УДК 517.927.25

С. Б. Ашуров, канд. физ.-мат. наук
(Тадж. технол. ин-т легкой и пищ. пром-сти, Душанбе)

Эквивалентность части производных цепочек краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

Предложен метод получения признаков эквивалентности части производных цепочек краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка со спектральным параметром в граничных условиях.

Запропоновано метод одержання ознак еквівалентності частини похідних ланцюжків крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, що мають спектральный параметр в граничних умовах.

В работе [1] впервые исследовано свойство эквивалентности части производных цепочек квадратичного пучка ограниченных операторов и показана важность этого свойства, в частности, для получения признаков минимальности и базисности части корневых векторов. Аналогичные результаты для пучков неограниченных операторов второго и четвертого порядков были получены в работе [2], где приведены приложения абстрактных результатов к конкретным пучкам дифференциальных операторов, области определения которых являются постоянными, т. е. не зависящими от спектрального параметра. Такой подход к пучкам дифференциальных операторов, тем более когда их области определения зависят от спектрального параметра, часто порождает трудности и дополнительные ограничения, связанные с записью этих пучков в виде пучков абстрактных операторов. В связи с этим в данной работе предлагается непосредственный метод получения признаков эквивалентности части производных цепочек краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка без перехода к пучкам абстрактных операторов. Приводятся некоторые следствия, относящиеся к минимальности и базисности части корневых функций, отвечающих собственным значениям из левой полуплоскости и специально выбранной части мнимых точек спектра.

1. В пространстве $L_2\,(0,1)$ рассмотрим краевую задачу

$$l\,(d/dx, \lambda)\, y \equiv -y''(x) + q(x)\, y(x) + \lambda\,[2cy'(x) + p(x)\, y(x)] - \lambda^2 y(x) = 0, \quad (1)$$

$$U_r\,(d/dx, \lambda)\, y \equiv \alpha_{r0}(\lambda)\, y(0) + \alpha_{r1}(\lambda)\, y'(0) + \beta_{r0}(\lambda)\, y(1) + \beta_{r1}(\lambda)\, y'(1) = 0, \quad (2)$$

$$r = 1, 2,$$

где c — вещественное число, $\alpha_{rs}(\lambda)$ и $\beta_{rs}(\lambda)$ — полиномы произвольного порядка, а $q\,(x)$ и $p\,(x)$ — измеримые существенно ограниченные на отрезке $[0, 1]$ функции, причем $q\,(x)$ — функция, вещественная почти всюду.

Предположим для простоты, что задача (1), (2) имеет дискретный спектр (в случае непрерывности спектра во всех теоремах данной работы нумерацию корневых функций можно понимать как в работе [3, с. 150—151]).

Пусть λ_k, $k = 1, 2, \ldots$,— собственные значения этой задачи, а

$$y_{0,j,k}(x), y_{1,j,k}(x), \ldots, y_{d_{j,k},j,k}(x) \quad (3)$$

— цепочка собственных и присоединенных (корневых) функций, отвечающая собственному значению λ_k (см. [4, с. 27]). Здесь $j = 1, \ldots, m_k$, где m_k — количество линейно независимых решений задачи (1), (2) при $\lambda = \lambda_k$, а $d_{j,k}+1$ — длина цепочки корневых функций (3). Множество мультииндексов (h, j, k), где индекс $h=0, \dots, d_{j,k}$, индекс $j=1, \dots, m_k$, а индекс $k=1, 2, \dots$, обозначим через Λ.

Пусть Π — некоторое подмножество множества Λ, а $f_{h,j,k}$ при $(h, j, k) \in \Pi$ — некоторая система векторов в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Тогда через $\mathfrak{O}[\mathfrak{H}; f_{h,j,k}; \Pi]$ обозначим замкнутую по норме $\mathfrak{H}$ линейную оболочку векторов $f_{h,j,k}$ при $(h, j, k) \in \Pi$. Приведем одно определение из [1, с. 8] в более удобном для нас виде.

