УДК 517. 54

И. М. Коцур, М. Ф. Коцур (Запорож. техн. ун-т)

О РАДИУСАХ ВЫПУКЛОСТИ И ЗВЕЗДНОСТИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ СПЕЦИАЛЬНЫХ КЛАССОВ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В КРУГЕ

A class O_α, $0 \le \alpha \le 1$, of analytic functions $w = f(z), f(0) = 0, f'(0) = 0, \ldots, f_{(0)}^{(n-1)} = 0, f^{(n)}(0) = (n-1)!$ on the disc $|z| < 1$ is considered. These functions are determined from the conditions

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1-2z^n\cos\Theta + z^{2n}}{z^{n-1}} f'(z)\right) > \alpha, \quad 0 \le \Theta \le \pi, \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

The bounds of convexity in the class O_α and bounds of the starshape in a class U_α of functions $\varphi(z) = zf'(z)$, $f(z) \subset O_\alpha$ have been found.

Вводиться клас O_α, $0 \le \alpha \le 1$, аналітичних у крузі $|z| < 1$ функцій $w = f(z), f(0) = 0, f'(0) = 0, \ldots, f_{(0)}^{(n-1)} = 0, f^{(n)} = (n-1)!$, які визначаються умовою

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1-2z^n\cos\Theta + z^{2n}}{z^{n-1}} f'(z)\right) > \alpha, \quad 0 \le \Theta \le \pi, \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Встановлено границі опуклості в класі O_α і зірчатості в класі U_α функцій $\varphi(z) = zf'(z)$, $f(z) \subset O_\alpha$.

Обозначим через τ_α^n, $0 \le \alpha < 1$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, класс регулярных в круге $E = \{z: |z| < 1\}$ функций

$$w = g(z),\ g(0) = 0,\ g'(0) = 0,\ g''(0) = 0, \ldots, g_{(0)}^{(n-1)} = 0,\ g_{(0)}^{(n)} = (n-1)!,$$

удовлетворяющих условию

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1-2z^n\cos\Theta + z^{2n}}{z^{n-1}} g'(z)\right) > \alpha, \quad 0 \le \Theta \le \pi. \tag{1}$$

Поскольку функция

$$\varphi_n(z) = \int_0^z (1-2\zeta^n\cos\Theta + \zeta^{2n})^{-1}\zeta^{n-1}\,d\zeta$$

принадлежит классу выпуклых функций, то функции класса τ_α^n являются подклассом почти выпуклых функций [1] и, следовательно, однолистны при $n = 1$.

При $n = 1$ функция $\psi(z) = g(iz)/i$ удовлетворяет неравенству

$$\operatorname{Re}\left[(1-2iz\cos\Theta - z^2)\psi'(z)\right] > \alpha.$$

Отсюда при $\Theta = \pi/2$ получаем подкласс Q_α почти выпуклых функций $w = \psi(z)$, $\psi(0) = 0$, $\psi'(0) = 1$, определяемых условием $\operatorname{Re}\left[(1-z^2)\psi'(z)\right] > \alpha$.

Заметим, что $Q_\alpha \subset Q_0$, а класс Q_0 совпадает с классом выпуклых по направлению мнимой оси функций [2].

Рассмотрим класс U_α регулярных в E функций $w = F(z)$, $F(0) = 0$, $F'(0) = 1$, таких, что $F(z) = z\psi'(z)$, где функция $\psi(z) \in Q_\alpha$. Заметим, что $U_\alpha \subset U_0$ и U_0 совпадает с классом типично вещественных функций, для которых радиус звездности найден Либера методом Робертсона [3, 4].

Из (1) имеем

$$g'(z) = z^{n-1}\frac{p(z)+h}{(1+h)(1-2z^n\cos\Theta+z^{2n})}, \qquad h=\frac{\alpha}{1-\alpha}, \tag{2}$$

где $p(z)$ принадлежит P — классу регулярных в E функций, удовлетворяющих в E условиям: $p(0)=1$, $\operatorname{Re}p(z)>0$.

Будем рассматривать класс O_n^α регулярных в E функций

$$w = s(z), \quad s(0)=0, \quad s'(0)=0, \quad s''(0)=0, \dots, s_{(0)}^{(n-1)}=0, \quad s_{(0)}^{(n)}=n!,$$

таких, что

$$s(z) = zg'(z), \qquad g(z)\in \tau_\alpha^n. \tag{3}$$

Установим точные границы выпуклости в классе τ_α^n. Для функций класса τ_α^n находим

$$\operatorname{Re}\left(1+\frac{zg''(z)}{g'(z)}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{zp'(z)}{p(z)+h} + n\frac{1-z^{2n}}{1-2z^n\cos\Theta+z^{2n}}\right). \tag{4}$$

Положим

$$T_\alpha(r) = \min_{p(z)\in P}\min_{|z|=r}\operatorname{Re}\left(\frac{zp'(z)}{p(z)+h} + n\frac{1-z^{2n}}{1-2z^n\cos\Theta+z^{2n}}\right).$$

Тогда радиус выпуклости определяется наименьшим положительным корнем уравнения $T_\alpha(r)=0$.

