УДК 517.5

Г. В. Радзиевский (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

МОДУЛИ НЕПРЕРЫВНОСТИ, ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ПО НУЛЕВОМУ ПРОДОЛЖЕНИЮ ФУНКЦИИ, И K-ФУНКЦИОНАЛЫ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ*

We consider the following K-functional:

$$K(\delta, f)_p := \sup_{g \in W^r_{p,U}} \left\{ \|f-g\|_{L_p} + \delta \sum_{j=0}^{r} \|g^{(j)}\|_{L_p} \right\}, \quad \delta \geq 0,$$

where $f \in L_p := L_p[0,1]$ and $W^r_{p,U}$ is the subspace of the Sobolev space $W^r_p[0,1]$, $1 \leq p \leq \infty$, which consists of functions g such that $\int_0^1 g^{(l_j)}(\tau)\, d\sigma_j(\tau) = 0$, $j = 1, \ldots, n$. Assume that $0 \leq l_1 \leq \ldots$ $\ldots \leq l_n \leq r-1$ there is at least one point τ_j of jump for each function σ_j, and if $\tau_j = \tau_s$ for $j \neq s$, then $l_j \neq l_s$. Let $\hat{f}(t) = f(t)$, $0 \leq t \leq 1$, let $\hat{f}(t) = 0$, $t < 0$, and let the modulus of continuity of the function f be given by the equality

$$\hat{\omega}_0^{[l]}(\delta, f)_p := \sup_{0 \leq h \leq \delta} \left\| \sum_{j=0}^{l} (-1)^j \binom{l}{j} \hat{f}(\cdot - hj) \right\|_{L_p}, \quad \delta \geq 0.$$

We obtain the estimates $K(\delta^r, f)_p \leq c\hat{\omega}_0^{[l_1]}(\delta, f)_p$ and $K(\delta^r, f)_p \leq c\hat{\omega}_0^{[l_1+1]}(\delta^\beta, f)_p$, where $\beta = (pl_1 + 1)/p(l_1+1)$, and the constant $c > 0$ does not depend on $\delta > 0$ and $f \in L_p$. We also establish some other estimates for the considered K-functional.

Розглядається K-функціонал вигляду

$$K(\delta, f)_p := \sup_{g \in W^r_{p,U}} \left\{ \|f-g\|_{L_p} + \delta \sum_{j=0}^{r} \|g^{(j)}\|_{L_p} \right\}, \quad \delta \geq 0,$$

де $f \in L_p := L_p[0,1]$, а $W^r_{p,U}$ — підпростір простору Соболева $W^r_p[0,1]$, $1 \leq p \leq \infty$, що складається з функцій g, для яких $\int_0^1 g^{(l_j)}(\tau)\, d\sigma_j(\tau) = 0$, $j = 1, \ldots, n$. Припускається, що $0 \leq$ $\leq l_1 \leq \ldots \leq l_n \leq r-1$ та для кожної функції σ_j існує хоча б один стрибок τ_j, і, якщо $\tau_j = \tau_s$ при $j \neq s$, то $l_j \neq l_s$. Для l-го модуля неперервності функції f, заданого рівністю

$$\hat{\omega}_0^{[l]}(\delta, f)_p := \sup_{0 \leq h \leq \delta} \left\| \sum_{j=0}^{l} (-1)^j \binom{l}{j} \hat{f}(\cdot - hj) \right\|_{L_p}, \quad \delta \geq 0,$$

де $\hat{f}(t) = f(t)$, $0 \leq t \leq 1$, і $\hat{f}(t) = 0$, $t < 0$, знайдено оцінки $K(\delta^r, f)_p \leq c\hat{\omega}_0^{[l_1]}(\delta, f)_p$ і $K(\delta^r, f)_p \leq c\hat{\omega}_0^{[l_1+1]}(\delta^\beta, f)_p$, в яких $\beta = (pl_1+1)/p(l_1+1)$, а стала $c > 0$ не залежить від $\delta > 0$ і $f \in L_p$. Одержано також інші оцінки цього K-функціонала.

1. Постановка задачи и формулировка основного результата. Далее, если не оговорено противное, то считаем n и r натуральными, а m — целым неотрицательным числом, $1 \leq p \leq \infty$. Для $-\infty \leq a < b \leq \infty$ функциональные пространства $C^r[a,b]$, $L_p[a,b]$, и $W^r_p[a,b]$ — это соответственно пространства r раз непрерывно дифференцируемых функций, пространства Лебега и Соболева функций, заданных на отрезке $[a,b]$, причем, как обычно, $C[a,b] :=$ $:= C^0[a,b]$. Через $V[a,b]$ обозначаем множество функций ограниченной вариации, определенных на $[a,b]$ и непрерывных справа на (a,b), снабженное полунормой, совпадающей с полной вариацией функции на $[a,b]$. В случае, когда $a = 0$ и $b = 1$, тогда $C^r := C^r[0,1]$, $C := C[0,1]$, $L_p := L_p[0,1]$, $V :=$

* Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда фундаментальных исследований при Государственном комитете Украины по вопросам науки и технологий.

$:= V[0,1]$ и $W_p^r := W_p^r[0,1]$. Норма (или полунорма) векторов обозначается через $\|\cdot\|$ и снабжается индексом, обозначающим соответствующее нормированное (или полунормированное) пространство. Отметим, что специальное обозначение $\|\cdot\|_p$ применяется лишь для нормы в пространстве L_p.

Сформулируем постановку задачи, изучаемую в данной работе.

Пусть $U_1, \ldots, U_n$ — линейные непрерывные функционалы на пространстве W_p^r, а подпространство $W_{p,U}^r$ определено соотношением

$$W_{p,U}^r := \{g \in W_p^r \colon U_1(g) = \ldots = U_n(g) = 0\}. \tag{1}$$

Тогда при $m \le r$ равенством

$$K_m(\delta, f; L_p, W_{p,U}^r) :=$$

$$:= \inf_{g \in W_{p,U}^r} \left\{ \|f-g\|_p + \delta \sum_{j=r-m}^{r} \|g^{(j)}\|_p \right\}, \quad \delta \ge 0, \quad f \in L_p, \tag{2}$$

задается K-функционал. Очевидно, что

$$K_m(\delta, f; L_p, W_{p,U}^r) \le K_{m_1}(\delta, f; L_p, W_{p,U}^r), \quad m \le m_1, \quad \delta \ge 0, \quad f \in L_p. \tag{3}$$

Отметим одно общее свойство K-функционала (2) (см. утверждение из п. 1.3.1 в [1]).

Утверждение 1. *Для любой фиксированной функции $f \in L_p$ функционал (2) является неубывающей и выпуклой вверх функцией по $\delta \in [0, \infty)$. При фиксированном $\delta \ge 0$ этот K-функционал является ограниченной полунормой на пространстве L_p и, в частности,*

$$K_m(\delta, f_1 + f_2; L_p, W_{p,U}^r) \le K_m(\delta, f_1; L_p, W_{p,U}^r) + K_m(\delta, f_2; L_p, W_{p,U}^r),$$
$$f_1, f_2 \in L_p,$$

$$K_m(\delta, f; L_p, W_{p,U}^r) \le \|f\|_p, \quad f \in L_p. \tag{4}$$

Введенный K-функционал (2) возникает при оценке скорости сходимости разложений по собственным и присоединенным функциям операторов, порожденных краевыми задачами для функционально-дифференциальных выражений [2–4]. Заметим, что функционалы U_j, входящие в определение пространства $W_{p,U}^r$, задают часть или все краевые условия этих краевых задач.

Данная работа посвящена оценкам K-функционала (2) через разностные характеристики (т. е. модули непрерывности) функции $f \in L_p$, связанные с ее нулевым продолжением $\hat{f}$ на всю числовую ось

$$\hat{f}(t) = f(t), \quad 0 \le t \le 1, \qquad \hat{f}(t) = 0, \quad \text{если} \quad t < 0 \quad \text{или} \quad t > 1. \tag{5}$$

Введем используемые далее модули непрерывности. Пусть h — вещественное число, а

$$(\Delta_h^r \hat{f})(t) = \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \binom{r}{j} \hat{f}(t - hj). \tag{6}$$

Тогда равенствами

$$\hat{\omega}_0^{[r]}(\delta, f)_p := \sup_{0 \le h \le \delta} \|\Delta_h^r \hat{f}\|_p, \quad \delta \ge 0, \quad f \in L_p, \tag{7}$$

$$\hat{\omega}_1^{[r]}(\delta, f)_p := \sup_{-\delta \le h \le 0} \|\Delta_h^r \hat{f}\|_p, \quad \delta \ge 0, \quad f \in L_p, \tag{8}$$

$$\hat{\omega}^{[r]}(\delta, f)_p := \sup_{-\delta \le h \le \delta} \|\Delta_h^r \hat{f}\|_p, \quad \delta \ge 0, \quad f \in L_p, \tag{9}$$

вводятся модули непрерывности порядка r функции f в метрике L_p. При этом символ $\|\Delta_h^r \hat{f}\|_p$ означает норму в пространстве L_p сужения функции $\Delta_h^r \hat{f}$ на отрезок $[0, 1]$. Аналогичные обозначения применяются и в других случаях, если они не вызывают недоразумений. Далее удобно также пользоваться следующими естественными обозначениями:

$$\hat{\omega}_0^{[0]}(\delta, f)_p = \hat{\omega}_1^{[0]}(\delta, f)_p = \hat{\omega}^{[0]}(\delta, f)_p := \|f\|_p, \quad \delta \ge 0, \quad f \in L_p, \tag{10}$$

так как, если считать в определении (6) r-й разности $r = 0$, то получаем равенство $\Delta_h^0 \hat{f} = \hat{f}$, а $\|\hat{f}\|_p = \|f\|_p$.

