УДК 517.958;532.595

І. О. Луковський, О. В. Михайлюк, О. М. Тимоха
(Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО ОДНУ ВАРІАЦІЙНУ ОЗНАКУ СТІЙКОСТІ ПСЕВДОРІВНОВАЖНИХ ФОРМ

We establish a variational criterion of stability for the problem of vibro-capillary equilibrium form which appears in the theory of interaction of limited volumes of liquid with vibrational fields.

Встановлено варіаційну ознаку стійкості для задачі про вібро-капілярну рівноважну форму, яка виникає в теорії взаємодії обмежених об'ємів рідини з вібро-полями.

Розглянемо опуклу гладку область $\Omega \subset \mathbb{R}^3 \,(W(x,\ y,\ z) < 0)$ та однозв'язну гладку рухому поверхню $\Sigma(t)$, яка частково обмежує деяку зіркову підобласть $Q(t) \subset \Omega$, $S = \partial Q \setminus \Sigma$. Досліджується нелінійна еволюційна крайова задача відносно невідомих функцій $\varphi(x, y, z, t)$, $\rho(x, y, z, t)$, $p(x, y, z, t)$ та поверхні $\Sigma(t)$ $(x = H(y, z, t))$:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\nabla\varphi) = 0; \quad \rho = f(p) \text{ в } Q,$$

$$\rho\nabla\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + \mu\varepsilon^2 B_0\, x + \varepsilon\left(a_1 x + a_2 y + a_3 z\right)\sin t\right) = -\nabla\rho \text{ в } Q,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \text{ на } S, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = \frac{H_t}{\sqrt{1+(\nabla H)^2}} = 0 \text{ на } \Sigma, \tag{1}$$

$$p + \mu\varepsilon^2 \operatorname{div}\frac{\nabla H}{\sqrt{1+(\nabla H)^2}} = p_0 \text{ на } \Sigma,$$

$$\frac{H_y W_y + H_z W_z - W_x}{|\nabla W|} = \cos\alpha\sqrt{1+(\nabla H)^2} \text{ на } \partial\Sigma(t),$$

де $f\colon (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ — відома монотонно-зростаюча неперервно диференційовна функція: $f'(p_0) = k^2$; $|B_0|$, $|\mu|$, $k \sim 1$; $|\varepsilon| << 1$, $0 < \alpha \le \pi/2$, $a_i = \text{const}$, $i = 1, 2, 3$, $p_0 = \text{const}$, n — зовнішня нормаль до ∂Q або до $\Sigma(t)$ відносно $Q(t)$. (Фізичний зміст усіх параметрів детально описаний в [1].) Загальної теорії для некласичних задач з вільною поверхнею вигляду (1) (навіть у випадку, коли $a_1 = a_2 = a_3 = 0$) на теперішній час не існує.

Наступна теорема встановлює еквівалентність задачі (1) варіаційній задачі, що використовує функціонал типу Гамільтона – Остроградського.

Теорема 1. *Нехай розв'язок задачі* (1) *такий, що для довільного* $t_1 < t_2$ φ, $\rho, p \in C^2(\tilde{Q})$, $\tilde{Q} = \{(x, y, z, t)\colon\ \forall t \in [t_1, t_2] (x, y, z) \in Q(t)\}$, *а поверхня* $\Sigma(t)$ *гладка. Тоді множина розв'язків задачі* (1) *співпадає з множиною стаціонарних точок функціонала*

$$G(\varphi, \rho, H) = \int_{t_1}^{t_2}\left\{\int_{Q(t)}\rho\left[\frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 - U(\rho) - B_0\mu\varepsilon^2 x - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \varepsilon\left(a_1 x + a_2 y + a_3 z\right)\sin t\right] d\Omega - \mu\varepsilon^2\left(|\Sigma| - \cos\alpha |S|\right)\right\} dt \tag{2}$$

при обмеженнях

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\nabla\varphi) = 0 \quad \text{в} \quad Q(t); \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \quad S,$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \frac{H_t}{\sqrt{1+(\nabla H)^2}} = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma(t) \tag{3}$$

та умовах для гладких ізохронних варіацій

$$\delta H|_{t=t_1} = \delta H|_{t=t_2} = 0; \qquad \delta\rho|_{t=t_1} = \delta\rho|_{t=t_2} = 0, \tag{4}$$

