УДК 517.95

М. А. Бородин, канд. физ.-мат. наук (Донец. ун-т)

СУЩЕСТВОВАНИЕ КЛАССИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ В МНОГОМЕРНОЙ ЗАДАЧЕ СТЕФАНА НА КОНЕЧНОМ ПРОМЕЖУТКЕ ВРЕМЕНИ

Доказано существование классического решения в двухфазной задаче Стефана на любом конечном промежутке времени.

Доведено існування класичного розв'язку в двофазній задачі Стефана на будь–якому скінченному проміжкў часу.

Настоящая работа посвящена исследованию многомерной двухфазной проблемы Стефана. В последние два десятилетия по этой проблеме написано много работ, обзор которых имеется в [1, 2]. В них доказаны существование классического решения в целом по времени в однофазной задаче Стефана, существование решения на малом промежутке в двухфазной задаче [3 – 8].

Большое распространение в последние годы получила идея К.Байокки [6], позволяющая редуцировать некоторый класс задач со свободной границей к вариационным неравенствам в фиксированной области. Именно таким способом удалось доказать существование классического решения в однофазных нестационарной и квазистационарной задачах Стефана [7, 9]. Однако при наличии двух и более фаз с помощью вариационных неравенств удавалось доказывать до сих пор только существование обобщенных решений.

В данной работе предложен метод, который позволил доказать существование классического решения в двухфазной многомерной задаче Стефана в целом по времени и установить гладкость свободной (неизвестной) границы. Сущность предложенного метода заключается в следующем: сначала строится некоторая последовательность аппроксимирующих эллиптических дифференциально–разностных задач, устанавливается их разрешимость, затем доказываются равномерные оценки и совершается предельный переход. В результате исследования указанных задач удалось выяснить поведение решения вблизи свободной границы. Впервые подобным методом автор изучал двухфазную проблему Стефана в случае двух пространственных переменных в работе [10].

1. Постановка задачи. Построение аппроксимирующих задач. Пусть $D=\{x\in\mathbb{R}^3\colon R_1<|x|<R_2,\ 0<R_1<R_2\}$, $D_T=D\times(0,T)$, $B_{R_i}(0)=\{x\in\mathbb{R}^3\colon |x|<R_i,\ i=\overline{1,2}\}$, Ω_0 — некоторая односвязная область, причем $B_{R_1}\subset\Omega_0\subset B_{R_2}$. Требуется найти тройку $\{u(x,t),G_T,\Omega_T\}$, используя следующие условия:

$$\Delta u-a(u)\frac{\partial u}{\partial t}=0\quad\forall(x,t)\in\Omega_T\bigcup G_T,\tag{1}$$

$$\Omega_T=\{(x,t)\in D_T\colon u(x,t)<1\},\ G_T=\{(x,t)\in D_T\colon u(x,t)>1\};$$

на известной границе

$$u(x,t)=0\ \forall(x,t)\in\partial B_{R_1}\times(0,T),\quad u(x,t)=\varphi(x,t)\ \forall(x,t)\in\partial B_{R_2}\times(0,T);\tag{2}$$

на неизвестной границе

$$u(x,t)=1,\ \sum_{k=1}^{3}\left[\frac{\partial u}{\partial x_k}\right]\cos(n,x_k)+\lambda\cos(n,t)=0\ \ \forall(x,t)\in\gamma_T,\ \gamma_T=\partial\Omega_T\bigcap D=\partial G_T\bigcap D;\tag{3}$$

начальные условия

$$u(x,0)=\psi(x)\ \forall x\in D,\ \Omega_0=\{x\in D\colon 0<\psi(x)<1\},\ \varphi(x,0)=\psi(x)\ \forall x\in\partial B_{R_2},$$
$$\psi(x)=0\ \forall x\in\partial B_{R_1},\ \gamma_0=\partial\Omega_0\bigcap D.\tag{4}$$

Здесь $a(u)$ — кусочно-постоянная функция, равная a_1 в Ω_T и a_2 в G_T, $\varphi(x,t)$ и $\psi(x)$ — заданные функции, n — нормаль к поверхности γ_T, направленная в сторону возрастания $u(x,t)$, $[u_{x_k}(x,t)]$ — разность между предельными значениями на γ_T, взятыми из областей Ω_T и G_T соответственно, $\lambda, a_1, a_2, R_1, R_2, T$ — заданные положительные константы.

