УДК 517.9

В. І. Ткаченко (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНУ ДИХОТОМІЮ ЛІНІЙНИХ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ*

We consider a system of linear difference equations $x_{n+1} = A(n)x_n$ in an m-dimensional real or complex space V^m. It is assumed that $\det A(n) = 0$ for some or all $n \in Z$. We study the exponential dichotomy of this system. We prove that if the sequence $\{A(n)\}$ is Poisson stable or recurrence, then the exponential dichotomy on the semi-axis implies the exponential dichotomy on the entire axis. If the sequence $\{A(n)\}$ is almost periodic and the system has the exponential dichotomy on the set $\{k, \ldots, k+T\}$, $k \in Z$, with sufficiently large T, then the system is exponentially dichotomous on Z.

У m-вимірному дійсному чи комплексному просторі V^m розглядається система лінійних різницевих рівнянь $x_{n+1} = A(n)x_n$, $\det A(n) = 0$ при деяких або всіх значеннях n. Для таких систем вивчається експоненціальна дихотомія. Доведено: якщо послідовність $\{A(n)\}$ рекурентна чи стійка за Пуассоном у замиканні простору зсувів, то з експоненціальної дихотомії на півосі випливає експоненціальна дихотомія на всій осі. Для майже періодичної послідовності $\{A(n)\}$ доведено, що з експоненціальної дихотомії на скінченному інтервалі $\{k, \ldots, k+T\}$ ($k \in Z, T$ — досить велике ціле число) випливає експоненціальна дихотомія на Z.

Нехай V^m — m-вимірний дійсний простір R^m чи комплексний простір C^m, Z — множина цілих чисел. Для цілого a введемо множину $Z_{[a]} = \{n : n \in Z, n \geq a\}$. Множину цілих чисел $\{k, k+1, \ldots, k+m\}$ будемо позначати через $\{k, k+m\}$. $M(m, V)$ — множина матриць розміру $m \times m$ з елементами, які належать V, $\|\cdot\|$ — норма вектора з V^m чи матриці з $M(m, V)$.

Розглянемо систему лінійних різницевих рівнянь

$$x_{n+1} = A(n)x_n, \quad n \in Z, \tag{1}$$

де $x_n \in V^m$, $A(n) \in M(m, V)$, $\|A(n)\| \leq L$, $n \in Z$; $L > 0$. Через $\Phi(n, k)$ позначимо фундаментальну матрицю розв'язків системи (1)

$$\Phi(n, k) = A(n-1) \cdot \ldots \cdot A(k), \quad n \geq m. \tag{2}$$

$\Phi(k, k) = I$, I — одинична матриця. Тоді розв'язок $x(n, k, x_k)$ системи (1), який при $n = k$ набуває значення x_k, має вигляд

$$x(n, k, x_k) = \Phi(n, k)x_k.$$

Нехай J — деяка множина цілих чисел.

Означення 1. *Рівняння* (1) *має експоненціальну дихотомію* (*е. д.*) *на множині $n \in J$, якщо існують додатні числа ν, K, K_1 такі, що для кожного $n_0 \in J$ простір V^m можна зобразити у вигляді прямої суми $V^m = S_{n_0} \oplus U_{n_0}$ таким чином, що виконуються умови*:

1) $\Phi(n, n_0)S_{n_0} \subseteq S_n$, $\Phi(n, n_0)U_{n_0} \subseteq U_n$, $n \geq n_0$, $n \in J$;

2) *для відповідних проекторів* $\sup_n \|P_n\| + \sup_n \|Q_n\| < \infty$;

3) *для кожного розв'язку $x(n, n_0, x_0)$ рівняння* (1), *який починається на S_{n_0}, $x_0 \in S_{n_0}$, виконується оцінка*

$$\|x(n, n_0, x_0)\| \leq K \exp(-\nu(n-k)\|x(k, n_0, x_0)\|, \quad n \geq k \geq n_0, \quad k, n \in J; \tag{3}$$

* Виконана при фінансовій підтримці Державного комітету України з питань науки та технологій.