$U(\rho)$ *— деяка неперервно диференційовна функція та за визначенням*

$$p \overset{\text{def}}{=} \rho^2\frac{\partial U}{\partial\rho}.$$

Доведення. Розглянемо тотожність

$$\int\limits_{Q(t)} \rho\left[\frac{\partial f}{\partial t} + (\nabla f, \nabla\psi)\right]d\Omega - \frac{d}{dt}\int\limits_{Q(t)} \rho f\, d\Omega =$$
$$= -\int\limits_{Q(t)}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\nabla\psi)\right]f\,d\Omega + \int\limits_{\Sigma(t)}\left[\frac{\partial\psi}{\partial n} - \frac{H_t}{\sqrt{1+(\nabla H)^2}}\right]\rho f\,ds + \int\limits_S \frac{\partial\psi}{\partial n}\rho f\,ds \tag{5}$$

для довільної області $Q(t)$, $\partial Q = S \cup \Sigma(t)$, де $\Sigma(t)$ — рухома частина границі області, а $f(x, y, z, t)$, $\psi(x, y, z, t)$ — деякі гладкі функції. Якщо виконано (3), а $f = \varphi$, $\psi = \varphi$, то права частина тотожності (5) обертається в нуль. Віднявши ліву частину (5) від функціонала (2), маємо

$$G(H, \varphi, \rho) = \int\limits_{t_1}^{t_2}\left\{\int\limits_{Q(t)} \rho\left[-\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 - B_0\mu\varepsilon^2 x -\right.\right.$$
$$\left.\left. - \varepsilon(a_1x + a_2y + a_3z)\sin t - U(\rho)\right]d\Omega - \mu\varepsilon^2(|\Sigma| - \cos\alpha|S|)\right\}dt +$$
$$+ \left(\int\limits_{Q(t)}\rho\varphi\,d\Omega\right)\Bigg|_{t=t_1}^{t=t_2}. \tag{6}$$

Обчислимо варіацію δG, враховуючи умови (4):

$$\delta G(H, \varphi, \rho) = \int\limits_{t_1}^{t_2}\left\{\int\limits_{Q(t)} \delta\rho\left[-\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 - B_0\mu\varepsilon^2 x -\right.\right.$$
$$\left. - \varepsilon(a_1x + a_2y + a_3z)\sin t - U(\rho) - \rho\frac{\partial U}{\partial\rho}\right]d\Omega -$$
$$- \int\limits_{Q(t)} \rho\left[\frac{\partial\delta\varphi}{\partial t} + (\nabla\varphi, \nabla\delta\varphi)\right]d\Omega +$$
$$+ \int\limits_{\Sigma(t)}\left(\rho\left[-\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 - U(\rho) + B_0\mu\varepsilon^2 x + \varepsilon(a_1x + a_2y + a_3z)\sin t\right] +\right.$$

$$+ \mu\varepsilon^2 \operatorname{div} \frac{\nabla H}{\sqrt{1+(\nabla H)^2}} \Bigg) \frac{\delta H}{\sqrt{1+(\nabla H)^2}} ds \; +$$

$$+ \; \mu\varepsilon^2 \int\limits_{\partial\Sigma(t)} \left[\frac{H_y W_y + H_z W_z - W_x}{|\nabla W| \sqrt{1+(\nabla H)^2}} - \cos\alpha \right] \frac{\delta H}{\sqrt{1+(\nabla H)^2}} d\gamma \Bigg\} dt \; + \; \left(\int\limits_{Q(t)} \rho \delta\varphi \, d\Omega \right) \Bigg|_{t=t_1}^{t=t_2}.$$

Якщо виконано (5) (коли $f = \delta\varphi$, $\psi = \varphi$), то з урахуванням (3), (4) маємо

$$\delta G = \int\limits_{t_1}^{t_2} \Bigg\{ \int\limits_{Q(t)} \delta\rho \Bigg[-\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 - B_0 \mu \varepsilon^2 x \; -$$

$$- \; \varepsilon(a_1 x + a_2 y + a_3 z) \sin t - \rho \frac{\partial U}{\partial \rho} - U(\rho) \Bigg] d\Omega \; +$$

$$+ \int\limits_{\Sigma(t)} \Bigg(\rho \left[-\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + U(\rho) - B_0 \mu \varepsilon^2 x - \varepsilon(a_1 x + a_2 y + a_3 z) \sin t \right] +$$

$$+ \mu\varepsilon^2 \operatorname{div} \frac{\nabla H}{\sqrt{1+(\nabla H)^2}} \Bigg) \frac{\delta H}{\sqrt{1+(\nabla H)^2}} ds \; +$$

$$+ \; \mu\varepsilon^2 \int\limits_{\partial\Sigma(t)} \left[\frac{W_y H_y + W_z H_z - W_x}{|\nabla W| \sqrt{1+(\nabla H)^2}} - \cos\alpha \right] \frac{\delta H}{\sqrt{1+(\nabla H)^2}} d\gamma \Bigg\} dt \; = \; 0.$$