Отметим, что на самом деле в определении (7) модуля непрерывности $\hat{\omega}_0^{[r]}(\delta, f)_p$ участвует лишь продолжение нулем функции f на полуось $t < 0$, а в определении (8) модуля непрерывности $\hat{\omega}_1^{[r]}(\delta, f)_p$ — продолжение нулем функции f на полуось $t > 1$. Кроме того, из определений (7) – (9) следует равенство

$$\hat{\omega}^{[r]}(\delta, f)_p = \max\{\hat{\omega}_0^{[r]}(\delta, f)_p, \hat{\omega}_1^{[r]}(\delta, f)_p\}, \quad \delta \ge 0, \quad f \in L_p. \tag{11}$$

Модули непрерывности (7) – (9) отличаются друг от друга. Например, простые вычисления показывают (см. аналогичные вычисления в замечании 3 п. 2) справедливость следующих соотношений:

$$\hat{\omega}_0^{[r]}(\delta, t^r)_p \asymp \delta^r, \quad \hat{\omega}_1^{[r]}(\delta, t^r)_p \asymp \delta^{1/p}, \quad 0 \le \delta \le 1,$$

а значит, ввиду равенства (11) $\hat{\omega}^{[r]}(\delta, t^r)_p \asymp \delta^{1/p}$, $0 \le \delta \le 1$, кроме того,

$$\hat{\omega}_0^{[r]}(\delta, (1-t)^r)_p \asymp \delta^{1/p}, \quad \hat{\omega}_1^{[r]}(\delta, (1-t)^r)_p \asymp \delta^r, \quad 0 \le \delta \le 1,$$

т. е. $\hat{\omega}^{[r]}(\delta, (1-t)^r)_p \asymp \delta^{1/p}$, $0 \le \delta \le 1$. Здесь символ $\omega(\delta) \asymp \delta^\alpha$, $0 \le \delta \le 1$, с $\alpha \ge 0$ означает существование таких положительных постоянных c_1 и c_2, для которых $c_1 \delta^\alpha \le \omega(\delta) \le c_2 \delta^\alpha$, $0 \le \delta \le 1$.

Основной результат данной работы относится к случаю, когда функционалы U_j, входящие в определение (1) пространства $W_{p,U}^r$, а следовательно, и в определение (2) K-функционала, имеют вид

$$U_j(g) = \int_0^1 g^{(l_j)}(\tau)\, d\sigma_j(\tau) + \sum_{k < l_j} c_{j,k}\, g^{(k)}(0), \quad g \in C^{l_j}, \quad j = 1, \dots, n, \tag{12}$$

где l_j и $c_{j,k}$ — соответственно целые неотрицательные и комплексные числа, причем $l_j \le r - 1$, функции $\sigma_j \in V$, а сумма $\sum_{k < l_j}$ считается равной нулю, если $l_j = 0$. Далее будем предполагать, что числа l_j пронумерованы в порядке неубывания, т. е.

$$0 \le l_1 \le \dots \le l_n \le r - 1. \tag{13}$$

Отметим, что равенство (12) задает общий вид линейного непрерывного функционала (см., например, [5, с. 374]) на пространстве C^{l_j}. Кроме того, с учетом вложения пространства W_p^r, $1 \le p \le \infty$, в пространства C^{l_j} (см., например, [6, с. 31–32]) все функционалы U_j являются ограниченными функционалами на пространстве W_p^r. Поэтому для функционалов (12) корректно определен K-функционал (2).

Точка $\tau_0 \in [0, 1]$ называется точкой скачка функции $\sigma \in V$, если $\sigma(\tau_0) - \sigma(\tau_0 - 0) \ne 0$ при $\tau_0 > 0$ и $\sigma(\tau_0) - \sigma(\tau_0 + 0) \ne 0$ при $\tau_0 = 0$.

Теорема. *Пусть функционалы U_j заданы равенствами* (12), *а числа l_j и функции σ_j, входящие в их определение, удовлетворяют следующему требованию: у каждой функции σ_j, $j = 1, \dots, n$, имеется хотя бы одна точка скачка τ_j, причем в случае $\tau_j = \tau_s$ при $j \ne s$ предполагается, что $l_j \ne l_s$. Тогда найдется такая постоянная $c > 0$, не зависящая от p, что для всех $\delta > 0$ и функций $f \in L_p$ справедливы оценки*

$$K_r(\delta^r, f; L_p, W_{p,U}^r) \le c \min\{\hat{\omega}_0^{[l_1]}(\delta, f)_p, \hat{\omega}_1^{[l_1]}(\delta, f)_p\}, \tag{14}$$

$$K_r(\delta^r, f; L_p, W_{p,U}^r) \le$$

$$\le c \min\{\hat{\omega}_0^{[l_1+1]}(\delta^{(pl_1+1)/p(l_1+1)}, f)_p, \hat{\omega}_1^{[l_1+1]}(\delta^{(pl_1+1)/p(l_1+1)}, f)_p\}, \tag{15}$$

где $\delta^{(pl_1+1)/p(l_1+1)} := \delta^{l_1/(l_1+1)}$ *при* $p = \infty$.

Далее в замечании 3 будет показано, что обе эти оценки отличаются друг от друга и существуют функции f, для которых оценка (14) лучше оценки (15) и напротив — оценка (15) лучше оценки (14).

Утверждения теоремы устанавливают оценки сверху K-функционала (2) с подпространством $W_{p,U}^r$, выделяемым из пространства W_p^r с помощью функционалов U_j вида (12), через модули непрерывности (7) или (8). Оказывается, что существуют такие пространства $W_{p,U}^r$, заданные с помощью функционалов вида (12), для которых модули непрерывности (7) – (9) дают уже их двусторонние оценки. Чтобы показать это, определим пространства

$$\hat{W}_{p,0}^r := \{g \in W_p^r : g(0) = \ldots = g^{(r-1)}(0) = 0\},$$

$$\hat{W}_{p,1}^r := \{g \in W_p^r : g(1) = \ldots = g^{(r-1)}(1) = 0\},$$

$$\hat{W}_p^r := \hat{W}_{p,0}^r \cap \hat{W}_{p,1}^r.$$

Утверждение 2. *Для любых $\delta \in (0, \infty)$, $m = 0, \dots, r$ и функций $f \in L_p$ выполнены оценки*

$$2^{-r}\hat{\omega}_0^{[r]}(2\delta, f)_p \le K_m(\delta^r, f; L_p, W_{p,0}^r) \le (e+1)\, r^r \hat{\omega}_0^{[r]}(2\delta/r, f)_p, \tag{16}$$

$$2^{-r}\hat{\omega}_1^{[r]}(2\delta, f)_p \le K_m(\delta^r, f; L_p, \hat{W}_{p,1}^r) \le (e+1)\, r^r \hat{\omega}_1^{[r]}(2\delta/r, f)_p, \tag{17}$$

$$2^{-r}\hat{\omega}^{[r]}(2\delta, f)_p \le K_m(\delta^r, f; L_p, \hat{W}_p^r) \le (e+1)\, 2^{r+1} \hat{\omega}^{[r]}(2r^2\delta, f)_p. \tag{18}$$

***Следствие* 1.** *Пусть в определении* (1) *подпространства $W_{p,U}^r$ функционалы U_j имеют вид*

$$U_j(g) = \sum_{k=0}^{r-1} \left(a_{j,k}\, g^{(k)}(0) + b_{j,k}\, g^{(k)}(1)\right), \quad g \in C^{r-1}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Тогда для K-функционала (2) *справедлива оценка*

$$K_r(\delta^r, f; L_p, W^r_{p,U}) \le (e+1)\, 2^{r+1} \hat{\omega}^{[r]}(2r^2\delta, f)_p, \quad \delta > 0, \quad f \in L_p.$$

Действительно, введенное в следствии 1 подпространство $W^r_{p,U}$ содержит подпространство $\hat{W}^r_p$. Поэтому согласно определению (2) K-функционала справедливо неравенство $K_r(\delta, f; L_p, W^r_{p,U}) \le K_r(\delta, f; L_p, \hat{W}^r_p)$, из которого с учетом второй оценки в (18) получаем утверждение следствия 1.

Остановимся кратко на структуре работы. В п. 2 приведены используемые в доказательстве теоремы и утверждения 2 свойства K-функционала (2) и модулей непрерывности (7) – (9). Оказывается, что введенные здесь модули непрерывности имеют не только обычные свойства известных ранее модулей непрерывности, но и ряд специфических характеристик. Попутно в п. 2 приведено также доказательство утверждения 2 и установлены некоторые следствия из теоремы. В частности, дано достаточное условие всюду плотности вложения пространства $W^r_{p,U}$ в пространство L_p при $1 \le p < \infty$. Кроме того, в замечании 2 пояснено существенность требования, которому должны удовлетворять точки скачков функций σ_j из теоремы. П. 3 посвящен доказательству теоремы, базирующемуся на лемме 1, которая позволяет свести получение оценок K-функционалов с ограничениями (т. е. при наличии функционалов U_j в определении пространства $W^r_{p,U}$) к аналогичным оценкам для специального вида K-функционалов без ограничений (т. е. к случаю, когда нижняя грань в (2) находится по всему пространству W^r_p).

2. О некоторых свойствах модулей непрерывности и K-функционала. Установим свойства модулей непрерывности (7) – (9) и K-функционала (2), которые потребуются при доказательстве теоремы и утверждения 2.