Пусть подкласс $p_2\subset P$ состоит из функций вида

$$p(z) = \lambda_1\frac{1+ze^{-it_1}}{1-ze^{-it_1}} + \lambda_2\frac{1+ze^{-it_2}}{1-ze^{-it_2}},$$

t_1 и t_2 — произвольные вещественные числа, а неотрицательные λ_1 и λ_2 удовлетворяют условию $\lambda_1+\lambda_2=1$.

Известно [5], что минимум (4) достигается в p_2. Используя [5], имеем

$$\min\operatorname{Re}\left[\frac{zp'(z)}{p(z)+h} + \frac{(1-z^{2n})n}{1-2z^n\cos\Theta+z^{2n}}\right] =$$

$$= \min\operatorname{Re}\left[\frac{p^2-1}{2(p+h)} + \frac{(\rho^2-\rho_0^2)}{2(p+h)} + \frac{(1-z^{2n})n}{1+2z^n-2z^n\cos\Theta}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(p + h - \frac{1-h^2}{p+h} - \frac{\rho^2-\rho_0^2}{|p+h|} - h + n(a_n+\rho_n|\cos\Theta|)^{-1}\right), \tag{5}$$

$$\rho = \frac{2r}{1+r^2}, \quad a = \frac{1+r^2}{1-r^2}, \quad \rho_0 = |p+h-(a+h)|, \quad \rho_n = \frac{2r^n}{1-r^{2n}},$$

где

$$a_n = \frac{1+r^{2n}}{1-r^{2n}}, \qquad \frac{1+z^{2n}}{1-z^{2n}} = a_n+\rho_n e^{i\nu}, \quad -\pi\le\nu\le\pi, \quad r=|z|, \quad z\in E.$$

Обозначим $p+h=Re^{i\omega}$, тогда (5) перепишем в виде

$$\min \operatorname{Re}\left(\frac{zp'(z)}{p(z)+h} + \frac{(1-z^{2n})'n}{1+2z^{2n}-2z^n\cos\Theta} \right) = B + n(a_n + \rho_n|\cos\Theta|)^{-1},$$

где

$$B = \frac{\cos\omega}{2}\left(R - \frac{1-h^2}{R}\right) + \frac{1}{2R}(h^2+2ah+1+R^2-2R(a+h)\cos\omega)+h.$$

Таким образом, задача свелась к нахождению минимума величины $B + n(a_n+\rho_n|\cos\Theta|)^{-1}$ в круге $|Re^{i\omega}-(a+h)|\le\rho$.

Покажем, что минимум величины B в круге $|Re^{i\omega}-(a+h)|\le\rho$ достигается при $\omega = 0$. Находим

$$\frac{\partial B}{\partial\omega} = \frac{\sin\omega}{2}\left(-R + \frac{1-h^2}{R} + 2(a+h)\right).$$

Так как $-R+(1-h^2)/R+2(a+h)>0$ при $R\in[a-\rho+h,\ a+\rho+h]$, минимум B в круге $|Re^{i\omega}-(a+h)|\le\rho$ достигается при $\omega=0$. Имеем

$$B_0 = [B+n(a_n+\rho_n|\cos\Theta|)^{-1}]_{\omega=0} =$$

$$= R + \frac{h^2+ah}{R} - a - 2h + n(a_n+\rho_n|\cos\Theta|)^{-1}. \tag{6}$$

Величина (6) при $R=R_1$, $R_1=\sqrt{h^2+ah}$, имеет минимум.

Итак, получаем уравнение для определения радиуса выпуклости

$$2\sqrt{h^2+ah} - a - 2h + n(a_n+|\rho_n\cos\Theta|)^{-1} = 0. \tag{7}$$

Так как функция $\eta_1 = a+2h-2\sqrt{h^2+ah}$ монотонно возрастает при $r\in(0;1)$, $h\ge 0$, а функция $\eta_2 = n(a_n+\rho_n|\cos\Theta|)^{-1}$ монотонно убывает при $r\in(0;1)$, $\Theta\in[0;\pi]$, то уравнение (7) имеет единственный корень.