Використовуючи лему варіаційного числення, одержуємо умови

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + B_0 \mu \varepsilon^2 x + \varepsilon(a_1 x + a_2 y + a_3 z) \sin t \; =$$

$$= \; -U(\rho) - \rho \frac{\partial U}{\partial \rho} \quad \text{в} \quad Q(t),$$

$$\rho \left[\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + U(\rho) + B_0 \mu \varepsilon^2 x + \varepsilon(a_1 x + a_2 y + a_3 z) \sin t \right] - \tag{7}$$

$$- \; \mu\varepsilon^2 \operatorname{div} \frac{\nabla H}{\sqrt{1+(\nabla H)^2}} \; = \; 0 \quad \text{на} \quad \Sigma(t),$$

$$\frac{W_y H_y + W_z H_z - W_x}{|\nabla W| \sqrt{1+(\nabla H)^2}} \; = \; \cos\alpha \quad \text{на} \quad \partial\Sigma(t).$$

З першої рівності (7) після взяття операції grad згідно з визначенням p одержуємо друге рівняння системи (1). Друга рівність з (7) перетворюється в

$$p + \mu\varepsilon^2 \operatorname{div} \frac{\nabla H}{\sqrt{1+(\nabla H)^2}} \; = \; p_0,$$

оскільки p визначається з точністю до константи, а з третьої маємо останнє рівняння системи (1). Теорему доведено.

В [2, 3] показано, що при виконанні умов теореми 1 з припущенням, що H, ρ, p, φ є аналітичними функціями параметра ε в околі 0, нелінійна задача з вільною границею (1) може бути зведена до розв'язання послідовності нелінійних задач, а її розв'язок може бути з точністю до малих вищого порядку поданий у вигляді

$$\begin{aligned}
\varphi(x,y,z,t) &= \varepsilon\Phi_1(x,y,z)\cos t + O(\varepsilon^2),\\
p(x,y,z,t) &= p_0 + \varepsilon\left[\Phi_1 - a_1x - a_2y - a_3z\right]\sin t + O(\varepsilon^2),\\
\rho(x,y,z,t) &= 1 + \varepsilon k^2\left[\Phi_1 - a_1x - a_2y - a_3z\right]\sin t + O(\varepsilon^2),\\
H(y,z,t) &= H_0(y,z) + \varepsilon H_*(y,z)\sin t + O(\varepsilon^2).
\end{aligned} \tag{8}$$

Необхідною умовою існування такого розв'язку є нелінійна стаціонарна крайова задача з вільною границею відносно Σ_0 $(x = H_0(y,z))$ (усередненим положенням поверхні розділу $\Sigma(t)$; $\Sigma_0 = \langle\Sigma(t)\rangle$, $Q_0 = \langle Q(t)\rangle$ — вібро-капілярної форми рівноваги):

$$\begin{gathered}
\mu\,\mathrm{div}\frac{\nabla H_0}{\sqrt{1+(\nabla H_0)^2}} - \mu B_0 x + \frac{k^2}{4}\left[\Phi_1 - a_1x - a_2y - a_3z\right]^2 - \\
- \frac{1}{4}(\nabla\Phi_1)^2 + \frac{H_*}{2}\left[\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} - a_1\right] = \mathrm{const} \quad \text{на} \quad \Sigma_0,\\
\frac{W_yH_{0y} + W_zH_{0z} - W_x}{|\nabla W|} = \cos\alpha\sqrt{1+(\nabla H_0)^2} \quad \text{на} \quad \partial\Sigma_0,
\end{gathered} \tag{9}$$

де функції Φ_1, H_0, H_* пов'язані умовами

$$\begin{aligned}
\Delta\Phi_1 + k^2\Phi_1 &= k^2\left(a_1x + a_2y + a_3z\right) \quad \text{в} \quad Q_0,\\
\frac{\partial\Phi_1}{\partial n} &= 0 \quad \text{на} \quad S,\\
\Phi_1 &= a_1x + a_2y + a_3z \quad \text{на} \quad \Sigma_0,\\
\frac{\partial\Phi_1}{\partial n} &= \frac{H_*}{\sqrt{1+(\nabla H_0)^2}} \quad \text{на} \quad \Sigma_0.
\end{aligned} \tag{10}$$