4) *для кожного розв'язку* $x(n, n_0, x_0)$ *рівняння* (1) *з* $x_0 \in U_{n_0}$ *виконується оцінка*

$$\| x(n, n_0, x_0) \| \geq K_1 \exp(\nu(n-k)) \| x(k, n_0, x_0) \|, \quad n \geq k \geq n_0, \quad k, n \in J. \tag{4}$$

Ми не вимагаємо невиродженості матриць $A(n)$, $n \in Z$, тому розв'язки, що починаються на S_{n_0}, можуть вироджуватися в нуль. Розв'язки системи можуть не продовжуватися чи продовжуватися неоднозначно на від'ємну піввісь. Під $x(n, n_0)$ розуміємо розв'язок системи (1), який однозначно визначений в точці n_0 і продовжується на $n \geq n_0$. Розмірності сепаратрисних многовидів S_n та U_n можуть змінюватися при зміні n.

Лема 1. *При* $n > k$ *справедливі нерівності*

$$\dim S_n \leq \dim S_k, \quad \dim U_n \geq \dim U_k. \tag{5}$$

Доведення. Розглянемо стійкий многовид S_n для деякого $n \in J$. З означення стійкого многовиду випливає $\ker A(n) \subseteq S_n$. Образ S_n при відображенні $A(n)$ знаходиться в S_{n+1}. Його розмірність рівна

$$\dim A(n) S_n = \dim S_n - \dim \ker A(n).$$

Доповнення до $A(n) S_n$ в S_{n+1} має розмірність $\dim S_{n+1} - \dim S_n + \dim \ker A(n)$ і належить множині $V^m \setminus A(n) V^m$. Тому справедлива нерівність

$$\dim S_{n+1} - \dim S_n + \dim \ker A(n) \leq \dim \ker A(n)$$

або $S_{n+1} \leq \dim S_n$. Друга нерівність (5) доводиться на підставі взаємної доповнювальності S_n і U_n у V^m. Лему доведено.

Лема 2. *Нехай для послідовності цілих чисел* $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$, $n_j \to +\infty$, $j \to +\infty$, *існує поточкова границя*

$$\tilde{A}(n) = \lim_{j \to \infty} A(n + n_j).$$

Тоді якщо система (1) *е. д. на півосі* $Z_{[a]}$, *то система*

$$y_{n+1} = \tilde{A}(n) y_n \tag{6}$$

е. д. на осі $n \in Z$ *і розмірності стійкого та нестійкого многовидів* $\tilde{S}_n$, $\tilde{U}_n$ *не змінюються при зміні* n.

Доведення. Система (1) е. д. і для її сепаратрисних многовидів справедливі оцінки (5). Тому починаючи з деякого номера $\tilde{n}_0$ розмірності многовидів S_n та U_n стабілізуються: $\dim S_n = m^{(s)}$, $\dim U_n = m^{(u)} = m - m^{(s)}$ для всіх $n \geq \tilde{n}_0$. Відповідно $\operatorname{rank} \tilde{P}_n = m^{(s)}$, $\operatorname{rank} \tilde{Q}_n = m^{(u)}$ при $n \geq \tilde{n}_0$.

Поряд з системою (6) запишемо її наближення

$$y_{n+1}^{(j)} = A^{(j)}(n) \, y_n^{(j)}, \tag{7}$$

де $A^{(j)}(n) = A(n + n_j)$, $n \in Z$. Перепишемо умови (3), (4), використовуючи відповідні проектори та фундаментальну матрицю розв'язків

$$\| \Phi(n, n_0) P_{n_0} \| \leq K \exp(-\nu(n-k) \| \Phi(k, n_0) P_{n_0} \|, \quad n \geq k \geq n_0, \tag{3'}$$

$$\| \Phi(n, n_0) Q_{n_0} \| \geq K_1 \exp(\nu(n-k) \| \Phi(k, n_0) Q_{n_0} \|, \quad n \geq k \geq n_0. \tag{4'}$$