1. *Пусть функция f^- задана по функции $f \in L_p$ равенством $f^-(t) = f(1-t)$. Тогда*

$$\hat{\omega}^{[r]}_0(\delta, f)_p = \hat{\omega}^{[r]}_1(\delta, f^-)_p, \quad \hat{\omega}^{[r]}_1(\delta, f)_p = \hat{\omega}^{[r]}_0(\delta, f^-)_p, \tag{19}$$

$$\hat{\omega}^{[r]}(\delta, f)_p = \max\{\hat{\omega}^{[r]}_0(\delta, f)_p, \hat{\omega}^{[r]}_0(\delta, f^-)_p\}. \tag{20}$$

Равенства (19) являются непосредственным следствием определений (7) и (8), а равенство (20) получается из (11) и (19).

Свойство 1 позволяет свести доказательства сформулированных далее свойств модулей непрерывности $\hat{\omega}^{[r]}_0(\delta, f)_p$, $\hat{\omega}^{[r]}_1(\delta, f)_p$ и $\hat{\omega}^{[r]}(\delta, f)_p$ к выводу этих же свойств лишь для модуля непрерывности $\hat{\omega}^{[r]}_0(\delta, f)_p$, что и будет сделано в этом пункте без дополнительных пояснений. Кроме того, так как в определении (7) модуля непрерывности $\hat{\omega}^{[r]}_0(\delta, f)_p$ участвует r-я разность с шагом $h \ge 0$, то далее, если не оговорено противное, везде считаем $h \ge 0$.

Для краткости в формулировках свойств 2 – 6 через $\omega^{[r]}(\delta, f)_p$ обозначен один из модулей непрерывности $\hat{\omega}^{[r]}_0(\delta, f)_p$, $\hat{\omega}^{[r]}_1(\delta, f)_p$ или $\hat{\omega}^{[r]}(\delta, f)_p$.

2. *При фиксированном $\delta \in (0, \infty)$ модуль непрерывности является неубывающей функцией по $\delta \in [0, \infty)$, т. е. $\omega^{[r]}(\delta, f)_p \le \omega^{[r]}(\delta_1, f)_p$, $0 \le \delta \le \delta_1 < \infty$.*

3. *Модуль непрерывности является полунормой на пространстве L_p и, в частности, справедливо неравенство треугольника*

$$\omega^{[r]}(\delta, f_1 + f_2)_p \le \omega^{[r]}(\delta, f_1)_p + \omega^{[r]}(\delta, f_2)_p, \quad f_1, f_2 \in L_p.$$

Свойства 2 и 3 непосредственно вытекают из определений (7) – (9).

4. *Модуль непрерывности высшего порядка оценивается через модуль непрерывности низшего порядка по правилу* $\omega^{[r]}(\delta, f)_p \le 2\omega^{[r-1]}(\delta, f)_p$ *и, в частности,* $\omega^{[r]}(\delta, f)_p \le 2^r \|f\|_p$.

Действительно, из определения (5) функции $\hat{f}$ заключаем, что функция $(\Delta_h^{r-1}\hat{f})(t-h)$ равна нулю при $0 \le t < h$ и поэтому $\|(\Delta_h^{r-1}\hat{f})(\cdot - h)\|_p \le \le \|\Delta_h^{r-1}\hat{f}\|_p$, откуда и из равенства $(\Delta_h^r \hat{f})(t) = (\Delta_h(\Delta_h^{r-1}\hat{f}))(t) = (\Delta_h^{r-1}\hat{f})(t) - - (\Delta_h^{r-1}\hat{f})(t-h)$ вытекает свойство 4.

5. *Натуральный множитель* s *аргумента* δ *выносится за знак модуля непрерывности по правилу* $\omega^{[r]}(s\delta, f)_p \le s^r \omega^{[r]}(\delta, f)_p$.

Действительно, из тождества (см., например, [7, с. 158], свойство 2)

$$(\Delta_{hs}^r \hat{f})(t) = \sum_{j_1=0}^{s-1} \ldots \sum_{j_r=0}^{s-1} (\Delta_h^r \hat{f})(t - h(j_1 + \ldots + j_r))$$

и неравенства $\|(\Delta_h^r \hat{f})(\cdot - h(j_1 + \ldots + j_r))\|_p \le \|\Delta_h^r \hat{f}\|_p$, которое было пояснено при выводе свойства 4, вытекает свойство 5.

6. *При* $1 \le p < \infty$ *модуль непрерывности является непрерывной в нуле функцией, т. е.* $\lim\limits_{\delta \searrow 0} \omega^{[r]}(\delta, f)_p = 0$, $f \in L_p$.

Действительно, согласно свойствам 3 и 4 это утверждение достаточно установить лишь для первого модуля непрерывности и для функций, линейная оболочка которых всюду плотна в пространстве L_p. Но если $f_{(a,b)}$ — характеристическая функция произвольного интервала $(a, b) \subset [0, 1]$, то для нее $\omega^{[1]}(\delta, f_{(a,b)})_p \asymp \delta^{1/p}$, $0 \le \delta \le 1$. Отсюда следует свойство 6.

Отметим, что на самом деле функция $\omega^{[r]}(\delta, f)_p$ непрерывна по $\delta \ge 0$ для каждой функции $f \in L_p$ при $1 \le p < \infty$. Это свойство модуля непрерывности проще всего установить, используя доказательство соответствующего свойства для обычных модулей непрерывности из книги [8, с. 23], с учетом свойства 6.

Из теоремы и свойства 6 выведем такое утверждение.

***Следствие* 2.** *Пусть функционалы* U_j *заданы равенством* (12), *а числа* l_j *и функции* σ_j, *входящие в их определение, удовлетворяют требованию теоремы. Тогда множество* $W_{p,U}^r$, *определенное соотношением* (1) *при* $1 \le p < \infty$, *плотно вложено в пространство* L_p.

Доказательство. Из определения (2) K-функционала и из утверждения 1 следует неравенство

$$\inf_{g \in W_{p,U}^r} \|f - g\|_p \le \lim_{\delta \searrow 0} K_r(\delta, f; L_p, W_{p,U}^r), \quad f \in L_p.$$

А из утверждения (15) теоремы и из свойства 6 выводится равенство нулю величины, стоящей в правой части этого неравенства. Значит, множество $W_{p,U}^r$ плотно вложено в пространство L_p.

Замечания. 1. Для справедливости следствия 2 требование $p < \infty$ существенно. Действительно, если, например, один из функционалов $U_j(g) = = g(1/2)$, то функцию f, равную 1 на $[0, 1]$, нельзя приблизить как угодно близко по норме пространства L_∞ функциями g из W_∞^r, для которых $g(1/2) = 0$. Т. е. в общем случае, даже когда выполнено требование следствия 2, но $p = \infty$, множество $W_{\infty,U}^r$ неплотно вложено в пространство L_∞.

2. Требование теоремы и следствия 2 относительно чисел l_j и точек скачков функции σ_j в определенном смысле существенны для справедливости этих утверждений. Покажем это в случае, когда $p<\infty$, а во множестве функционалов U_j имеется два функционала вида $U_s(g)=\int_0^1 g(\tau)\,d\sigma_s(\tau)$, $s=1,2$, причем точки скачков у функций σ_1 и σ_2 одни и те же. Если в этом случае функция $\sigma_1-\sigma_2$ абсолютно непрерывна, а ее производная, обозначенная через w, принадлежит пространству L_q при $q=p/(p-1)$, то тогда множество $W^r_{p,U}$ принадлежит подпространству

$$L_{p,w}=\left\{f\in L_p\colon \int\limits_0^1 f(\tau)\,w(\tau)\,d\tau=0\right\}.$$

Значит, множество $W^r_{p,U}$ неплотно вложено в L_p. В указанных здесь предположениях относительно функционалов U_j оценка (15) из теоремы не выполняется. Действительно, для произвольной функции $f\notin L_{p,w}$ левая часть в (15) отделена от нуля при $\delta\geq 0$, а правая часть согласно свойству 6 стремится к нулю при $\delta\searrow 0$.

7. *Модуль непрерывности гладкой функции оценивается через модуль непрерывности ее производной по следующим правилам.*

7а. *Если для некоторого натурального числа* $s\leq r$ *функция* $f\in\hat W^s_{p,0}$, *то* $\hat\omega_0^{[r]}(\delta,f)_p\leq\delta^s\,\hat\omega_0^{[r-s]}(\delta,f^{(s)})_p$ *и, в частности, если* $f\in\hat W^r_{p,0}$, *то* $\hat\omega_0^{[r]}(\delta,f)_p\leq\delta^r\|f^{(r)}\|_p$.

7б. *Если для некоторого натурального числа* $s\leq r$ *функция* $f\in\hat W^s_{p,1}$, *то* $\hat\omega_1^{[r]}(\delta,f)_p\leq\hat\omega_1^{[r-s]}(\delta,f^{(s)})_p$ *и, в частности, если* $f\in\hat W^r_{p,1}$, *то* $\hat\omega_1^{[r]}(\delta,f)_p\leq\delta^r\|f^{(r)}\|_p$.

7в. *Если для некоторого натурального числа* $s\leq r$ *функция* $f\in\hat W^s_p$, *то* $\hat\omega^{[r]}(\delta,f)_p\leq\delta^s\hat\omega^{[r-s]}(\delta,f^{(s)})_p$ *и, в частности, если* $f\in\hat W^r_p$, *то* $\hat\omega^{[r]}(\delta,f)_p\leq\delta^r\|f^{(r)}\|_p$.