Определение. *Пусть $f_{h,j,k}$ и $g_{h,j,k}$ при $(h, j, k) \in \Pi$ — две системы векторов, принадлежащие соответственно гильбертовым пространствам $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$. Тогда эти системы называются эквивалентными и обозначаются $\langle f_{h,j,k}; \mathfrak{H}_1\rangle \simeq \langle g_{h,j,k}; \mathfrak{H}_2\rangle$ при $(h, j, k) \in \Pi$, если существует такой ограниченный и ограниченно обратимый оператор $S: \mathfrak{O}[\mathfrak{H}_1; f_{h,j,k}; \Pi] \to \mathfrak{O}[\mathfrak{H}_2; g_{h,j,k}; \Pi]$, что $Sf_{h,j,k}=g_{h,j,k}$ при $(h, j, k) \in \Pi$.*

По цепочкам корневых функций (3) в пространстве $L_2 \oplus L_2$, равном прямой сумме двух экземпляров пространства $L_2(0, 1)$, введем цепочку элементов $\tilde{y}_{h,j,k}(x) \equiv \{y_{h,j,k}(x), \lambda_k y_{h,j,k}(x)+y_{h-1,j,k}(x)\}$, $h=0, \dots, d_{j,k}$, которая называется производной по М. В. Келдышу цепочкой. Здесь и далее $y_{-1,j,k}(x) \equiv 0$. Системы функций $y^0_{h,j,k}(x) \equiv y_{h,j,k}(x)$ и $y^1_{h,j,k}(x) \equiv \lambda_k y_{h,j,k}(x)+y_{h-1,j,k}(x)$, $h=0, \dots, d_{j,k}$, называются производными по 1 и по λ цепочками соответственно. Как и в [5], рассматриваются также производные цепочки $\hat{y}_{h,j,k} \equiv \{\tilde{y}_{h,j,k}(x), \psi_1(y_{h,j,k}), \dots, \psi_l(y_{h,j,k})\} \in L_2 \oplus L_2 \oplus \mathbb{C}^l$, где $\psi_r(y)$ — некоторые функционалы, а $\mathbb{C}^l$ — прямая сумма l экземпляров пространства комплексных чисел $\mathbb{C}$. Далее при некоторых условиях устанавливаются соотношения эквивалентности между этими производными цепочками для некоторых специально выбранных частей мультииндекса (h, j, k).

Для формулировки основного утверждения введем необходимые обозначения. С задачей (1), (2) свяжем граничную задачу

$$l(\partial/\partial x, \partial/\partial t)\, u(x, t)=0, \quad U_r(\partial/\partial x, \partial/\partial t)\, u(x, t)=0, \quad r=1, 2. \tag{4}$$

Под решением задачи (4) понимается определенная на полосе $\{(x, t): 0 \leqslant x \leqslant 1, -\infty < t < \infty\}$ функция $u(x, t) \in \mathcal{H} \equiv W^2_2[0, 1] \times C^\infty(-\infty, \infty)$, удовлетворяющая равенствам (4). Здесь и далее $W^r_2[0, 1]$ — соболевские пространства функций, а $C^\infty(-\infty, \infty)$ — пространство бесконечно дифференцируемых на всей оси функций. Известно, что если $y_0(x), \dots, y_p(x)$ — цепочка корневых функций, отвечающая собственному значению $\lambda=\mu$ задачи (1), (2), то функция $u_h(x, t)=e^{\mu t}\sum_{r=0}^{h}\frac{t^r}{r!}y_{h-r}(x)$, $h=0, \dots, p$, является решением задачи (4) и называется элементарным решением.

В $\mathcal{H}$ определим числовую функцию от t:

$$\begin{gathered}
J_t(u, v) \equiv u'_x(0, t)\overline{v'_t(0, t)}+u'_t(0, t)\overline{v'_x(0, t)}-u'_x(1, t)\overline{v'_t(1, t)}- \\
-u'_t(1, t)\overline{v'_x(1, t)}+2c[u'_t(1, t)\overline{v'_t(1, t)}-u'_t(0, t)v'_t(0, t)]+ \\
+\int_0^1[q(x)u(x, t)\overline{v'_t(x, t)}+q(x)u'_t(x, t)\overline{v(x, t)}+2\operatorname{Re}p(x)u'_t(x, t)\overline{v'_t(x, t)}]\,dx,
\end{gathered}$$