Випишемо фундаментальну систему розв'язків для системи (7) :

$$\Phi^{(j)}(n,k) = A^{(j)}(n-1)\dots A^{(j)}(k) =$$
$$= A(n+n_j)\dots A(k+n_j-1) = \Phi(n+n_j, k+n_j). \tag{8}$$

Враховуючи (8) та рівності $P_{n_0}^{(j)} = P_{n_0+n_j}$, $Q_{n_0}^{(j)} = Q_{n_0+n_j}$, для стійкого та нестійкого многовидів системи (7) одержуємо оцінки

$$\|\Phi^{(j)}(n,n_0)P_{n_0}^{(j)}\| \le K\exp(-\nu(n-k))\|\Phi^{(j)}(k,n_0)P_{n_0}^{(j)}\|, \quad n\ge k\ge n_0, \tag{3''}$$

$$\|\Phi^{(j)}(n,n_0)Q_{n_0}^{(j)}\| \ge K_1\exp(\nu(n-k))\|\Phi^{(j)}(k,n_0)Q_{n_0}^{(j)}\|, \quad n\ge k\ge n_0. \tag{4''}$$

Оскільки $n_j\to+\infty$, то починаючи з деякого номера $n_j>\tilde n_0$, тому ранги проекторів $P_{n_0}^{(j)}$ та $Q_{n_0}^{(j)}$ можна вважати сталими. Фундаментальна матриця системи (6) має вигляд

$$\tilde\Phi(n,k) = \tilde A(n-1)\dots\tilde A(k) =$$
$$= \lim_{n_j\to\infty} A(n+n_j-1)\dots A(k+n_j), \quad n\ge k.$$

За умовою 2 означення е. д. множина матриць-проекторів P_n, $n\in Z$, обмежена, її замикання в $M(m,V)$ компактне. Тому у послідовності $\{n_j\}$ існує підпослідовність $\{n_{j_1}\}$ така, що $P_{n_0}^{j_1}$ збігається до деякого проектора P'_{n_0} рангу $m^{(s)}$. Аналогічно $Q_{n_0}^{j_1}$ збігається до проектора Q'_{n_0} рангу $m^{(u)}$, причому $P'_{n_0}+Q'_{n_0}=I$. Нехай для деякої іншої підпослідовності $\{n_{j_2}\}$ послідовності $\{n_j\}$ відповідні послідовності проекторів збігаються до проекторів P''_{n_0} та Q''_{n_0} тих же рангів $m^{(s)}$ та $m^{(u)}$.

Проектор P'_{n_0} визначає підпростір S'_{n_0}. Переходячи в (3″) до границі за підпослідовністю $\{n_{j_1}\}$, заключаємо, що розв'язки системи (6), які починаються на S'_{n_0}, задовольняють умову (3). Аналогічно, враховуючи (4″), розв'язки системи (6), які починаються на доповнюючому просторі U'_{n_0} (який визначається проектором Q'_{n_0}), задовольняють умову (4).

Проектор P''_{n_0} визначає підпростір S''_{n_0} розмірності $m^{(s)}$. Розв'язки, які починаються на S''_{n_0}, задовольняють оцінку (3). Тому розв'язки, які починаються на підпросторі $S'_{n_0}\oplus S''_{n_0}$, теж задовольняють умову (3). Але розв'язки з доповнень до кожного S'_{n_0} та S''_{n_0} задовольняють альтернативну умову (4). Тому підпростори S'_{n_0} та S''_{n_0} співпадають. Тим самим для рівняння (6) побудовано підпростір S''_{n_0}, який визначає стійкі розв'язки. Відмітимо, що множина розв'язків, які задовольняють умову (3), утворює підпростір, а множина розв'язків, що задовольняють умову (4), підпростір не утворює.

Множину початкових значень, яким відповідають розв'язки системи (6), що задовольняють умову (4), позначимо через $\tilde U_{n_0}$. Очевидно, $U'_{n_0}\cup U''_{n_0}\subset\tilde U_{n_0}$. $\tilde U_{n_0}$ може співпадати з $V^m\setminus S'_{n_0}$, хоча в загальному випадку є його підмножиною.