Действительно, согласно предположению о $f\in\hat W^s_{p,0}$ и определению (5) функция $\hat f\in W^s_p(-\infty,1)$. Поэтому (см., например, [7, с. 158–159], свойства 1 и 3) справедливо равенство

$$(\Delta_h^r\hat f)(t)=h^s\int\limits_{[0,1]^s}(\Delta_h^{r-s}\hat f^{(s)})(t-h(\tau_1+\ldots+\tau_s))\,d\tau_1\ldots d\tau_s, \tag{21}$$

где здесь и далее через $\int_{[0,1]^s}$ обозначен s-кратный интеграл по s-мерному кубу со сторонами $[0,1]$. Из этого равенства согласно обобщенному неравенству Минковского имеем

$$\|\Delta_h^r\hat f\|_p\leq h^s\sup_{0\leq\xi\leq hs}\|(\Delta_h^{r-s}\hat f^{(s)})(\cdot-\xi)\|_p.$$

Но, как показано при выводе свойства 4, $\|(\Delta_h^{r-s}\hat f^{(s)})(\cdot-\xi)\|_p\leq\|\Delta_h^{r-s}\hat f^{(s)}\|_p$ при $\xi\geq 0$, откуда получается свойство 7а.

Аналогично устанавливаются свойства 7б и 7в.

Покажем теперь, как из свойств 3, 4 и 7 выводятся оценки снизу K-функционалов из утверждения 2. При этом используется следующее очевидное свойство K-функционала.

8. *По линейным непрерывным функционалам* $U_1, \ldots, U_n$, *заданным на пространстве* W_p^r *равенствами* $U_j^-(g) = U_j(g^-)$, *определим линейные непрерывные функционалы* $U_1^-, \ldots, U_n^-$, *а по ним правилом* (1) *зададим подпространство* W^r_{p,U^-} *пространства* W_p^r. *Тогда*

$$K_m(\delta, f; L_p, W^r_{p,U}) = K_m\left(\delta, f^-; L_p, W^r_{p,U^-}\right), \quad \delta \geq 0, \quad f \in L_p.$$

9. *Для любого* $m = 0, \ldots, r$ *справедливы соотношения*

$$K_m(\delta, f; L_p, \hat{W}^r_{p,0}) = K_m(\delta, f^-; L_p, \hat{W}^r_{p,1}) \leq$$

$$\leq K_m(\delta, f^-; L_p, \hat{W}^r_p) = K_m(\delta, f; L_p, \hat{W}^r_p), \quad \delta \geq 0, \quad f \in L_p.$$

Это свойство вытекает из свойства 8, определения (2) K-функционала и очевидного включения $\hat{W}^r_p \subseteq \hat{W}^r_{p,1}$.

Доказательство первых оценок в неравенствах (16) – (18). В силу неравенства (3) эти оценки достаточно установить для индекса $m = 0$.

Покажем вначале справедливость первой оценки в неравенствах (16). Пусть g — произвольная функция, принадлежащая пространству $\hat{W}^r_{p,0}$. Тогда из свойств 3, 4 и 7а имеем

$$\hat{\omega}_0^{[r]}(\delta, f)_p \leq \hat{\omega}_0^{[r]}(\delta, f-g)_p + \hat{\omega}_0^{[r]}(\delta, g)_p \leq$$

$$\leq 2^r \|f-g\|_p + \delta^r \|g^{(r)}\|_p, \quad \delta \geq 0, \quad g \in \hat{W}^r_{p,0},$$

а значит, $\hat{\omega}_0^{[r]}(\delta, f)_p \leq 2^r K_0((\delta/2)^r, f; L_p, \hat{W}^r_{p,0})$, $\delta \geq 0$. Заменяя в этом неравенстве δ на 2δ, получаем первую оценку в неравенствах (16).

Первые оценки в неравенствах (17) и (18) доказываются аналогично. Отметим, что эти оценки также легко выводятся из первой оценки в неравенствах (16) и из свойств 1, 8 и 9.

10. *Для любого* $0 \leq \delta \leq 1$ *справедливы неравенства*

$$\|f\|_{L_p[0,\delta]} \leq \hat{\omega}_0^{[r]}(\delta, f)_p, \quad \|f\|_{L_p[1-\delta,1]} \leq \hat{\omega}_1^{[r]}(\delta, f)_p,$$

$$\|f\|_{L_p[0,\delta]} \leq \hat{\omega}^{[r]}(\delta, f)_p, \quad \|f\|_{L_p[1-\delta,1]} \leq \hat{\omega}^{[r]}(\delta, f)_p.$$

Действительно, из определений (5) и (6) функции $\hat{f}$ и ее r-й разности заключаем, что $f(t) = (\Delta_\delta^r \hat{f})(t)$, если $0 \leq t \leq \delta\ (\leq 1)$, а значит, $\|f\|_{L_p[0,\delta]} \leq \|\Delta_\delta^r \hat{f}\|_p$, откуда следует первое неравенство в свойстве 10. Остальные неравенства выводятся из первого неравенства и свойства 1.

11. *Пусть функция* $\hat{f}$ *построена по функции* $f \in L_p$ *в соответствии с правилом* (5). *Тогда для модифицированной функции Стеклова*

$$f_{\delta,r}(t) = \int\limits_{[0,1]^r} \sum_{j=1}^{r} (-1)^{j+1} \binom{r}{j} \hat{f}\left(t - \frac{\delta j}{r}(\tau_1 + \ldots + \tau_r)\right) d\tau_1 \ldots d\tau_r, \tag{22}$$

$0 \leq t \leq 1$, $\delta > 0$, *справедливы следующие свойства:* $f_{\delta,r} \in \hat{W}^r_{p,0}$ *и*

$$\|f - f_{\delta,r}\|_p \leq \hat{\omega}_0^{[r]}(\delta, f)_p, \tag{23}$$

$$\|f_{\delta,r}^{(l)}\|_p \le 2^r (r/\delta)^l \,\hat{\omega}_0^{[r]}(\delta/r, f)_p, \quad l = 0, \ldots, r, \tag{24}$$

$$\|f_{\delta,r}^{(l)}\|_p \le ((r-l)!)^{-1} (2r/\delta)^r \,\hat{\omega}_0^{[r]}(\delta/r, f)_p, \quad l = 0, \ldots, r. \tag{25}$$

Действительно, из определения (6) r-й разности и обобщенного неравенства Минковского получаем оценки

$$\|f - f_{\delta,r}\|_p \le \int\limits_{[0,1]^r} \left\| \Delta^r_{\frac{\delta}{r}(\tau_1 + \ldots + \tau_r)} \hat{f} \right\|_p d\tau_1 \ldots d\tau_r \le \sup_{0 \le h \le \delta} \|\Delta_h^r \hat{f}\|_p,$$

откуда и из определения (7) модуля непрерывности $\hat{\omega}_0^{[r]}(\delta, f)_p$ следует неравенство (23).

Равенством

$$(S_\delta f)(t) := \frac{1}{\delta} \int\limits_{t-\delta}^{t} \hat{f}(\tau)\, d\tau \equiv \int\limits_0^1 \hat{f}(t - \delta\tau)\, d\tau$$

введем оператор Стеклова, который, очевидно, является ограниченным оператором, действующим из L_p в W_p^1 для каждого $1 \le p \le \infty$. Как следует из второго представления оператора Стеклова, функция $f_{\delta,r}$, заданная равенством (22), запишется в виде

$$f_{\delta,r}(t) = \int\limits_{[0,1]^{r-l}} \sum_{j=1}^{r} (-1)^{j+1} \binom{r}{j} (S^l_{\delta j/r} \hat{f}) \left(t - \frac{\delta j}{r} (\tau_{l+1} + \ldots + \tau_r) \right) d\tau_{l+1} \ldots d\tau_r$$

для всех $l = 0, \ldots, r$, причем при $l = r$ здесь и далее считаем, что интеграл $\int_{[0,1]^{r-l}}$ совпадает с подынтегральной функцией. Из первого и второго представлений оператора Стеклова следуют формулы

$$\frac{d}{dt}(S_\delta f)(t) = \frac{1}{\delta}(\Delta^1_\delta \hat{f})(t), \quad (\Delta^1_\delta S_\delta \hat{f})(t) = (S_\delta \Delta^1_\delta \hat{f})(t),$$

из которых получаем тождества

$$f_{\delta,r}^{(l)}(t) = \left(\frac{r}{\delta}\right)^l \int\limits_{[0,1]^{r-l}} \sum_{j=1}^{r} (-1)^{j+1} \binom{r}{j} \frac{1}{j^l} \times$$

$$\times (\Delta^l_{\delta j/r} \hat{f}) \left(t - \frac{\delta j}{r} (\tau_{l+1} + \ldots + \tau_r) \right) d\tau_{l+1} \ldots d\tau_r, \quad l = 0, \ldots, r. \tag{26}$$

Отсюда, воспользовавшись обобщенным неравенством Минковского, имеем

$$\|f_{\delta,r}^{(l)}\|_p \le \left(\frac{r}{\delta}\right)^l \sum_{j=1}^{r} \binom{r}{j} \frac{1}{j^l} \sup_{0 \le \xi \le \delta r} \left\| (\Delta^l_{\delta j/r} \hat{f})(\cdot - \xi) \right\|_p.$$

Но как указывалось при выводе свойства 4, $\|(\Delta_h^l \hat{f})(\cdot - \xi)\|_p \le \|\Delta_h^l \hat{f}\|_p$ при $\xi \ge 0$. Поэтому

$$\|f_{\delta,r}^{(l)}\|_p \le \left(\frac{r}{\delta}\right)^l \sum_{j=1}^{r} \binom{r}{j} \frac{1}{j^l} \hat{\omega}_0^{[l]}(\delta j/r, f)_p, \quad l = 0, \ldots, r,$$

откуда и из свойства 5 модуля непрерывности следуют оценки (24).