Обозначим через $(\rho, \theta_1, \theta_2)$ сферические координаты точки $x \in D$, где

$$\rho = |x|,\ \theta = (\theta_1, \theta_2) = \arg x,\ -\pi \le \theta_1 \le \pi,\ 0 \le \theta_2 \le \pi,$$
$$\Pi = \{(\theta_1, \theta_2): -\pi \le \theta_1 \le \pi,\ 0 \le \theta_2 \le \pi\}.$$

В сферических координатах оператор Лапласа можно представить в виде

$$\Delta u = \rho^{-2}(\rho^2 u_\rho)_\rho + \rho^{-2} Au,\ Au = (a_{ij} u_{\theta_j})_{\theta_i},\ a_{ij} = a_{ji}.$$

Будем предполагать, что выполнены условия

$$\psi(x) \in C^2(D) \bigcap C^{1+\alpha}(\overline{D}),\ \alpha \in (0,1),\ \exists M > 0: -M \le \Delta\psi(x) \le 0\ \ \forall x \in D,\ \frac{\partial \psi}{\partial \rho} > 0$$
$$\forall x \in D; \tag{5}$$

$$\varphi(x,t) \in C^{1+\alpha,\, 1+\alpha/2}(\overline{D}_T),\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} < 0\ \ \forall (x,t) \in \partial B_{R_2} \times (0,T),$$

$$\varphi(x,t) > 1\ \ \forall (x,t) \in \partial B_{R_2} \times [0,T],\ a(\varphi)\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \rho^{-2} A\varphi > 0\ \ \forall (x,t) \in \partial B_{R_2} \times [0,T]. \tag{6}$$

Разобьем цилиндр D_T плоскостями $t = kh$, $hN = T$, где N — некоторое целое положительное число, $k = 1, 2, \dots, N$. Положим $a(x) = a_2 + (a_1 - a_2)\chi(x)$, $\chi(x) = 1$ $\forall x < 1$, $\chi(x) = 0$ $\forall x > 1$. Будем приближать функцию $u(x, t)$ функциями $u_{k,h}(x)$, которые определим так:

$$h\Delta u_{k,h} - \int_{u_{k-1,h}}^{u_{k,h}} a(\tau)d\tau = -\lambda\left[\chi(u_{k,h}) - \chi(\psi)\right] + \int_0^{F_{k-1,h}} a(u_{k-1,h} - \tau)d\tau\,, \tag{7}$$

$$h\Delta F_{k,h} - \int_0^{F_{k,h}} a(u_{k,h} - \tau)d\tau = -\lambda\left[\chi(u_{k,h}) - \chi(\psi)\right]\ \ \forall x \in D, \tag{8}$$

$$u_{k,h}(x) = 0\ \ \forall x \in \partial B_{R_1},\ u_{k,h} = \varphi_k(x) \equiv \varphi(x, kh)\ \ \forall x \in \partial B_{R_2}, \tag{9}$$

$$u_{0,h}(x) = \psi(x)\ \ \forall x \in D,\ F_{k,h}(x) = 0\ \ \forall x \in \partial D,\ F_{0,h} \equiv 0. \tag{10}$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (5), (6). *Тогда для любого* $h > 0$ *задача* (7) – (10) *разрешима и* $u_{k,h} \in C^2(D) \bigcap C^{1+\alpha}(\overline{D})$, $F_{k,h}(x) \in C^{1+\alpha}(\overline{D})$.

Доказательство. Для простоты рассуждений сгладим коэффициенты уравнений (7), (8), заменив функцию $\chi(x)$ функцией $\chi_\varepsilon(x) \in C^\infty(R^1)$, обладающей свойствами $\forall \varepsilon > 0$: $\chi_\varepsilon(x) = 1$ $\forall x \le 1$, $\chi_\varepsilon(x) = 0$ $\forall x \ge 1+\varepsilon$, $\chi'_\varepsilon(x) \le 0$. После этого задача (7) – (10) решается последовательно, начиная с $k = 1$. Сначала находится функция $F_{k-1,\,h,\,\varepsilon}(x)$ $(F_{0,\,h,\varepsilon} \equiv 0)$, затем эту функцию следует подставить в правую часть уравнения (7) и исследовать соответствующую краевую задачу для $u_{k,h,\varepsilon}(x)$. Каждая из этих задач может быть исследована вариационным методом [11, с.391]. Таким способом доказывается существование решения в $W_2^1(D)$. Используя далее уравнение Эйлера, гладкость можно повысить. При фиксированном h предельный переход по ε трудности не представляет.

