.* Об устойчивости движения // Прикл. математика и механика. – 1962. – **26**, № 5. – С. 885–895.

Получено 10.04.95