Так как $\hat{f}(t) = 0$ при $t < 0$, из равенства (26) получаем $f_{\delta,r}^{(l)}(0) = 0$, $l = 0, \ldots, r-1$, а значит, $f_{\delta,r} \in \hat{W}^r_{p,0}$ и поэтому

$$f_{\delta,r}^{(r-s)}(t) = \int_0^t \int_0^{t_1} \ldots \int_0^{t_{s-1}} f_{\delta,r}^{(r)}(t_s)\, dt_s \ldots dt_1 =$$

$$= \frac{1}{(s-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{s-1} f_{\delta,r}^{(r)}(\tau)\, d\tau, \quad s = 1, \ldots, r.$$

Отсюда, воспользовавшись неравенством Юнга, имеем $\| f_{\delta,r}^{(r-s)} \|_p \le (s!)^{-1} \times \times \| f_{\delta,r}^{(r)} \|_p$. Подставляя в правую часть этого неравенства оценку (24) при $l = r$, получаем неравенства (25) при $l = 0, \ldots, r-1$. И наконец, отметим, что при $l = r$ оценки (24) и (25) совпадают. На этом доказательство свойства 11 завершено.

Доказательство вторых оценок в неравенствах (16)–(18). В силу неравенства (3) эти оценки достаточно установить для индекса $m = r$.

Покажем вначале справедливость второй оценки в неравенствах (16). Для этого рассмотрим функцию $f_{\delta,r}$, введенную в свойстве 11. Функция $f_{\delta,r} \in \in \hat{W}_{p,0}^r$, и согласно оценкам (23), (25) и свойству 5 справедливы неравенства

$$K_r(\delta/2, f; L_p, W_{p,0}^r) \le \| f - f_{\delta,r} \|_p + \left(\frac{\delta}{2}\right)^r \sum_{j=0}^{r} \| f_{\delta,r}^{(j)} \|_p \le$$

$$\le \hat{\omega}_0^{[r]}(\delta, f)_p + \sum_{j=0}^{r} \frac{r^r}{(r-j)!} \hat{\omega}_0^{[r]}(\delta/r, f)_p \le$$

$$\le (e+1)\, r^r \hat{\omega}_0^{[r]}(\delta/r, f)_p, \quad \delta > 0.$$

Заменяя в них δ на 2δ, получаем вторую оценку в (16). Если теперь воспользоваться свойствами 1 и 9, то из установленной оценки выводится вторая оценка в (17).

Покажем теперь справедливость второй оценки в неравенствах (18). Если $\delta \ge 1/2r^2$, то эта оценка вытекает из неравенства (4), свойства 10 и из того, что модуль непрерывности является неубывающей функцией по δ.

Пусть теперь $0 < \delta < 1/2r^2$. По функции $f \in L_p$ равенствами

$$f_0(t) = f(t), \quad 0 \le t \le 1 - 2r^2\delta, \quad f_0(t) = 0, \quad 1 - 2r^2\delta < t \le 1, \tag{27}$$

зададим функцию f_0. Далее по функции f_0 равенствами (5) определим функцию $\hat{f}_0$, носитель которой сосредоточен на отрезке $[0, 1 - 2r^2\delta]$. Поэтому построенная по функции $\hat{f}_0$ согласно формуле (22) модифицированная функция Стеклова $f_{0,2r\delta,r}$ (т. е. при δ, равном $2r\delta$) принадлежит (см. равенства (26)) пространству $W_p^r(-\infty, \infty)$, а носитель $f_{0,2r\delta,r}$ сосредоточен на отрезке $[0, 1]$. Следовательно, сужение этой функции на отрезок $[0, 1]$, обозначенное также через $f_{0,2r\delta,r}$, принадлежит пространству $\hat{W}_p^r$ и для него оценки (23) и (25) запишутся соответственно в виде

$$\| f_0 - f_{0,2r\delta,r} \|_p \le \hat{\omega}_0^{[r]}(2r\delta, f_0)_p \le \hat{\omega}^{[r]}(2r\delta, f_0)_p,$$

$$\| f_{0,2r\delta,r}^{(j)} \|_p \le ((r-j)!)^{-1} \delta^{-r} \hat{\omega}^{[r]}(2\delta, f_0)_p, \quad j = 0, \ldots, r.$$

Из этих оценок, учитывая включение $f_{0,2r\delta,r} \in \hat{W}_p^r$ и неубываемость по δ функции $\hat{\omega}^{[r]}(\delta, f)_p$, заключаем, что

$$K_r(\delta^r, f_0; L_p, \hat{W}_p^r) \le (e+1)\,\hat{\omega}^{[r]}(2r^2\delta, f_0)_p. \tag{28}$$

Функция $f-f_0$ совпадает с функцией f на отрезке $[1-2r^2\delta, 1]$ и равна нулю вне этого отрезка. Поэтому из свойств 4 и 10 получаем соотношения

$$\hat{\omega}^{[r]}(2r^2\delta, f-f_0)_p \le 2^r\|f-f_0\|_p = 2^r\|f\|_{L_p[1-2r^2\delta,1]} \le 2^r\,\hat{\omega}^{[r]}(2r^2\delta, f)_p,$$

из которых, воспользовавшись тем, что модуль непрерывности является полунормой на пространстве L_p, выводим неравенства

$$\hat{\omega}^{[r]}(2r^2\delta, f_0)_p \le \hat{\omega}^{[r]}(2r^2\delta, f)_p + \hat{\omega}^{[r]}(2r^2\delta, f-f_0)_p \le$$
$$\le (2^r+1)\,\hat{\omega}^{[r]}(2r^2\delta, f)_p.$$

Подставляя эти неравенства в правую часть оценки (28), имеем

$$K_r(\delta^r, f_0; L_p, \hat{W}_p^r) \le (e+1)(2^r+1)\,\hat{\omega}^{[r]}(2r^2\delta, f)_p. \tag{29}$$

Кроме того, из неравенства (4), определения (27) функции f_0 и из свойства 10 вытекают такие соотношения:

$$K_r(\delta^r, f-f_0; L_p, \hat{W}_p^r) \le \|f-f_0\|_p = \|f\|_{L_p[1-2r^2\delta,1]} \le \hat{\omega}^{[r]}(2r^2\delta, f)_p.$$

Если теперь воспользоваться тем, что K-функционал является полунормой на пространстве L_p, то из этих соотношений и из оценки (29) получаем вторую оценку в неравенствах (18).

Тем самым утверждение 2 полностью доказано.

Установим теперь свойство 12, являющееся в определенном смысле дополнением к свойству 10.

12. *Пусть* $\omega^{[s]}(\delta, f)_p$ *— один из модулей непрерывности* $\hat{\omega}_0^{[s]}(\delta, f)_p$, $\hat{\omega}_1^{[s]}(\delta, f)_p$ *или* $\hat{\omega}^{[s]}(\delta, f)_p$. *Тогда*

$$\delta^{r-s}\,\hat{\omega}^{[s]}(\delta, f)_p \le (e+1)(2r)^r\,\hat{\omega}^{[r]}(\delta/r, f)_p, \quad 0\le\delta\le 2, \quad s=0,\dots,r-1,$$

и, в частности, $\delta^r\|f\|_p \le (e+1)(2r)^r\,\omega^{[r]}(\delta/r, f)_p$, $0\le\delta\le 2$.

Для $s=0$ в последующих выкладках считаем, что

$$K_0(\delta^s, f; L_p, \hat{W}_{p,0}^s) := \|f\|_p = \inf_{g\in L_p}(\|f-g\|_p + \|g\|_p)$$

и учитываем обозначение (10). Из неравенств (16), очевидного включения $\hat{W}_{p,0}^r \subseteq \hat{W}_{p,0}^s$, определения (2) K-функционала и из требования $0\le\delta\le 2$ имеем

$$\delta^{r-s}\,\hat{\omega}_0^{[s]}(\delta, f)_p \le 2^s\delta^{r-s}K_0((\delta/2)^s, f; L_p, \hat{W}_{p,0}^s) \le$$
$$\le 2^r \inf_{g\in\hat{W}_{p,0}^r}\left\{\|f-g\|_p + \left(\frac{\delta}{2}\right)^r\|g^{(s)}\|_p\right\} \le 2^r K_{r-s}((\delta/2)^r, f; L_p, \hat{W}_{p,0}^r) \le$$
$$\le (e+1)(2r)^r\,\hat{\omega}_0^{[r]}(\delta/r, f)_p.$$

Тем самым свойство 12 для модуля непрерывности $\hat{\omega}_0^{[s]}(\delta, f)_p$ доказано. Для модулей непрерывности $\hat{\omega}_1^{[s]}(\delta, f)_p$ и $\hat{\omega}^{[s]}(\delta, f)_p$ это свойство вытекает из этого же свойства для модуля непрерывности $\hat{\omega}_0^{[s]}(\delta, f)_p$ и из свойства 1.