Вычтем из (7) уравнение (8) и обозначим

$$w_{k,h}(x) = u_{k,h}(x) - F_{k,h}(x). \tag{11}$$

В результате получим

$$h\Delta w_{k,h} - \int_{w_{k-1,h}}^{w_{k,h}} a(\tau)d\tau\ \ \forall x \in D, \tag{12}$$

$$w_{k,h}(x)=0\quad \forall x\in\partial B_{R_1},\ w_{k,h}(x)=\varphi_k(x)\quad \forall x\in\partial B_{R_2},\ w_{0,h}(x)=\varphi(x)\quad \forall x\in D. \tag{13}$$

Теперь становится понятным смысл построения аппроксимирующей задачи.

2. Изучение свойств функций $w_{k,h}(x)$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (5), (6) *и* $a_1\ge a_2$. *Тогда всюду в* $\overline{D}$ *выполняются неравенства*

$$0\le w_{k-1,h}(x)-w_{k,h}(x)\le ch,\ \ \frac{\partial w_{k,h}}{\partial\rho}\ge c_1\ \ \forall k=1,2,\dots,N, \tag{14}$$

где константы $c,c_1>0$ *не зависят ни от* k *, ни от* h.

Доказательство. Положим в (12) $k=1$ и преобразуем это уравнение

$$h\,\Delta w_{1,h}-a(w_{1,h})(w_{1,h}-1)=a(w_{0,h})(w_{0,h}-1).$$

Пусть $x\in D$ и $B_R(x)$ – шар с центром в точке x радиуса R, причем $B_R(x)\subset D$. Обозначим

$$G(x,y)=\frac{1}{4\pi}\frac{\operatorname{sh} a(w_{0,h})\big(R-|x-y|\big)/\sqrt{h}}{|x-y|\operatorname{sh} a(w_{0,h})R/\sqrt{h}}.$$

Использовав функцию Грина $G(x,y)$, построим интегральное представление

$$w_{1,h}(x)-1=\int_{B_R(x)}a(w_{0,h})(w_{0,h}-1)G(x,y)h^{-1}\,dy-\int_{\partial B_R(x)}(w_{1,h}-1)\frac{\partial G}{\partial n}ds+$$
$$+\int_{B_R(x)}\{a[w_{1,h}(y)]-a[w_{0,h}(x)]\}(1-w_{1,h})G(x,y)h^{-1}dy.$$

Преобразуем первое слагаемое, стоящее справа, проинтегрировав по частям. В результате получим

$$w_{0,h}(x)-w_{1,h}(x)=-\int_{B_R(x)}\Delta\psi\,G(x,y)\,dy\ \int_{\partial B_R}(w_{0,h}-w_{1,h})\frac{\partial G}{\partial n}ds+$$
$$+\int_{B_R(x)}\{a[w_{0,h}(x)]-a[w_{1,h}(y)]\}(1-w_{1,h})\frac{G(x,y)}{h}dy. \tag{15}$$

Предположим теперь, что функция $w_{0,h}(x)-w_{1,h}(x)$ принимает в точке x положительное максимальное значение. Тогда из (15) легко получаем

$$[w_{0,h}(x)-w_{1,h}(x)]\int_{B_R(x)}a(w_{0,h})\frac{G(x,y)}{h}dy\le-\int_{B_R(x)}\Delta\psi G(x,y)dy+$$
$$+\int_{B_R(x)}\{a[w_{1,h}(y)]-a[w_{0,h}(x)]\}(w_{1,h}-1)\frac{G(x,y)}{h}dy.$$