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми* 1 *і, крім того,* H, φ, ρ, p — *аналітичні функції параметра* ε *в околі* 0. *Тоді задача знаходження розв'язків задачі* (1) *з точністю до малих вищого порядку і стаціонарних точок функціонала типу Гамільтона – Остроградського (теорема* 1*) еквівалентна задачі визначення стаціонарних точок усередненого функціонала*

$$\langle G(H,\varphi,\rho)\rangle_t = \mathrm{const} - \varepsilon^2 G^*(H_0, H_*, \Phi_1) + o(\varepsilon^2),$$

де

$$\begin{aligned}
G^*(H_0,H_*,\Phi_1) &= \int\limits_{Q_0}\mu B_0 x\,d\Omega + \\
&+ \frac{1}{4}\int\limits_{Q_0}\left[(\nabla\Phi_1)^2 - k^2(\Phi_1 - a_1x - a_2y - a_3z)^2\right]d\Omega + \\
&+ \mu(|\Sigma_0| - \cos\alpha\,|S|) - \frac{1}{2}\int\limits_{\Sigma_0}\frac{H_*}{\sqrt{1+(\nabla H_0)^2}}(\Phi_1 - a_1x - a_2y - a_3z)\,ds
\end{aligned}$$

при обмеженнях (10).

Доведення. *Необхідність.* Згідно з теоремою 1 знаходження розв'язків вихідної задачі (1) еквівалентне визначенню стаціонарних точок функціонала (2) при обмеженнях (3). З іншого боку, для функцій H, φ, ρ, p виконується (8). Підставляючи (8) у варіаційний принцип теореми 1 та застосовуючи процедуру усереднення відповідного функціонала за часом, маємо $\langle G(H, \varphi, \rho)\rangle_t = \text{const} - \varepsilon^2 G^*(H_0, H_*, \Phi_1) + o(\varepsilon^2)$. Кінематичні обмеження (3) набувають вигляду (10). З точністю до малих вищого порядку задача визначення стаціонарних точок функціонала типу G буде зведена до визначення стаціонарних точок функціонала $G^*(H_0, H_*, \Phi_1)$.

Достатність. Нехай (H_0, H_*, Φ_1) — стаціонарна точка функціонала G^* при обмеженнях (10). Обчислимо його першу варіацію в цій точці. Не порушуючи загальності та для спрощення математичних викладок будемо припускати, що область Ω — прямий циліндр ($W(y,z)<0$, $-h_1<x<h_2$). (Доведення у більш складних областях може бути проведене з використанням відповідних формул роботи [1] щодо дивергентно-градієнтного члена). Маємо

$$\delta G^* = \int_{\Sigma_0} \left\{ -\mu \operatorname{div} \frac{\nabla H_0}{\sqrt{1+(\nabla H_0)^2}} + \mu B_0 x - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{4}\left[k^2(\Phi_1 - a_1 x - a_2 y - a_3 z)^2 - (\nabla\Phi_1)^2\right] - \frac{1}{2} H_*[\Phi_{1x} - a_1] \right\} \frac{\delta H_0}{\sqrt{1+(\nabla H_0)^2}}\, ds -$$

$$-\mu \int_{\partial\Sigma_0} \left[\frac{W_y H_y + W_z H_z}{|\nabla W| \sqrt{1+(\nabla H_0)^2}} - \cos\alpha \right] \delta H_0\, d\gamma -$$

$$-\frac{1}{2} \int_{Q_0} \left[\Delta\Phi + k^2\Phi_1 - k^2(a_1 x + a_2 y + a_3 z)\right] \delta\Phi_1\, d\Omega -$$

$$-\frac{1}{2} \int_{\Sigma_0} [\Phi_1 - a_1 x - a_2 y - a_3 z] \frac{\delta H_*}{\sqrt{1+(\nabla H_0)^2}}\, ds +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_S \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} \delta\Phi_1\, ds + \frac{1}{2}\int_{\Sigma_0} \left[\frac{\partial\Phi_1}{\partial n} - \frac{H_*}{\sqrt{1+(\nabla H_0)^2}} \right] \delta\Phi_1\, ds.$$

Враховуючи обмеження (10) і прирівнюючи δG^* до 0, одержуємо задачу (9). Тому для розв'язків задачі (1) виконуються співвідношення (8), а побудовані у відповідності з ними функції H, φ, ρ, p з точністю до малих вищого порядку є стаціонарними точками функціоналу G. Наслідком теореми 2 є варіаційна постановка задачі про ВКРФ [3]. Теорему доведено.