Из свойства 12, в частности, получается такое утверждение: *если* $\delta^{-r}\min\{\hat{\omega}_0^{[r]}(\delta, f)_p, \hat{\omega}_1^{[r]}(\delta, f)_p\} \to 0$ *при* $\delta \searrow 0$, *то функция* f *равна нулю почти всюду.*

***Замечание* 3.** Покажем отличие оценок (14) и (15). Отметим вначале, что в случае $l_1 = 0$ оценки (14) и (15) при $p = \infty$ бессодержательны, так как тогда они утверждают лишь то, что $K_r(\delta^r, f; L_p, W^r_{p,U}) \le c\|f\|_p$, $\delta > 0$, а это неравенство с точностью до постоянной совпадает с неравенством (4). Однако, если $l_1 = 0$ и $p \le \infty$, то оценка (15) приобретает вид

$$K_r(\delta^r, f; L_p, W^r_{p,U}) \le c \min\{\hat{\omega}_0^{[1]}(\delta^{1/p}, f)_p, \hat{\omega}_1^{[1]}(\delta^{1/p}, f)_p\},$$

и в ряде случаев это неравенство дает точную по δ оценку сверху K-функционала. Например, в случае K-функционала $K_m(\delta, f; L_p, \hat{W}^r_p)$, вычисленного на функции $f \equiv 1$.

Далее для простоты предположим, что $l_1 = 1$. Для функции $f_1(t) = t^2(1 - t)^2$ и из свойств 1, 7 и 12 получаем соотношения $\hat{\omega}_0^{[1]}(\delta, f_1)_p = \hat{\omega}_1^{[1]}(\delta, f_1)_p \asymp \delta$, $\hat{\omega}_0^{[2]}(\delta, f_1)_p = \hat{\omega}_1^{[2]}(\delta, f_1)_p \asymp \delta^2$, $0 \le \delta \le 1$. Поэтому в этом случае оценки (14) и (15) запишутся соответственно в виде $K_r(\delta^r, f_1; L_p, W^r_{p,U}) \le c\delta$ и $K_r(\delta^r, f_1; L_p, W^r_{p,U}) \le c\delta^{1+1/p}$, т. е. в этом случае оценка (15) лучше оценки (14), если $p < \infty$, и обе оценки совпадают, если $p = \infty$.

И последний пример. Пусть функция $f_2(t) = 0$, $0 \le t \le 1/2$, и $f_2(t) = t - 1/2$, $1/2 < t \le 1$. Из свойств 7 и 12 получаем $\hat{\omega}_0^{[1]}(\delta, f_2)_p \asymp \delta$, а из свойства 10 получаем $\hat{\omega}_1^{[1]}(\delta, f_2)_p \ge c_1\delta^{1/p}$. Здесь $c_1 > 0$, а $0 \le \delta \le 1$. Тем самым в этом случае оценка (14) принимает вид $K_r(\delta^r, f_2; L_p, W^r_{p,U}) \le c\delta$. Из формулы (21) при $r = 2$ и $s = 1$ можно получить соотношение $\hat{\omega}_0^{[2]}(\delta, f_2)_p \asymp \delta^{1+1/p}$, а из следствия 10 — неравенство $\hat{\omega}_1^{[2]}(\delta, f_2)_p \ge c_2\delta^{1/p}$. Здесь $c_2 > 0$, а $0 \le \delta \le 1$. Т. е. в этом случае оценка (15) принимает вид $K_r(\delta^r, f_2; L_p, W^r_{p,U}) \le c\delta^{(p+1)^2/2p^2}$. Отсюда видно, что для функции f_2 при $1 \le p < 1 + \sqrt{2}$ оценка (15) лучше оценки (14), при $p = 1 + \sqrt{2}$ обе оценки совпадают, а при $p > 1 + \sqrt{2}$ оценка (14) лучше оценки (15).

3. Доказательство основного результата. Установим вначале два вспомогательных утверждения, первое из которых относится к весьма общему виду K-функционалов.

Лемма 1. *Пусть банахово пространство $\mathfrak{B}_1$ вложено в банахово пространство $\mathfrak{B}$, линейные функционалы $U_1, \ldots, U_n$ непрерывны на $\mathfrak{B}_1$, а $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{p}_1$ — полунормы, заданные соответственно на пространствах $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}_1$. Предположим, что для некоторых неотрицательных чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и r найдутся такие векторы $w_{s,\delta}$, $s = 1, \ldots, n$, принадлежащие пространству $\mathfrak{B}_1$ и зависящие от параметра δ с $0 < \delta \le 1$, для которых существуют конечные пределы*

$$\lim_{\delta \searrow 0} \delta^{\alpha_j} U_j(w_{s,\delta}) = a_{j,s}, \quad j, s = 1, \ldots, n, \tag{30}$$

причем

$$\det\{a_{j,s}\}_{j,s=1}^n \ne 0, \tag{31}$$

и пусть для некоторой постоянной $c_1 > 0$

$$\mathfrak{p}(w_{s,\delta}) + \delta^r \mathfrak{p}_1(w_{s,\delta}) \le c_1, \quad s = 1, \ldots, n, \quad 0 < \delta \le 1. \tag{32}$$

Тогда найдутся такие положительные постоянные δ_0 и c_0, что $\delta_0 \le 1$ и для любого элемента $f \in \mathfrak{B}$ справедливо равенство

$$\inf_{g \in \mathfrak{B}_1 :\, U_1(g) = \ldots = U_n(g) = 0} \{ \mathfrak{p}(f-g) + \delta^r \mathfrak{p}_1(g) \} =$$

$$= \inf_{g \in \mathfrak{B}_1} \left\{ \mathfrak{p}(f-g) + \delta^r \mathfrak{p}_1(g) + c \sum_{j=1}^{r} \delta^{\alpha_j} |U_j(g)| \right\}, \tag{33}$$
$$0 < \delta \le \delta_0, \quad c \ge c_0.$$

Постоянные δ_0 *и* c_0 *зависят лишь от поведения функций* $\delta^{\alpha_j} U_j(w_{s,\delta})$, $j, s = 1, \ldots, n$, *по* $\delta \in (0, 1]$ *и, кроме того, постоянная* c_0 *зависит от постоянной* c_1 *из условия* (32).

Доказательство. Введем матрицу $\Gamma(\delta) = \{\delta^{\alpha_j} U_j(w_{s,\delta})\}_{j,s=1}^{n}$ для $0 < \delta \le 1$ и положим $\Gamma(0) = \{a_{j,s}\}_{j,s=1}^{n}$, где числа $a_{j,s}$ такие же, как и в условии (30). Элементы матрицы $\Gamma(\delta)$ непрерывны справа в нуле и $\Gamma(0)$ — обратимая матрица, поэтому найдется такое положительное $\delta_0 \le 1$, что матрица $\Gamma(\delta)$ обратима при $0 \le \delta \le \delta_0$, а элементы $b_{j,s}(\delta)$ обратной к ней матрицы ограничены при тех же δ. Определим векторы

$$g_{k,\delta} = \sum_{s=1}^{n} b_{s,k}(\delta)\, w_{s,\delta}; \quad k = 1, \ldots, n, \quad 0 < \delta \le \delta_0,$$

принадлежащие пространству $\mathfrak{B}_1$. Так как матрица $\{b_{s,k}(\delta)\}_{s,k=1}^{n}$ является обратной к матрице $\{\delta^{\alpha_j} U_j(w_{s,\delta})\}_{j,s=1}^{n}$, то справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \delta^{\alpha_j} U_j(g_{k,\delta}) &= 0, \quad j \ne k, \\ \delta^{\alpha_j} U_j(g_{j,\delta}) &= 1, \quad j, k = 1, \ldots, n, \quad 0 < \delta \le \delta_0. \end{aligned} \tag{34}$$

В силу условия (32) и ограниченности функций $b_{s,k}(\delta)$ при $0 \le \delta \le \delta_0$ имеем $\mathfrak{p}(g_{k,\delta}) + \delta^r \mathfrak{p}_1(g_{k,\delta}) \le c_0$, где постоянная $c_0 = n c_1 \sup |b_{s,k}(\delta)|$, а верхняя грань берется по $\delta \in [0, \delta_0]$ и по индексам $k, s = 1, \ldots, n$. Тем самым для любых элементов $f \in \mathfrak{B}$ и $g \in \mathfrak{B}_1$ выполнено неравенство

$$\mathfrak{p}\left\{ f - g + \sum_{k=1}^{n} \delta^{\alpha_k} U_k(g)\, g_{k,\delta} \right\} +$$

$$+ \delta^r \mathfrak{p}_1 \left\{ g - \sum_{k=1}^{n} \delta^{\alpha_k} U_k(g)\, g_{k,\delta} \right\} \le$$

$$\le \mathfrak{p}(f-g) + \delta^r \mathfrak{p}_1(g) + c_0 \sum_{k=1}^{n} \delta^{\alpha_k} |U_k(g)|, \quad 0 < \delta \le \delta_0. \tag{35}$$

Из соотношений (34) следуют равенства

$$U_j\left(g - \sum_{k=1}^{n} \delta^{\alpha_k} U_k(g)\, g_{k,\delta} \right) = 0, \quad j = 1, \ldots, n, \quad 0 < \delta \le \delta_0.$$

Но в неравенстве (35) g — произвольный вектор, принадлежащий пространству $\mathfrak{B}_1$. Поэтому из этого неравенства выводится оценка

$$\inf_{g \in \mathfrak{B}_1:\, U_1(g) = \ldots = U_n(g) = 0} \{\mathfrak{p}(f-g) + \delta^r \mathfrak{p}_1(g)\} \le$$

$$\le \inf_{g \in \mathfrak{B}_1} \left\{ \mathfrak{p}(f-g) + \delta^r \mathfrak{p}_1(g) + c \sum_{j=1}^{r} \delta^{\alpha_j} |U_j(g)| \right\}, \quad 0 < \delta \le \delta_0, \tag{36}$$

справедливая для любого вектора $f \in \mathfrak{B}$ и произвольной постоянной $c \ge c_0$.