Разделим теперь обе части на интеграл, стоящий слева, перейдем к пределу при $R\to 0$. В результате получим

$$w_{0,h}(x)-w_{1,h}(x)\le\frac{h}{a_2}\sup_{D}|\Delta\psi|.$$

Аналогично устанавливается неотрицательность минимального значения функции $w_{0,h}(x)-w_{1,h}(x)$. Завершить доказательство первого из неравенств (14) можно по индукции, используя условие $0<a_2\le a_1$. Для доказательства второго из неравенств перейдем в уравнении (12) к сферической системе координат и продифференцируем уравнение по ρ. Будем иметь

$$h\Delta\left(\rho\frac{\partial w_{k,h}}{\partial\rho}\right)-a(w_{k,h})\rho\frac{\partial w_{k,h}}{\partial\rho}+a(w_{k-1,h})\rho\frac{\partial w_{k-1,h}}{\partial\rho}=2\int_{w_{k-1,h}}^{w_{k,h}}a(\tau)d\tau.$$

Применяя принцип максимума, легко установить, что $\partial w_{k,h}/\partial\rho > 0$. Далее, так же, как и в работе [7], можно доказать, что область, где $w_{k,h}(x) < 1$, является звездной относительно некоторого шара $B_\delta(0)$. После этого можно построить барьер, позволяющий установить оценку (14).

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы* 2. *Тогда*

$$\left\| w_{k,h}(x) \right\|_{C^{1+\alpha}(\overline{D})} \le c < +\infty, \tag{16}$$

где константа c *не зависит ни от* k, *ни от* h.

Следствие 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 2. *Тогда всюду в* $\overline{D}$ *выполняется неравенство*

$$\partial u_{k,h}/\partial\rho > 0.$$

Это утверждение следует из принципа максимума, если учесть, что

$$\frac{\partial w_{k,h}}{\partial\rho} = \frac{\partial u_{k,h}}{\partial\rho} - \frac{\partial F_{k,h}}{\partial\rho}.$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и* $a_1 \ge a_2$. *Тогда найдутся такие константы* $c_1 > 0$, $c > 0$, *что всюду в* D

$$-c_1 h < F_{k,h}(x) - F_{k-1,h}(x) \le ch, \tag{17}$$

где константы c_1 *и* c *не зависят ни от* k, *ни от* h.

Доказательство. Из (8) следует

$$h\Delta(F_{k,h} - F_{k-1,h}) - \int_0^{F_{k,h}} a(u_{k,h} - \tau)d\tau + \int_0^{F_{k-1,h}} a(u_{k-1,h} - \tau)d\tau = -\lambda[\chi(u_{k,h}) - \chi(u_{k-1,h})].$$

Предположим, что функция $F_{k,h}(x) - F_{k-1,h}(x)$ принимает отрицательное значение в точке $x \in D$. Так как

$$-ch \le w_{k,h} - w_{k-1,h} = u_{k,h} - u_{k-1,h} + F_{k-1,h} - F_{k,h} \le 0, \tag{18}$$

то

$$F_{k,h}(x) - F_{k-1,h}(x) < 0, \; u_{k,h}(x) - u_{k-1,h}(x) < 0.$$

Из уравнения следует

$$\int_0^{F_{k,h}} a(u_{k,h} - \tau)d\tau - \int_0^{F_{k-1,h}} a(u_{k-1,h} - \tau)d\tau \ge \lambda[\chi(u_{k,h}) - \chi(u_{k-1,h})] \ge 0.$$

Преобразуем это неравенство

$$a_2(F_{k,h} - F_{k-1,h}) \ge \int_0^{F_{k-1,h}} [a(u_{k-1,h} - \tau) - a(u_{k,h} - \tau)]d\tau \ge$$

$$\ge -(a_1 - a_2)(u_{k-1,h} - u_{k,h}) \ge -(a_1 - a_2)[\,ch + F_{k,h} - F_{k-1,h}].$$

В результате получим

$$F_{k,h}(x) - F_{k-1,h}(x) \ge -ch(a_1 - a_2)/a_1.$$

При помощи аналогичных рассуждений может быть оценен и положительный максимум.

Следствие 3. *Пусть выполнены условия предыдущей теоремы. Тогда найдется такая константа* $c > 0$, *что всюду в* D

$$0 \le u_{k-1,h}(x) - u_{k,h}(x) \le ch, \tag{19}$$

где константа c *не зависит ни от* k, *ни от* h.

Утверждение непосредственно следует из (17) и (18).

3. Предельный переход.