Справедливі співвідношення $A_{n_0}\tilde U_{n_0}\subset\tilde U_{n_0+1}$, $A_{n_0}\tilde S_{n_0}\subset S'_{n_0+1}$. За побудовою для кожного n_0 множина $\tilde U_{n_0}$ містить підпростір розмірності $m^{(u)}$.

Розглянемо послідовність множин $\tilde U_n$, $n\to-\infty$. Множини тих розв'язків системи (6), які починаються на $\tilde{U}_n$, продовжуються на від'ємну піввісь і на від'ємній півосі задовольняють умову (4), утворюють підпростір. Позначимо простір початкових значень цих розв'язків через U_n^*. Розмірність U_n^* не менша $m^{(u)}$, з іншого боку, U_n^* належить доповненню до S_n. Тому $S_n \oplus U_n^* = V^m$. Тим самим для кожного $n \in Z$ побудовано розклад простору V^m, який задовольняє всі умови означення 1. Теорему доведено.

Зауваження. Як випливає з доведення леми 2, у випадку сталих розмірностей многовидів S_n та U_n умову 4 означення 1 можна замінити на таку:

4´) кожний розв'язок $x(n, n_0, x_0)$ системи (1) з $x_0 \in U_{n_0}$ однозначно продовжується на від'ємну піввісь і для нього виконується умова

$$\| x(n, n_0, x_0) \| \le K_2 \exp(\nu(n-k)) \| x(k, n_0, x_0) \|, \quad n \le k \le n_0.$$

У такому вигляді означення е. д. для системи (1) співпадає з означенням робіт [1, 2].

Позначимо через $\mathcal{A}$ множину обмежених послідовностей зі значеннями в $M(m, V)$. Поряд з послідовністю $A = \{A(n),\ n \in Z\}$ розглянемо послідовності $A^{(j)} = \{A(n+j),\ n \in Z\}$ для всіх цілих j. Тоді в топології поточкової збіжності в $\mathcal{A}$ множина

$$H(A) = \operatorname{cls}\{\{A(n+j),\ n \in Z\},\ j \in Z\}$$

компактна. На $H(A)$ вводиться динамічна система

$$B \cdot t = \{\{B(n+t)\},\ n \in Z\}, \quad t \in Z, \tag{9}$$

для $B = \{\{B(n)\},\ n \in Z\} \in H(A)$.

Означення 2. *Послідовність $A = \{A(n),\ n \in Z\}$ називається стійкою за Пуассоном, якщо вона є граничною послідовністю зсувів самої себе, тобто існує послідовність цілих чисел $\{n_j\}$, $n_j \to +\infty$, $j \to +\infty$, така, що*

$$A(n) = \lim_{j \to +\infty} A(n + n_j),\ n \in Z.$$

Послідовність $A = \{A(n),\ n \in Z\}$ називається рекурентною, якщо траєкторія $A \cdot t$, $t \in Z$, рекурентна в $H(A)$ в топології поточкової збіжності, тобто $H(A)$ є компактною мінімальною множиною динамічної системи (9).

Рекурентна послідовність, очевидно, стійка за Пуассоном.

Теорема 1. *Нехай послідовність $A = \{A(n),\ n \in Z\}$ стійка за Пуассоном. Тоді якщо система* (1) *е. д. на півосі $Z_{[a]}$ для деякого $a \in Z$, то вона е. д. на осі $n \in Z$ і розмірності стійкого та нестійкого многовидів не змінюються при зміні n.*

Доведення. За умовою теореми послідовність $\{A(n)\}$ є граничною системою зсувів самої себе. За лемою 2 вона експоненціально дихотомічна на осі зі сталими розмірностями стійкого та нестійкого многовидів.

Послідовність $\{A(n)\}$ майже періодична (м. п.), якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує відносно щільна множина ε-майже періодів n_ε: $\|A(n+n_\varepsilon) - A(n)\| < \varepsilon$ $\forall\, n \in Z$ [3, 4]. М. п. послідовність є рекурентною, тому справедливе наступне твердження.