Обратное неравенство почти очевидно. Действительно, учитывая, что множество векторов g, принадлежащих пространству $\mathfrak{B}_1$ и удовлетворяющих условиям $U_1(g) = \ldots = U_n(g) = 0$, образует подпространство пространства $\mathfrak{B}_1$, имеем

$$\inf_{g \in \mathfrak{B}_1:\, U_1(g) = \ldots = U_n(g) = 0} \{\mathfrak{p}(f-g) + \delta^r \mathfrak{p}_1(g)\} =$$

$$= \inf_{g \in \mathfrak{B}_1:\, U_1(g) = \ldots = U_n(g) = 0} \left\{ \mathfrak{p}(f-g) + \delta^r \mathfrak{p}_1(g) + c_2 \sum_{j=1}^{n} \delta^{\alpha_j} |U_j(g)| \right\} \ge$$

$$\ge \inf_{g \in \mathfrak{B}_1} \left\{ \mathfrak{p}(f-g) + \delta^r \mathfrak{p}_1(g) + c_2 \sum_{j=1}^{n} \delta^{\alpha_j} |U_j(g)| \right\},$$

какова бы ни была вещественная постоянная c_2. Из этого неравенства и неравенства (36) вытекает утверждение леммы 1.

Лемма 2. *Пусть функционалы U_j заданы равенствами* (12), *а числа l_j и функции σ_j, входящие в их определение, удовлетворяют требованию теоремы. Тогда найдутся такие положительные постоянные $\delta_0 \,(\le 1)$ и c_0, не зависящие от p, что для K-функционала* (2) *справедливо равенство*

$$K_r(\delta^r, f; L_p, W^r_{p,U}) =$$

$$= \inf_{g \in W^r_p} \left\{ \|f-g\|_p + \delta^r \sum_{j=0}^{r} \|g^{(j)}\|_p + c_0 \sum_{j=1}^{n} \delta^{l_j + 1/p} |U_j(g)| \right\}, \tag{37}$$

$$0 < \delta \le \delta_0, \quad f \in L_p.$$

Доказательство основано на проверке выполнения условий леммы 1, в которой, в данном случае, считаем, что банаховы пространства $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}_1$ равны соответственно функциональным пространствам L_p и W^r_p, полунормы $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{p}_1$ совпадают соответственно с нормами

$$\mathfrak{p}(f) = \|f\|_p, \; f \in L_p, \quad \mathfrak{p}_1(g) = \sum_{j=0}^{r} \|g^{(j)}\|_p, \; g \in W^r_p, \tag{38}$$

а числа $\alpha_j = l_j + 1/p$.

Равенствами

$$J_{j,\delta} = \{\tau \in [0,1] : |\tau - \tau_j| \le \delta\}, \quad \delta > 0,$$

зададим δ в окрестности точек τ_j. Введем функции

$$v_l(\tau) = \begin{cases} \tau^l (1-\tau)^r, & -1 \le \tau \le 1, \\ 0, & |\tau| > 1, \end{cases} \qquad l = 0, \ldots, r, \tag{39}$$

принадлежащие $W^r_\infty(-\infty, \infty)$. Поэтому сужение функций

$$w_{s,\delta}(\tau) = \frac{1}{\delta^{1/p}} v_{l_s}\left(\frac{\tau-\tau_s}{\delta}\right), \quad \delta > 0,$$

на отрезок $[0, 1]$ принадлежит пространству W_∞^r. Для этих функций (сохраняя те же самые обозначения) найдется такая постоянная $c > 0$, не зависящая от p, что

$$\delta^{l+1/p}\|w_{s,\delta}^{(l)}\|_\infty \le c, \quad s = 1, \dots, n, \quad l = 0, \dots, r, \quad \delta > 0, \tag{40}$$

и $\delta^l\|w_{s,\delta}^{(l)}\|_p \le c$ для тех же значений индексов l и s и параметра $\delta > 0$. Из последних неравенств, учитывая вид (38) норм $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{p}_1$, заключаем, что для функции $w_{s,\delta}$ выполнено условие (32) леммы 1 с независящей от p постоянной c_1. Отсюда также следует и то, что если будет установлена справедливость требований (30) и (31) леммы 1, то постоянные δ_0 и c_0 в утверждении леммы 2 не зависят от p. Действительно, это заключение вытекает из утверждения леммы 1 относительно постоянных δ_0 и c_0 и того факта, что от p не зависит поведение функций $\delta^{l_j+1/p}U_j(w_{s,\delta})$, $j, s = 1, \dots, n$, по $\delta \in [0, 1]$.

Проверим теперь выполнение требований (30) и (31), для чего найдем пределы функций $\delta^{l_j+1/p}U_j(w_{s,\delta})$ при $\delta \searrow 0$. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть индексы j и s такие, что $\tau_j \ne \tau_s$ и функция σ_j непрерывна в точке τ_s. Так как функция σ_j имеет ограниченную вариацию, то (см., например, [5, с. 155])

$$\lim_{\delta\searrow 0}\|\sigma_j\|_{V(J_{s,\delta})} = 0. \tag{41}$$

Носитель функции $w_{s,\delta}$ лежит на отрезке $J_{s,\delta}$, откуда с учетом вида (12) функционалов U_j имеем

$$|\delta^{l_j+1/p}U_j(w_{s,\delta})| =$$

$$= \left|\delta^{l_j+1/p}\int_{J_{s,\delta}} w_{s,\delta}^{(l_j)}(\tau)\,d\sigma_j(\tau) + \sum_{k<l_j}\delta^{l_j-k}v_{l_s}^{(k)}\left(\frac{-\tau_s}{\delta}\right)\right| \le$$

$$\le \delta^{l_j+1/p}\|w_{s,\delta}^{(l_j)}\|_{C(J_{s,\delta})}\|\sigma_j\|_{V(J_{s,\delta})} + \sum_{k<l_j}\delta^{l_j-k}\left|v_{l_s}^{(k)}\left(\frac{-\tau_s}{\delta}\right)\right|.$$

Отсюда и из соотношений (40) и (41) заключаем, что в данном случае

$$\lim_{\delta\searrow 0}\delta^{l_j+1/p}U_j(w_{s,\delta}) = 0. \tag{42}$$

Случай 2. Пусть индексы j и s такие, что $\tau_j = \tau_s$. По условию теоремы этот случай возможен, лишь когда $j = s$ либо когда $j \ne s$ и $l_j \ne l_s$. Выделяя скачок функции σ_j в точке τ_j, записываем функционал U_j, заданный равенством (12), в виде

$$U_j(g) = \lambda_j g^{(l_j)}(\tau_j) + \int_0^1 g^{(l_j)}(\tau)\,d\sigma_{0,j}(\tau) + \sum_{k<l_j} c_{j,k}\,g^{(k)}(0),$$

где число $\lambda_j = \sigma_j(\tau_j) - \sigma_j(\tau_j - 0)$, если $\tau_j > 0$, и $\lambda_j = \sigma_j(\tau_j + 0) - \sigma_j(\tau_j)$, если $\tau_j = 0$, а функция $\sigma_{0,j}$ имеет ограниченную вариацию и непрерывна в точке τ_j.

Подставляя в это представление функционала U_j функцию $w_{s,\delta}$ и учитывая предположение о равенстве между собой чисел τ_j и τ_s, имеем

$$\delta^{l_j+1/p} U_j(w_{s,\delta}) = \lambda_j v_{l_s}^{(l_j)}(0) + \delta^{l_j+1/p} \int\limits_{J_{j,\delta}} w_{s,\delta}^{(l_j)}(\tau)\, d\sigma_{0,j}(\tau) + $$
$$+ \sum_{k<l_j} \delta^{l_j-k} v_{l_s}^{(k)}\left(\frac{-\tau_s}{\delta}\right). \tag{43}$$

Далее, проводя те же рассуждения, что и при вычислении предела (42) с учетом ограниченности вариации функции $\sigma_{0,j}$ и ее непрерывности в точке τ_j, получаем равенство нулю пределов по $\delta \searrow 0$, вычисленных для второго и третьего слагаемых в правой части равенства (43). Тем самым показано, что

$$\lim_{\delta\searrow 0} \delta^{l_j+1/p} U_j(w_{s,\delta}) = \lambda_j v_{l_s}^{(l_j)}(0),$$

а согласно равенствам (39)

$$v_{l_s}^{(l_j)}(0) = 0, \text{ если } l_j < l_s, \quad v_{l_j}^{(l_j)}(0) = (l_j)!. \tag{44}$$

Оба разобранных случая с учетом нумерации (13) чисел l_j и равенств (44) показывают существование конечных пределов

$$\lim_{\delta\searrow 0} \delta^{l_j+1/p} U_j(w_{s,\delta}) = a_{j,s}$$

с числами $a_{j,s} = 0$, если $j < s$, и $a_{j,j} = \lambda_j\,(l_j!)$. Тем самым показано выполнение требований (40) и (41) леммы 1 с числами $\alpha_j = l_j + 1/p$.