где $u(x, t)$, $v(x, t) \in \mathcal{H}$, и положим $J_{t_0}(u, v) \equiv J_t(u, v)|_{t=t_0}$. Нетрудно убедиться, что при каждом $t=t_0$ функция $J_{t_0}(u, v)$ является полуторалинейной относительно u и v симметричной формой в $\mathcal{H}$, причем для произвольных двух элементарных решений $u_h(x, t)$ и $v_j(x, t)$

$$J_t(u_h, v_j)=e^{(\mu+\bar{\nu})t}\sum_{r=0}^{h}\sum_{s=0}^{j}\frac{t^{r+s}}{r!s!}J_0(u_{h-r}, v_{j-s}). \tag{5}$$

Условие A. Существуют функции $J_t^0(u, v)$ и $J_t^1(u, v)$, определенные в $\mathcal{H}$ и обладающие свойством (5) такие, что при каждом t являются полуторалинейными относительно u и v симметричными формами, квадратичная форма $J_t^1(u, u)$ знакоопределена равномерно по t и справедливо равенство $J_t(u, v) = \frac{d}{dt} J_t^0(u, v) + J_t'\left(\frac{\partial^{\varkappa_0}}{\partial t^{\varkappa_0}} u, \frac{\partial^{\varkappa_0}}{\partial t^{\varkappa_0}} v\right)$ для всех решений u, v задачи (4) и некоторого целого числа $\varkappa_0 \geqslant 0$.

С помощью формы $J_t^0(u, v)$ определим функцию от t

$$[u, v]_t \equiv J_t^0(u, v) + \int_0^1 (u_x'(x, t)\overline{v_x'(x, t)} - u_t'(x, t)\overline{v_t'(x, t)})\, dx \tag{6}$$

и положим $[u, v]_0 \equiv [u, v]_t|_{t=0}$.

Пусть l — некоторое натуральное число. Через P_l обозначим оператор, действующий из $\mathcal{H}$ в $\mathbb{C}^l$ и ставящий в соответствие каждой функции $u(x, t)$ некоторый вектор из $\mathbb{C}^l$, элементы которого являются значениями функции $\frac{\partial^{r+s} u(x, t)}{\partial x^r \partial t^s}$ в точках $(0, 0)$ и $(1, 0)$, где $r = 0, 1$ и $s = 0, 1, \dots$. Если $u(x, t) = u_h(x, t)$ — элементарное решение задачи (4), построенное по корневым функциям $y_0(x), \dots, y_h(x)$, то положим $P_l^0 y_h \equiv P_l u_h$.

Далее понадобится еще условие B_r, где либо $r = 0$, либо $r = 1$.

Условие B_r. $(-1)^r J_t^1(u, u) \geqslant 0$ при всех t и $u \in \mathcal{H}$. Существует такой самосопряженный оператор $F: \mathbb{C}^l \to \mathbb{C}^l$, что для всех решений $u(x, t)$ задачи (4) справедливо неравенство

$$(-1)^r [u, u]_0 \leqslant (-1)^r \omega (\| u(x, 0)\|^2_{W_2^1} - \| u_t'(x, 0)\|^2_{L_2}) + (FP_l u, P_l u)_{\mathbb{C}^l}, \tag{7}$$

где число $\omega > 0$, а $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{C}^l}$ — скалярное произведение в $\mathbb{C}^l$.

Выделим теперь три подмножества Θ, Θ_0 и Θ_1 множества Λ. Пусть $\varkappa_{j,k} = [d_{j,k}/2]$ в случае $\lambda_k \neq 0$, и $\varkappa_{j,k} = [(d_{j,k} + \varkappa_0)/2]$ в случае $\lambda_k = 0$, где число $\varkappa_0$ взято из условия A, а $[\beta]$ — целая часть числа β. Тогда положим $\Theta \equiv \{(h, j, k) \in \Lambda: \operatorname{Re}\lambda_k < 0;\ j = 1, \dots, m_k;\ h = 0, \dots, d_{j,k}\} \cup \{(h, j, k) \in \Lambda: \operatorname{Re}\lambda_k = 0,\ \varkappa_{j,k} \geqslant 1;\ j = 1, \dots, m_k;\ h = 0, \dots, \varkappa_{j,k} - 1\}$. Через Θ_r, $r = 0, 1$, обозначим подмножество Λ, состоящее из мультииндексов $(\varkappa_{j,k}, j, k) \in \Lambda$, в которых индекс k отвечает мнимым λ_k, индекс $j \in M_k$, где M_k — некоторое подмножество множества натуральных чисел от 1 до m_k, а

$$(-1)^r \Big[\sum_{j \in M_k} c_j u_{\varkappa_{j,k} j,k}, \sum_{j \in M_k} c_j u_{\varkappa_{j,k}, j,k} \Big]_0 \geqslant 0$$