Наслідок. *Нехай послідовність $\{A(n)\}$ майже періодична. Тоді з експоненціальної дихотомії системи* (1) *на півосі $Z_{[a]}$ для деякого цілого a випливає її експоненціальна дихотомія на осі зі сталими розмірностями стійкого та нестійкого многовидів.*

В роботі [5] доведено: якщо лінійна система звичайних диференціальних рівнянь з м. п. коефіцієнтами експоненціально дихотомічна на скінченному відрізку досить великої довжини, то вона е. д. і на всій осі. Покажемо, що аналогічний результат справедливий для системи різницевих рівнянь з м. п. коефіцієнтами (1). Відмітимо, що в [6] доведено аналогічне твердження при умові $|\det A(n)| \geq \alpha > 0 \quad \forall\, n$. Скористаємося ідеями робіт [5, 7].

Лема 3. *Нехай система* (1) *е. д. на множині* J. *Тоді існують додатне* $\theta > 0$ *та натуральне* h *числа такі, що для кожного* $n_0 \in J$ *для розв'язків* $x(n, n_0)$ *справедлива оцінка*

$$\| x(s, n_0) \| \leq \theta \max_{|n-s| \leq h} \| x(n, n_0) \| \tag{10}$$

для $s \geq n_0 + h$, $s \in J$, $n \in J$.

Доведення. Розв'язок $x(n, n_0)$, $x(n_0, n_0) = x_0$ запишемо так:

$$x(n, n_0) = x_1(n, n_0) + x_2(n, n_0) =$$

$$= \Phi(n-1, n_0) P_{n_0} x_0 + \Phi(n-1, n_0) Q_{n_0} x_0.$$

Нехай для деякого цілого s: $\| x_2(n, n_0) \| \geq \| x_1(n, n_0) \|$. Тоді для $n \geq s$

$$\| x(n, n_0) \| = \| x_1(n, n_0) + x_2(n, n_0) \| \geq$$

$$\geq K_1 \exp(\nu(n-s)) \| x_2(n, n_0) \| - K \exp(-\nu(n-s)) \| x_1(n, n_0) \| \geq$$

$$\geq (K_1 \exp(\nu(n-s)) - K \exp(-\nu(n-s))) \| x_2(n, n_0) \| \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} (K_1 \exp(\nu(n-s)) - K \exp(-\nu(n-s))) \| x(n, n_0) \|.$$

Нехай $\| x_2(n, n_0) \| \geq \| x_1(n, n_0) \|$. Тоді для $n_0 \leq n \leq s$ справедливі оцінки

$$\| x(n, n_0) \| = \| x_1(n, n_0) + x_2(n, n_0) \| \leq$$

$$\leq \frac{1}{K} \exp(\nu(n-s)) \| x_1(n, n_0) \| - \frac{1}{K_1} \exp(-\nu(n-s)) \| x_2(n, n_0) \| \leq$$

$$\leq \left(\frac{1}{K} \exp(\nu(n-s)) - \frac{1}{K_1} \exp(-\nu(n-s)) \right) \| x_1(n, n_0) \| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{K} \exp(\nu(n-s)) - \frac{1}{K_1} \exp(-\nu(n-s)) \right) \| x(n, n_0) \|.$$

Для дійсного числа $\theta \in (0, 1)$ можна вибрати таке досить велике натуральне число h, що

$$\begin{gathered} (K_1 \exp(\nu h) - K \exp(-\nu h) \geq \frac{2}{\theta}, \\ \left(\frac{1}{K_1} \exp(\nu h) - \frac{1}{K} \exp(-\nu h) \right) \geq \frac{2}{\theta}. \end{gathered} \tag{11}$$

Тоді для $s \geq n_0 + h$ виконується нерівність (10). Лему доведено.

Теорема 2. *Нехай у системи* (1) *послідовність* $A(n)$ *майже періодична і система* (1) *е. д. на множині* $\{0, T\}$ *з константами* ν, K, $K_1 = 1/K$.