Лемма 3. *Пусть функционал U_j представим в виде* (12) *с числом $l_j \ge 1$. Тогда найдется такой полином P_j степени не выше l_j и такие комплексные числа $d_{j,k}$, что этот функционал U_j представим и в виде*

$$U_j(g) = \int\limits_0^1 g^{(l_j)}(\tau)\, d(\sigma_j(\tau) + P_j(\tau)) + \sum_{k<l_j} d_{j,k}\, g^{(k)}(1), \quad g \in C^{l_j}. \tag{45}$$

Доказательство. Интегрируя по частям, получаем равенства

$$g^{(k)}(0) = \frac{(-1)^{l_j-k}}{(l_j-k-1)!} \int\limits_0^1 \tau^{l_j-k-1} g^{(l_j)}(\tau)\, d\tau + \sum_{s=k}^{l_j-1} \frac{(-1)^{s-k}}{(s-k)!} g^{(s)}(1),$$
$$k = 0, \ldots, l_j - 1,$$

подставляя которые в правую часть представления (12), получаем представление (45).

Доказательство теоремы. По функции f равенством (5) зададим функцию $\hat{f}$, а по ней согласно формуле (22) определим модифицированную функцию Стеклова $f_{\delta^\beta,r}$, где $\delta > 0$, а β — фиксированное число и $0 < \beta \le 1$ (т. е. в формуле (22) параметр δ равен δ^β). Функция $f_{\delta^\beta,r} \in \hat{W}_{p,0}^r$ и поэтому для функционала (12) справедливы соотношения

$$|U_j(f_{\delta^\beta,r})| = \left| \int\limits_0^1 f_{\delta^\beta,r}^{(l_j)}(\tau)\, d\sigma_j(\tau) \right| \le \|\sigma_j\|_V \left\| f_{\delta^\beta,r}^{(l_j)} \right\|_C,$$

откуда с учетом леммы 2 имеем

$$K_r(\delta^r, f; L_p, W^r_{p,U}) \le$$
$$\le c \left(\|f - f_{\delta^\beta, r}\|_p + \delta^r \sum_{j=0}^{r} \left\| f^{(j)}_{\delta^\beta, r} \right\|_p \|f_{\delta^\beta, r}\|_p + \sum_{j=1}^{n} \delta^{l_j + 1/p} \left\| f^{(l_j)}_{\delta^\beta, r} \right\|_C \right), \quad (46)$$
$$0 < \delta \le \delta_0,$$

а постоянная $\delta_0 \in (0, 1]$. Здесь и далее индекс при положительной постоянной c в неравенствах опускается, так как ее значение не играет роли для последующих рассуждений. Отметим лишь, что, как несложно видеть из дальнейшего, эта постоянная c не зависит от p. Используя теперь оценки (23) и (25) записанные при параметре δ, равном δ^β, и учитывая, что модуль непрерывности является неубывающей функцией по δ, а также соотношения $0 < \delta \le \delta_0$, $\beta \le 1$ и $0 \le l_1 \le \ldots \le l_n \le r - 1$, из неравенства (46) выводим следующую оценку:

$$K_r(\delta^r, f; L_p, W^r_{p,U}) \le c \left(\hat{\omega}^{[r]}_0(\delta^\beta, f)_p + \sum_{j=l_1}^{r-1} \delta^{j+1/p} \left\| f^{(j)}_{\delta^\beta, r} \right\|_C \right), \quad 0 < \delta \le \delta_0. \quad (47)$$

Далее потребуется неравенство (см., например, [9], неравенство (11))

$$\|g\|_C \le \zeta^{-1/p} (\|g\|_p + \|g'\|_p), \quad 0 < \zeta \le 1, \quad g \in W^1_p. \quad (48)$$

Полагая в нем $\zeta = \delta$, а в оценке (47) $\beta = 1$, находим

$$K_r(\delta^r, f; L_p, W^r_{p,U}) \le c \left(\hat{\omega}^{[r]}_0(\delta, f)_p + \sum_{j=l_1}^{r} \delta^j \left\| f^{(j)}_{\delta, r} \right\|_p \right), \quad 0 < \delta \le \delta_0,$$

откуда и из неравенств (24) с учетом свойств 2 и 4 модуля непрерывности вытекает соотношение

$$K_r(\delta^r, f; L_p, W^r_{p,U}) \le c\, \hat{\omega}^{[l_1]}_0(\delta, f)_p \quad (49)$$

для $0 < \delta \le \delta_0$. Если же $\delta > \delta_0$, то используя неравенство (4) и применяя последовательно свойства 10, 5 и 2 модуля непрерывности, получаем следующие оценки:

$$K_r(\delta^r, f; L_p, W^r_{p,U}) \le \|f\|_p \le \hat{\omega}^{[l_1]}_0(1, f)_p \le$$
$$\le ([\delta_0^{-1}] + 1)^{l_1} \hat{\omega}^{[l_1]}_0(\delta_0, f)_p \le ([\delta_0^{-1}] + 1)^{l_1} \hat{\omega}^{[l_1]}_0(\delta, f)_p, \quad \delta > \delta_0,$$

т. е. (49) при $\delta > \delta_0$. Тем самым (49) доказано для всех $\delta > 0$.

Теперь из соотношения (49), используя свойства 1, 8 и лемму 3, выведем неравенство

$$K_r(\delta^r, f; L_p, W^r_{p,U}) \le c\, \hat{\omega}^{[l_1]}_1(\delta, f)_p, \quad \delta > 0. \quad (50)$$

Действительно, согласно лемме 3 функционалы U_j^-, построенные по функционалам (12) согласно правилу из свойства 8, запишутся также в виде (12), но с функциями σ_j, равными функциям $\tilde{\sigma}_j$, где $\tilde{\sigma}_j(t) = \sigma_j(1-t) + P_j(t)$, а P_j — некоторые полиномы. Тем самым числа $1 - \tau_j$ являются точками скачков функций $\tilde{\sigma}_j$ и удовлетворяют требованию теоремы*. Поэтому на основании уже

* Функция $\tilde{\sigma}_j$ будет непрерывной слева на $(0, 1)$, однако замена требования непрерывности справа на непрерывность слева не меняет предыдущих доказательств.

доказанного неравенства (49) имеем $K_r(\delta^r, f^-; L_p, W^r_{p,U^-}) \le c\,\hat{\omega}_0^{[l_1]}(\delta, f^-)_p$, где $\delta > 0$, а функция f^- построена по функции f согласно правилу из свойства 1. Из этой оценки и из свойств 1 и 8 получаем оценку (50). Но из оценок (49) и (50) следует утверждение (14).

Покажем теперь справедливость утверждения (15). Полагая в неравенстве (48) параметр $\zeta = 1$ и используя последовательно оценки (24), свойства 2 и 12 модуля непрерывности, получаем следующие соотношения:

$$\delta^{j+1/p}\left\| f^{(j)}_{\delta^\beta, r}\right\|_C \le \delta^{j+1/p}\left(\left\| f^{(j)}_{\delta^\beta, r}\right\|_p + \left\| f^{(j+1)}_{\delta^\beta, r}\right\|_p\right) \le$$

$$\le c\delta^{j+1/p}\left(\delta^{-\beta j}\,\hat{\omega}_0^{[j]}(\delta^\beta, f)_p + \delta^{-\beta(j+1)}\,\hat{\omega}_0^{[j+1]}(\delta^\beta, f)_p\right) \le$$

$$\le c\delta^{j+1/p-\beta(j+1)}\,\hat{\omega}_0^{[j+1]}(\delta^\beta, f)_p, \quad 0 < \delta \le 1.$$

Поэтому, если положить в них $\beta = (pl_1 + 1)/p(l_1 + 1)$, и воспользоваться свойством 4, то имеем

$$\delta^{j+1/p}\left\| f^{(j)}_{\delta^\beta, r}\right\|_C \le c\,\hat{\omega}_0^{[l_1+1]}(\delta^\beta, f)_p, \quad j = l_1, \ldots, r-1, \quad 0 < \delta \le 1,$$

откуда и из неравенства (47) с $\beta = (pl_1 + 1)/p(l_1 + 1)$ получаем

$$K_r(\delta^r, f; L_p, W^r_{p,U}) \le c\,\hat{\omega}_0^{[l_1+1]}(\delta^{(pl_1+1)/p(l_1+1)}, f)_p \tag{51}$$

для $0 < \delta \le \delta_0$. Далее, как и на заключительном этапе доказательства утверждения (14), показывается, что эта оценка справедлива и для $\delta > \delta_0$, а затем, что из (51) следует также оценка

$$K_r(\delta^r, f; L_p, W^r_{p,U}) \le c\,\hat{\omega}_1^{[l_1+1]}(\delta^{(pl_1+1)/p(l_1+1)}, f)_p, \quad \delta > 0.$$

Обе эти оценки показывают справедливость утверждения (15), что и завершает доказательство теоремы.

1. *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. – М.: Мир, 1980. – 664 с.
2. *Radzievskii G.* The rate of convergence of decompositions of ordinary functional-differential operators by eigenfunctions. – Kiev, 1994. – P. 14–27. – (Preprint / National Acad. Sci. Ukraine. Inst. Math.; 94.29).
3. *Радзиевский Г. В.* Краевые задачи и модули непрерывности // Успехи мат. наук. – 1995. – **50**, № 4. – С. 88.
4. *Радзиевский Г. В.* Краевые задачи и связанные с ними модули непрерывности // Функцион. анализ и его прил. – 1995. – **29**, № 3. – С. 87–90.
5. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 896 с.
6. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 798 с.
7. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977. – 512 с.
8. *Шевчук И. А.* Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций. – Киев: Наук. думка, 1992. – 226 с.
9. *Радзиевский Г. В.* Асимптотика по параметру фундаментальной системы решений линейного функционально-дифференциального уравнения // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 6. – С. 811–836.

Получено 20.03.96