Теорема 2 дає лише необхідну умову знаходження вібро-капілярних форм рівноваги. Розглянемо зараз другу варіацію функціонала G^* (для цього скористаємося виглядом його першої варіації та припущенням теореми 2) та виведемо умову її додатної визначеності:

$$\delta^2 G^* = \int_{\Sigma_0} \left(-\mu \operatorname{div} \left[\frac{\nabla\delta H_0}{\sqrt{1+(\nabla H_0)^2}} - \nabla H_0 \frac{(\nabla H_0, \nabla\delta H_0)}{\left(1+(\nabla H_0)^2\right)^{3/2}} \right] + \mu B_0 \delta H_0 + \right.$$

$$+ \frac{1}{2}\Big\{ (\nabla\Phi_1, \nabla\delta\Phi_1) - k^2(\Phi_1 - a_1 x - a_2 y - a_3 z)\delta\Phi_1 +$$

$$+ (\nabla\Phi_1, \nabla\Phi_{1x})\delta H_0 - H_*(\delta\Phi_1)_x - k^2(\Phi_1 - a_1 x - a_2 y - a_3 z)(\Phi_{1x} - a_1)\delta H_0 -$$

$$- (H_*\Phi_{1xx})\delta H_0 - (\Phi_{1x} - a_1)\delta H_*\Big\}\Bigg)\frac{\delta H_0}{\sqrt{1+(\nabla H_0)^2}}\,ds\, -$$

$$-\mu\int\limits_{\partial\Sigma_0}\left[\frac{W_y(\delta H_0)_y + W_z(\delta H_0)_z}{|\nabla W|\sqrt{1+(\nabla H_0)^2}} - \frac{\delta\left(\sqrt{1+(\nabla H_0)^2}\right)}{\sqrt{1+(\nabla H_0)^2}}\frac{W_y H_{0y} + W_z H_{0z}}{|\nabla W|\sqrt{1+(\nabla H_0)^2}}\right]\delta H_0\,d\gamma\ +$$

$$+\ \frac{1}{2}\int\limits_S\frac{\partial\delta\Phi_1}{\partial n}\,\delta\Phi_1\,ds\ -\ \frac{1}{2}\int\limits_{Q_0}\left[\Delta\delta\Phi_1 + k^2\delta\Phi_1\right]\delta\Phi_1\,d\Omega\ -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\Sigma_0}\left[\Delta\Phi_1 + k^2\Phi_1 - k^2(a_1x + a_2y + a_3z)\right]\frac{\delta\Phi_1\delta H_0}{\sqrt{1+(\nabla H_0)^2}}\,ds\ +$$

$$+\ \frac{1}{2}\int\limits_{\Sigma_0}\left(\frac{\partial\delta\Phi_1}{\partial n} + \frac{1}{\sqrt{1+(\nabla H_0)^2}}\left[\left(\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x\partial y}H_{0y} - \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x\partial z}H_{0z}\right)\delta H_0\ -\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}(\delta H_0)_y - \frac{\partial\Phi_1}{\partial z}(\delta H_0)_z - \delta H_*\right]\right)\delta\Phi_1\,ds -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\Sigma_0}\left(\delta\Phi_1 + [\Phi_{1x} - a_1]\delta H_0\right)\frac{\delta H_*}{\sqrt{1+(\nabla H_0)^2}}\,ds.$$

Нехай (H_0, H_*, Φ_1) — стаціонарна точка функціонала G^*. Тоді виконуються рівняння (9), (10), тобто:

$$\Delta\delta\Phi_1 + k^2\delta\Phi_1 = 0 \quad \text{в} \quad Q_0;$$

$$\frac{\partial\delta\Phi_1}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \quad S;$$

$$\delta\Phi_1 = (a_1 - \Phi_{1x})\delta H_0 \quad \text{на} \quad \Sigma_0,$$

$$\frac{\partial\delta\Phi_1}{\partial n} + \frac{1}{\sqrt{1+(\nabla H_0)^2}}\left[\left(\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x\partial y}H_{0y} - \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x\partial z}H_{0z}\right)\delta H_0\ -\right.$$

$$\left.-\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}(\delta H_0)_y - \frac{\partial\Phi_1}{\partial z}(\delta H_0)_z\right] = \frac{\delta H_*}{\sqrt{1+(\nabla H_0)^2}} \quad \text{на} \quad \Sigma_0, \qquad (11)$$

$$\frac{W_y(\delta H_0)_y + W_z(\delta H_0)_z}{|\nabla W|} = \cos\alpha\,\frac{(\nabla H_0, \nabla\delta H_0)}{\sqrt{1+(\nabla H_0)^2}} \quad \text{на} \quad \partial\Sigma_0.$$