Выясним, когда $R_1\in[a-\rho+h,\ a+\rho+h]$. Для этого рассмотрим разности $a+\rho+h-R_1$, $a-\rho+h-R_1$. Из них следует, что если $(a-\rho)^2+h(a-2\rho)<0$, то $R_1\in[a-\rho+h,\ a+\rho+h]$, а если $(a-\rho)^2+h(a-2\rho)>0$, то $R_1\notin[a-\rho+h,\ a+h+\rho]$. Если $R_1\in[a-\rho+h,\ a+\rho+h]$, то радиус выпуклости определяется уравнением (7). Если $R_1\notin[a-\rho+h,\ a+\rho+h]$, то радиус выпуклости достигается в точке $R=a-\rho+h$. Следовательно, в этом случае радиус выпуклости определяется из уравнения

$$\rho(a-\rho)(a-\rho+h)^{-1} - n(a_n+\rho_n|\cos\Theta|)^{-1} = 0. \tag{8}$$

Аналогично можно убедиться, что уравнение (8) имеет единственный корень.

Итак, радиус выпуклости $r^0(h;\Theta)$ определяется либо уравнением (7), либо (8). Можно убедиться, что сначала следует пользоваться уравнением (8), а затем — (7). Переходное значение $h_0(\Theta)$ определяется наименьшим положительным корнем системы из уравнений (7) и (8).

Окончательно получаем следующую теорему.

Теорема 1. *При отображении функциями $g(z)\in\tau_\alpha^n$ радиус выпуклости $r_n^0(h;\Theta)$ вычисляется по формулам*

$$r_n^0(h;\Theta) = \sqrt{(a_n^0-1)(a_n^0+1)},$$

причем при $h < h_0(\Theta)$ a_n^0 *— единственный больший единицы корень уравнения* (8), *а при* $h \geq h_0(\Theta)$ a_n^0 *— единственный больший единицы корень уравнения* (7).

Рассмотрим частный случай: $n = 1$, $\Theta = \pi/2$. Тогда уравнение (7) принимает вид

$$a^4 - 2a^2 - 4ha + 1 = 0, \tag{9}$$

а уравнение (8) —

$$a^4 - 2ha^3 - 4ha + 1 = 0. \tag{10}$$

Радиус выпуклости $r_1^0(h; \pi/2)$ определяется сначала уравнением (10), а затем — уравнением (9). Переходное значение $h_0(\pi/2)$, $0{,}2086 \ldots < h_0(\pi/2) < 0{,}2428 \ldots$ определяется из системы уравнений (9), (10).

Заметим, что радиус выпуклости $r_1^0(h; \pi/2)$ является монотонно возрастающей функцией, удовлетворяющей неравенствам

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}+1-\sqrt{2(\sqrt{5}+1)}\right) \leq r_1^0(h; \pi/2) \leq 0{,}444 \ldots \quad \text{для} \quad h \leq h_0(\pi/2),$$

$$0{,}444 \ldots < r_1^0(h; \pi/2) < 1 \quad \text{при} \quad h > h_0(\pi/2).$$

При $n = 1$, $\Theta = \pi/2$, $h = 0$ уравнение (8) принимает вид $a\rho - 1 = 0$ или $r^4 - 2r^3 - 2r^2 - 2r + 1 = 0$. Отсюда

$$r_1^0(0; \pi/2) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5}+1-\sqrt{2(\sqrt{5}+1)}\right).$$

Учитывая соотношение

$$\operatorname{Re}\left(1+\frac{zg''(z)}{g'(z)}\right) = \operatorname{Re}\left(z\frac{s'(z)}{s(z)}\right), \quad g(z) \in \tau_\alpha^n, \quad s(z) \in O_\alpha^n,$$

получаем, что при отображении функциями класса O_α^n радиус звездности $r_n^*(h; \Theta)$ равен радиусу выпуклости $r_n^0(h; \Theta)$ из теоремы 1.

Экстремальные функции, реализующие точные оценки радиусов выпуклости и звездности, определяются аналогично [5].

1. *Kaplan W.* Close-to-convex schlicht functions // Michigan Math. J. – 1952. – **1**, № 2. – P. 169–185.
2. *Robertson M. S.* Analytic functions starlike in one direction // Amer. J. Math. – 1936. – **58**, № 3. – P. 465–472.
3. *Libera R. J.* Radius of convexity problems // Duke Math. J. – 1964. – **31**, № 1. – P. 143–158.
4. *Robertson M. S.* Extremal problems for analytic functions with positive real part and applications // Trans. Amer. Math. Soc. – 1963. – **106**, № 2. – P. 236–259.
5. *Зморович В. А.* О границах выпуклости звездных функций порядка α в круге $\|z\| < 1$ и круговой области // Мат. сб. – 1965. – **68**, № 4. – С. 518–526.

Получено 03.01.95