Лемма. *Пусть* $\chi(u_{k,h}) = 0$ *и* $\operatorname{dist}(x,\gamma_k) \geq h^{\delta}$, $\delta \in (0,1/2)$, *где* γ_k *обозначает поверхность уровня* $u_{k,h}(x) = 1$. *Тогда имеем*

$$F_{k,h}(x) = o(h),\ h \to 0. \tag{20}$$

Из (8) следует

$$0 \leq F_{k,h}(x) \leq \frac{1}{4\pi} \int_D \frac{\exp\left\{-\sqrt{a_2/h}|x-y|\right\}\left[\chi(u_{k,h}) - \chi(\psi)\right]}{|x-y|}\, dy.$$

Теперь из известного неравенства $\tau^m e^{-\tau} < \mathrm{const}$ можно получить (20), если учесть обращение в нуль подынтегральной функции в точках, которые принадлежат множеству, где $\chi[u_{k,h}(x)] = 0$.

Замечание. Соотношение (20) будет верным и для производных любого конечного порядка функции $F_{k,h}(x)$.

Теорема 4. *Пусть* $0 < \delta_1 < \delta < 1/2$, $\rho = \rho_{k,h}(\theta_1, \theta_2)$ — *уравнение поверхности уровня* $u_{k,h} = 1 + h^{\delta_1}$. *Тогда найдется такая константа* $M > 0$, *что справедлива оценка*

$$\left\|\rho_{k,h}(\theta_1,\theta_2)\right\|_{C^{1+\alpha}(\Pi)} \leq M, \tag{21}$$

где константа M *не зависит ни от* k, *ни от* h.

Докажем прежде всего неравенство $\operatorname{dist}(x, \gamma_k) \geq h^{\delta}$, где $x \in D$ и $u_{k,h}(x) \geq 1 + h^{\delta_1}$. Пусть $\rho = s_{k,h}(\theta_1, \theta_2)$ —уравнение поверхности уровня $w_{k,h} = 1$, а $\rho = l_{k,h}(\theta_1, \theta_2)$ — уравнение поверхности уровня $w_{k,h} = 1 + h^{\delta}$. Тогда, как следует из (14), существует такая константа $c_0 > 0$, что

$$l_{k,h}(\theta_1, \theta_2) - s_{k,h}(\theta_1, \theta_2) \geq c_0 h^{\delta}.$$

Учитывая, что $w_{k,h}(x) < u_{k,h}(x)$ и (20), на поверхности уровня $w_{k,h} = 1 + h^{\delta}$ имеем

$$u_{k,h} = 1 + h^{d} + o(h) < 1 + h^{\delta_1},\ h \to 0.$$

Значит, $\operatorname{dist}(x, \gamma_k) \geq h^{\delta}$ $\forall x$: $u_{k,h}(x) \geq 1 + h^{\delta_1}$, и на этом множестве для функции $u_{k,h}(x)$ справедливы оценки (14), (16). Для доказательства (21) осталось применить теорему о неявной функции.

Теорема 5. *Пусть* $u_h(x, t)$ — *кусочно-постоянные интерполяции по* t *функций* $u_{k,h}(x)$, *а* $u(x, t) = \lim\limits_{h\to 0} u_h(x,t)$ — *слабый предел последовательности в* $L_p(D_T)$, $p \geq 2$. *Тогда функция* $u(x,t) \in W_2^{1,1}(D_T)$ *и* $\forall \eta(x,t) \in \overset{0}{W}{}_2^{1,1}(D_T)$ *справедливо интегральное тождество*

$$\int_{D_T} [\nabla u \nabla \eta + a(u) u_t \eta - \lambda\chi(u)\eta_t]\, dx dt = 0. \tag{22}$$

Доказательство. Пусть $\eta(x,t) \in C^{2,1}(D_T) \bigcap W_2^{2,1}(D_T)$ — функция, исчезающая на границе области D и при $t = T$. Умножим уравнение (7) на $h\eta(x,kh)$, проинтегрируем по области D и просуммируем по k от 1 до N. После несложных преобразований получим

$$h\sum_{k=1}^{N} \int_D \left\{-u_{k,h}\Delta\eta(x,kh) + [u_{k,h}(x) - \lambda\chi(u_{k,h})]\frac{\partial\eta(x,kh)}{\partial t}\right\} dx +$$

$$+ h\sum_{k=1}^{N}\int_D \lambda\Delta\psi_k\left(F_{k-1,h}-F_{k,h}\right)h^{-1}dx+\int_D[-\psi(x)+\lambda\chi(\psi)]\eta(x,h)dx=0, \qquad (23)$$