Підставляючи (11) у вираз для другої варіації, маємо

$$\delta G^*(H_0, H_*, \Phi_1) = \int\limits_{\Sigma_0}\frac{A\,\delta H_0\,\delta H_0}{\sqrt{1+(\nabla H_0)^2}} = (A\,\delta H_0, \delta H_0)_{L_2,\frac{1}{\sqrt{1+(\nabla H_0)^2}}(\Sigma_0)},$$

де оператор A визначається таким чином:

$$Ah \equiv -\mu\,\mathrm{div}\left[\frac{\nabla h}{\sqrt{1+(\nabla H_0)^2}} - \nabla H_0\frac{(\nabla H_0, \nabla h)}{\left(1+(\nabla H_0)^2\right)^{3/2}}\right] + \mu B_0 h\ +$$

$$+\ \frac{1}{2}\Big\{(\nabla\Phi_1, \nabla\Phi) - k^2(\Phi_1 - a_1x - a_2y - a_3z)\Phi - \Phi_x H_* +$$

$$+ (\nabla\Phi_{1x}, \nabla\Phi_1)h - k^2(\Phi_1 - a_1x - a_2y - a_3z)(\Phi_{1x} - a_1)h -$$

$$- (\Phi_{1xx}H_*)h - (\Phi_{1x} - a_1)h_*\Big\} \quad \text{на} \quad \Sigma_0,$$

$$\Delta\Phi + k^2\Phi = 0 \quad \text{в} \quad Q_0; \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \quad S;$$

$$\Phi = (a_1 - \Phi_{1x})h \quad \text{на} \quad \Sigma_0,$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} + \frac{1}{\sqrt{1+(\nabla H_0)^2}}\left[\left(\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x\partial y}H_{0y} - \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x\partial z}H_{0z}\right)h - \frac{\partial\Phi_1}{\partial y}h_y - \frac{\partial\Phi_1}{\partial z}h_z\right] =$$

$$= \frac{h_*}{\sqrt{1+(\nabla H_0)^2}} \quad \text{на} \quad \Sigma_0,$$

$$\frac{W_y h_y + W_z h_z}{|\nabla W|} = \cos\alpha\,\frac{(\nabla H_0, \nabla h)}{\sqrt{1+(\nabla H_0)^2}} \quad \text{на} \quad \partial\Sigma_0.$$

В [2] показано, що оператор A має суто точковий спектр з єдиною граничною точкою $+\infty$, а набір власних функцій утворює базис у просторі $L_{2,\frac{1}{\sqrt{1+(\nabla H_0)^2}}}(\Sigma_0)$, тому стійкість ВКРФ визначається з умови додатності власних значень оператора A.

Тим самим доведено теорему, яка є основним результатом даної роботи.

Теорема 3 (необхідна і достатня умова стійкості ВКРФ). *За умов теореми* 2 *вібро-капілярна форма рівноваги* Σ_0 *стійка тоді і лише тоді, коли на ній досягається мінімум функціонала* G^* *при обмеженнях* (10).

Наведена варіаційна ознака дозволяє не тільки будувати ефективні наближені методи знаходження вібро-капілярних рівноважних форм, але й досліджувати їх на стійкість.

1. *Мышкис А. Д., Бабский В. Г., Жуков М. Ю. и др.* Методы решения задач гидромеханики для условий невесомости. – Киев: Наук. думка, 1992. – 592 с.
2. *Луковский И. А., Тимоха А. Н.* Вариационные методы в нелинейной динамике ограниченного объема жидкости. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. – 400 с.
3. *Mikhayluk A. V.* Variational approaches for some nonlinear boundary value problems with free surface from vibrational interaction theory // Сучасні фізико-математичні дослідження молодих науковців вузів України: Зб. наук. пр. – Київ: Київ. ун-т, 1995. – С. 31–37.

Одержано 23.04.96