для любого конечного набора комплексных чисел c_j. Здесь

$$u_{h,j,k}(x, t) = e^{\lambda_k t} \sum_{r=0}^{h} \frac{t^r}{r!} y_{h-r,j,k}(x), \quad h = 0, \dots, d_{j,k}$$

— элементарные решения, построенные по корневым функциям (3).

Следуя [5], через $W_{2,u}^1$ обозначим подпространство пространства $W_2[0, 1]$, состоящее из функций $y(x) \in W_2^1[0, 1]$, удовлетворяющих краевым условиям (2) нулевого порядка; если таких краевых условий нет, то $W_{2,u}^1 = W_2^1[0, 1]$.

Сформулируем теперь основной результат работы.

Теорема 1. *Пусть выполнены условие A и условие B_r при некотором* $r = 0, 1$. *Тогда при* $(h, j, k) \in \Theta \cup \Theta_r$

$$\langle \tilde{y}_{h,j,k}(x), F_+^{1/2} P_l^0 y_{h,j,k}, F_-^{1/2} P_l^0 y_{h,j,k}\}; \quad W_{2,u}^1 \oplus L_2 \oplus \mathbb{C}^{2l} \rangle \simeq$$

$$\simeq \langle \{y^r_{h,j,k}(x), F_+^{1/2} P_l^0 y_{h,j,k}\}; \quad \mathfrak{H}_r \oplus \mathbb{C}^l \rangle \simeq \langle \{\tilde{y}_{h,j,k}(x), F_+^{1/2} P_l^0 y_{h,j,k}\}; \tag{8}$$
$$W^1_{2,u} \oplus L_2 \oplus \mathbb{C}^l \rangle,$$

где $\mathfrak{H}_0 = W^1_{2,u}$, а $\mathfrak{H}_1 = L_2$.

Здесь для самосопряженного оператора F неотрицательные операторы F_+ и F_- такие, что $F = F_+ - F_-$, $F_+F_- = 0$, причем $F_\pm^{1/2} \equiv (F_\pm)^{1/2}$.

На основании теоремы 1, результатов работы [5] и свойств эквивалентных систем [1, с.10] нетрудно вывести различные признаки минимальности и базисности части корневых функций краевой задачи (1), (2) (см. п. 4).

2. Для доказательства теоремы 1 понадобится ряд вспомогательных утверждений относительно формы $\Phi_t(u, v) \equiv J_t^1\left(\frac{\partial^{\varkappa_0}}{\partial t^{\varkappa_0}} u, \frac{\partial^{\varkappa_0}}{\partial t^{\varkappa_0}} v\right)$ и формы (6). Квадратичная форма $\Phi_t(u, u)$ знакоопределена так же, как и $J_t^1(u, u)$.

Лемма 1. *Если выполнено условие A, то для любых решений $u(x,t)$ и $v(x,t)$ задачи* (4) *справедливо равенство*

$$[u, v]_t = [u, v]_0 - \int_0^t \Phi_\xi(u, v)\, d\xi. \tag{9}$$

Доказательство. Учитывая (1) и (4), в левой части равенства $\int_0^t \left(\int_0^1 [l(\partial/\partial x, \partial/\partial \xi) u(x, \xi)] \overline{v'_\xi(x, \xi)}\, dx \right) d\xi = 0$ интегрируем по частям выражение $\int_0^1 u''_{xx}(x, \xi) \overline{v'_\xi(x, \xi)}\, dx$, а в равенстве $\int_0^t \left(\int_0^1 u'_\xi(x, \xi) \overline{l(\partial/\partial x, \partial/\partial \xi) v(x, \xi)\, dx} \right) \times d\xi = 0$ — выражения $\int_0^1 u'_\xi(x, \xi) \overline{v''_{xx}(x, \xi)}\, dx$, $\int_0^1 u'_\xi(x, \xi) \overline{v''_{x\xi}(x, \xi)}\, dx$ и $\int_0^1 u'_\xi(x, \xi) \overline{v''_{\xi\xi}(x, \xi)}\, d\xi$. Тогда, складывая полученные таким образом равенства и учитывая определение функции $J_t(u, v)$, получаем