Припустимо, що виконуються оцінки

$$\begin{gathered} \frac{1}{K} \exp(\nu h) - K \exp(-\nu h) = 8, \quad \delta h M^h (1 + 2M^h) \leq 1, \\ M = \sup_{n \in Z} \| A(n) \|. \end{gathered} \tag{12}$$

Тоді якщо $T > 0$ *задовольняє умову* $T \geq 4h$ *і кожний інтервал довжини* $[T/2]-1$ ($[x]$ — *ціла частина числа* x) *містить* δ-*майже період м. п. послідовності* $\{A(n)\}$, *то система* (1) *має експоненціальну дихотомію на осі* $n \in Z$ *з константами*

$$\alpha = \ln 2/h, \quad K = (2M)^h, \quad K_1 = 1/K = (2M)^{-h}.$$

Доведення. 1. Нехай s — довільне натуральне число. На інтервалі $\{s - 3[T/4], s-[T/4]\}$ існує δ-майже період τ_δ м. п. послідовності $\{A(n)\}$. Тоді $\{s-\tau_\delta-[T/4], s-\tau_\delta+[T/4]\} \subset \{0, T\}$ і система

$$y_{n+1} = A(n-\tau_\delta)y_n$$

має експоненціальну дихотомію на інтервалі $\{s-[T/4], s+[T/4]\}$ з константами ν, K, $K_1 = 1/K$. Враховуючи формули (11) та (12), за лемою 3 для розв'язку $y(s, n_0)$ з $s-h \geq n_0$ одержуємо оцінку

$$\| y(s, n_0) \| \leq \frac{1}{4} \max_{|n-s| \leq h} \| y(n, n_0) \|. \tag{13}$$

Доведемо, що для розв'язку $x(s, n_0)$ системи (1) при $s-h \geq n_0$ виконується оцінка

$$\| x(s, n_0) \| \leq \frac{1}{2} \max_{|n-s| \leq h} \| x(n, n_0) \|. \tag{14}$$

Припустимо, що $\| x(s, n_0) \| > \frac{1}{2} \| x(n, n_0) \|$ при $s > n \geq s-h = \bar{n}$. Зокрема,

$$\| x(s, n_0) \| > \frac{1}{2} \| x(\bar{n}, n_0) \| = \frac{1}{2} \| \bar{x}_0 \|. \tag{15}$$

Враховуючи (15), маємо

$$\begin{aligned} \|x(s, \bar{n})\| &\leq \|y(s, \bar{n})\| + \|x(s, \bar{n}) - y(s, \bar{n})\| \leq \\ &\leq \frac{1}{4} \max_{|n-s| \leq h} \|x(n, \bar{n})\| + \|x(s, \bar{n}) - y(s, \bar{n})\| + \\ &\quad + \frac{1}{4} \max_{|n-s| \leq h} \|x(n, \bar{n}) - y(n, \bar{n})\|. \end{aligned} \tag{16}$$

Оскільки τ_δ — це δ-майже період, то $\|A(n-\tau_\delta) - A(n)\| < \delta \;\; \forall n \in Z$. Розв'язки вибираємо з умов $x(\bar{n}, \bar{n}) = y(\bar{n}, \bar{n}) = \bar{x}_0$, $x(s, \bar{n}) = x(s, n_0)$:

$$\begin{gathered} \|x(n, \bar{n}) - y(n, \bar{n})\| = \\ = \| A(n-1) \ldots A(\bar{n})\, \bar{x}_0 - A(n-1-\tau_\delta) \ldots A(\bar{n}-\tau_\delta)\, \bar{x}_0 \| \leq \\ \leq (n-\bar{n})\, M^{n-\bar{n}-1} \delta \|\bar{x}_0\| \leq \\ \leq 2hM^{2h-1} \delta \|\bar{x}_0\|, \quad \bar{n} \leq n \leq \bar{n} + 2h, \end{gathered}$$

і враховуючи припущення (15):

$$\|x(n, \bar{n}) - y(n, \bar{n})\| \leq 4hM^{2h-1} \delta \| x(s, n_0) \|, \quad \bar{n} \leq n \leq \bar{n} + 2h.$$