где $\varphi_k(x)=h\sum_{m=0}^{k}\eta(x,mh)-h\sum_{m=0}^{N}\eta(x,mh)$. Исходя из (8), можно показать, что

$$|F_{k,h}(x)-F_{k-1,h}(x)|\le\lambda\int_D\frac{\chi(u_{k,h})-\chi(u_{k-1,h})}{h}\frac{\exp\left\{-\sqrt{a_2/h}|x-y|\right\}}{|x-y|}dy.$$

Если теперь отступить вдоль ρ от шарового слоя, заключенного между поверхностями γ_{k-1} и γ_k, на h^δ и обозначить через $\Pi_{h,\delta}$ полученный шаровой слой, то $\forall x \bar{\in} \Pi_{h,\delta}$ будем иметь $F_{k,h}-F_{k-1,h}=o(h)$ и $\mathrm{mes}\,\Pi_{h,\delta}\to 0$ при $h\to 0$. Поэтому

$$\lim_{h\to 0}\sum_{k=1}^{N}\int_D\Delta\psi_k(F_{k-1,h}-F_{k,h})dx=0.$$

Совершим теперь предельный переход в (23) при $h\to 0$. В результате получим

$$\int_{D_T}\{-u(x,t)\Delta\eta(x,t)+[u(x,t)-\lambda\chi(u)]\eta_t(x,t)\}dxdt\ +$$

$$+\int_D[-\psi(x)+\lambda\chi(\psi)]\eta(x,0)dx=0.$$

Для завершения доказательства осталось сослаться на единственность решения задачи (1) – (4) [12].

Теорема 6. *Пусть выполнены условия* (5), (6) *и* $a_1\ge a_2$. *Тогда существует единственное решение задачи* (1) – (4)

$$u(x,t)\in\left[C^{1+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{\Omega}_T)\times C^{1+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{G}_T)\right]\cap C(\overline{D}_T)\ \frac{\partial u}{\partial t}\le 0,\frac{\partial u}{\partial\rho}>0\quad\forall(x,t)\in\overline{D}_T.$$

Свободная граница задается уравнением

$$\rho=\rho(\theta_1,\theta_2,t)\in C^{1+\alpha,1+\alpha/2}[\Pi\times(0,T)].$$

Теорема 6 следует из результатов, полученных в теоремах 4, 5.

1. *Fridman A.* Variational principles and free boundary problems.-New York, 1982.–535p.
2. *Данилюк И.И.* О задаче Стефана // Успехи мат. наук.–1985.– **40**, № 5.–С. 133–185.
3. *Мейрманов А.М.* Задача Стефана.–Новосибирск: Наука, 1986.–238с.
4. *Базалий Б.В.* Задача Стефана // Докл. АН УССР. Сер.А.–1986.–№ 11.–С.3–7.
5. *Радкевич Е.В., Меликулов А.К.* Краевые задачи со свободной границей.–Ташкент: Фан, 1988.
6. *Baiocchi C.* Sur une problem a frontiere libre traduisant le filtrage de liquides a traverse des milieux poleux // C.r.Acad.sci. Ser.A.–1971.–**273**.–P.1215–1217.
7. *Fridman A., Kinderlehrer D.* A one phase Stefan problem // Indiana Univ. Math. J. – 1975.– **25**, N 11.–P.1005–1035.
8. *Kinderlehrer D., Nirenberg L.* The smoothness of the free boundary in the phase Stefan problem // Communs Pure and Appl. Math.–1978.– **31**, № 3.–P.257–282.
9. *Бородин М.А.* Теорема существования решения однофазной квазистационарной задачи Стефана // Докл. АН УССР. Сер. А. –1976.–№ 7.– С.582–585.
10. *Бородин М.А.* О разрешимости двухфазной нестационарной задачи Стефана // Докл. АН СССР.–1982.– **263**, № 5.–С.1040–1042.
11. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.–М.: Наука, 1973.–576с.
12. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.–М.: Наука, 1967.–736с.

Получено 01. 04. 92