При $n = s$ відповідно:

$$\|x(s, \bar{n}) - y(s, \bar{n})\| \leq 2hM^h \delta \| x(s, n_0) \|.$$

Враховуючи останні нерівності, одержуємо оцінки для (16):

$$\| x(s, n_0) \| \le \frac{1}{4} \max_{|n-s| \le h} \| x(n, n_0) \| + \frac{1}{2} h M^h \delta (1 + 2M^{h-1}) \| x(s, n_0) \|,$$

$$\left(1 - \frac{1}{2} h M^h \delta (1 + 2M^{h-1})\right) \| x(s, n_0) \| \le \frac{1}{4} \max_{|n-s| \le h} \| x(n, n_0) \|.$$

Тоді за умовою (12) при припущенні (15) випливає (14). Інакше існує $n_1 \in [\bar{n}, s]$ таке, що $\| x(s, n_0) \| \le \frac{1}{2} \| x(n_1, n_0) \| \le \frac{1}{2} \| \bar{x}_0 \|$. Тим самим доведена оцінка (14).

2. Доведемо, що кожний обмежений при $n \ge n_0$ розв'язок $x(n, n_0)$ системи (1) задовольняє оцінку (3). Для $s > n_0$ позначимо $\mu(s) = \sup_{n \ge s} \| x(n, n_0) \|$. Тоді для $n \ge s + h$ виконується

$$\| x(n, n_0) \| \le \frac{1}{2} \max_{n_1 : |n_1 - n| \le h} \| x(n_1, n) \| \le \frac{1}{2} \mu(s).$$

Тому $\mu(s) = \max_{s \le k \le s+h} \| x(k, n_0) \|$ і $\| x(n, n_0) \| \le M^h \| x(s, n_0) \|$, $0 \le s \le n < \infty$. Для $s + nh \le k \le s + (n+1) h$ виконуються оцінки

$$\| x(k, n_0) \| \le \frac{1}{2} \max_{|l-k| \le h} \| x(l, n_0) \| \le$$

$$\le 2^{-n} \max_{|l-k| \le nh} \| x(l, n_0) \| \le 2^{-n} M^h \| x(s, n_0) \| \le$$

$$\le K \exp(-\alpha(k-s)) \| x(s, n_0) \|,$$

де $n_0 < s \le k < \infty$, $K = 2M^h$, $\alpha = \frac{1}{h} \ln 2$.

3. Нехай $x(n, n_0)$ — необмежений розв'язок системи (1), $\| x(n_0, n_0) \| = 1$. Означимо послідовність натуральних чисел t_n:

$$\| x(t_n, n_0) \| \ge 2^n M^h, \quad \| x(k, n_0) \| < 2^n M^h \text{ для } n_0 \le k < t_n.$$

Тоді $n_0 + h < t_1 < t_2 < \ldots$ і $t_n \to \infty$.

Справедливі оцінки

$$\| x(t_n, n_0) \| \le \frac{1}{2} \max_{n_0 \le k \le t_n + h} \| x(k, n_0) \|$$

та

$$\| x(k, n_0) \| \le 2^{n+1} M^h \le 2 \| x(t_n, n_0) \|$$

для $n_0 \le k < t_{n+1}$. Тому $t_{n+1} \le t_n + h$.

Нехай $t, s \in Z$, $t \le s$, $t_m \le t < t_{m+1}$, $t_n \le s < t_{n+1}$, $1 \le m \le n$. Тоді

$$\| x(t, n_0) \| < 2^{m+1} M^h \le 2^{m-n} \| x(t_{n+1}, n_0) \| \le$$

$$\le M^h 2^{m-n} \| x(s, n_0) \| \le 2 M^h \exp \frac{\ln 2}{h} (t - s) \| x(s, n_0) \|.$$

Тому

$$\| x(n, n_0) \| \le K \exp(-\alpha(k-n)) \| x(k, n_0) \|, \quad t_1 \le n \le k < \infty. \tag{17}$$

Позначимо через $S(n_0)$ підпростір простору V^n початкових значень розв'язків $x(n, n_0)$, які задовольняють умову (3). Нехай $U(n_0)$ — деякий підпростір, який доповнює $S(n_0)$ в V^n. Для вектора $\xi \in U(n_0)$ розв'язок $x(n, n_0, \xi)$, $x(n_0, n_0, \xi) = \xi$, задовольняє умову (17) при $n \geq t_1(\xi)$, де $x(t_1(\xi), n_0, \xi) \geq 2M^h$ і $x(n, n_0, \xi) < 2M^h$ при $n < t_1(\xi)$. Доведемо, що $t_1(\xi)$ є обмеженою функцією на $U(n_0)$. Інакше існує послідовність $\xi_\nu \in U(n_0)$, $||\xi_\nu|| = 1$, така, що $t_1(\xi_\nu) \to +\infty$, $\nu \to \infty$. Враховуючи компактність одиничної сфери в $U(n_0)$, можна вважати $\xi_\nu \to \xi$, $\nu \to \infty$, $||\xi|| = 1$. Тоді $x(n, n_0, \xi_\nu) \to x(n, n_0, \xi)$ для $n \geq n_0$. Для $n_0 < n < t_1(\xi_\nu)$ виконується нерівність $\|x(n, \xi_\nu)\| < 2M^h$. Тому $\|x(n, \xi)\| < 2M^h$ для $n_0 \leq n < \infty$, що суперечить $\xi \in U(n_0)$. Тому існує $N > 0$ таке, що $t_1(\xi) < N$ $\forall\, \xi \in U(n_0)$. Отже, кожний розв'язок $x(n, n_0)$, який при $n = n_0$ починається на $U(n_0)$, при $0 < N \leq n \leq k < \infty$ задовольняє умову (17).

4. Для кожного n_0 ми побудували підпростір S_{n_0} такий, що розв'язки, які починаються на ньому, задовольняють умову (3). Інші розв'язки задовольняють умову (17). Очевидно, $A_{n_0} S_{n_0} \subset S_{n_0+1}$. Повторюючи доведення леми 1, одержуємо нерівність $\dim S_n \geq \dim S_k$ при $n < k$. Починаючи з деякого номера $\overline{n}$ розмірності не змінюються: $\dim S_n = \overline{m} = \mathrm{const}$. Розглянемо розв'язки $x(n, \overline{n})$, $n \geq \overline{n}$. Нехай $U(\overline{n})$ — деякий підпростір, який доповнює $S(\overline{n})$. Образ підпростору $U(\overline{n})$ при дії $\Phi(n, \overline{n})$ має розмірність $(m - \overline{m})$ і доповнює $S(n)$. Інакше існував би ненульовий вектор $\overline{a} \in U(\overline{n})$ такий, що $\Phi(n, \overline{n})\overline{a} = 0$, що суперечить умові (17).

Візьмемо N, означене в п. 3 доведення теореми. Підпростір $U(N)$ доповнює $S(N)$ і всі розв'язки, які починаються на $U(N)$, задовольняють умову (17) при $N = n_0 \leq n \leq k < \infty$. Тим самим доведена дихотомічність системи (1) на півосі $Z_{[N]}$. За наслідком з теореми 1 система експоненціально дихотомічна на всій осі Z. Теорему доведено.

1. *Coffman S. U., Schaffer J. J.* Dichotomies for linear difference equations // Math. Ann. – 1967. – **172**, № 2. – P. 139–166.
2. *Слюсарчук В. Е.* Об експоненциальной дихотомии решений дискретных систем // Укр. мат. журн. – 1983. – **35**, № 1. – С. 109–114.
3. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Выща шк., 1987. – 288 с.
4. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. – М.: Мир, 1971. – 309 с.
5. *Palmer K. J.* Exponential dichotomies for almost periodic equations // Proc. … Amer. Math. Soc. – 1987. – **101**, № 2. – P. 293–298.
6. *Papaschinopoulos G.* Exponential dichotomy for almost periodic linear difference equations // Ann. Soc. sci. Bruxelles. Ser. 1. – 1988. – **102**, № 1–2. – P. 19–28.
7. *Coppel W. A.* Dichotomies in stability theory // Lect. Notes Math. – 1978. – № 629. – 96 p.

Одержано 26.06.95