$$\int_0^t \frac{d}{d\xi} \left[\int_0^1 u'_x(x, \xi) \overline{v'_x(x, \xi)}\, dx \right] d\xi - \int_0^1 [u'_t(x, t) \overline{v'_t(x, t)} -$$
$$- u'_t(x, 0) \overline{v'_t(x, 0)}]\, dx + \int_0^t J_\xi(u, v)\, d\xi = 0.$$

Отсюда в силу условия A и определения (6) формы $[u, v]_t$ вытекает утверждение леммы 1.

Рассмотрим элементарные решения

$$u_h(x, t) = e^{\mu t} \sum_{r=0}^{h} \frac{t^r}{r!} y_{h-r}(x), \; v_j(x, t) = e^{\nu t} \sum_{s-0}^{j} \frac{t^s}{s!} z_{j-s}(x),$$

построенные по цепочкам корневых функций $y_0(x), \dots, y_p(x)$ и $z_0(x), \dots, z_q(x)$, отвечающим соответственно собственным значениям μ и ν задачи (1), (2). Согласно (5) и (6) равенство (9) для этих решений примет вид

$$e^{(\mu+\bar{\nu})t} \sum_{r=0}^{h} \sum_{s=0}^{j} \frac{t^{r+s}}{r!s!} [u_{h-r}, v_{j-s}]_0 = [u_h, v_j]_0 -$$
$$- \sum_{r=0}^{h} \sum_{s=0}^{j} \frac{1}{r!s!} \Phi_0(u_{h-r}, v_{j-s}) \int_0^t \xi^{r+s} e^{(\mu+\bar{\nu})\xi} d\xi. \tag{10}$$

Лемма 2. *Пусть элементарное решение $u_h(x, t)$ построено по корневым функциям, отвечающим мнимому собственному значению $\mu = i\zeta$. Тогда если выполнено условие A, то*

$$\Phi_0(u_h, u_h) = 0 \tag{11}$$

при $h = 0, \ldots, [p/2]$ *в случае* $i\zeta \neq 0$ *и при* $h = 0, \ldots, [(p + \varkappa_0)/2]$ *в случае* $i\zeta = 0$.

Доказательство. Записывая равенство (10) в случае $v_i = u_h$ и $\mu = \nu = i\zeta \neq 0$, приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях t в левой и правой частях этого равенства. Тогда имеем

$$\frac{1}{l}\sum_{s=0}^{l-1}\frac{1}{s!\,(l-1-s)!}\Phi_0(u_{h-s}, u_{h-l+1+s}) + \sum_{s=0}^{l}\frac{1}{s!\,(l-s)!}[u_{h-s}, u_{h-l+s}]_0 = 0, \tag{12}$$

где $l = 0, \ldots, 2p$, $h = 0, \ldots, p$ и считаем, что $u_r(x, t) = 0$ при $r < 0$. Полагая в (12) $h = 0$ и $l = 1$, получаем равенство (11) при $h = 0$. Пусть равенство (11) справедливо при $h = 0, \ldots, h_0 - 1$. Докажем его при $h = h_0$. В силу равенства (11) при $h = 0, \ldots, h_0 - 1$ и знакоопределенности формы $\Phi_0(u, u)$ вытекает

$$\Phi_0(u_h, u_j) = 0, \quad h = 0, \ldots, h_0 - 1; \quad j = 0, \ldots, p. \tag{13}$$

Пусть $h = 2h_0$. Положим в (12) последовательно $h = h_0$ и $l = 1$, $h = h_0 + 1$ и $l = 3, \ldots, h = 2h_0$ и $l = 2h_0 + 1$. Тогда в силу (13) и $u_{-1}(x, t) \equiv 0$ получим однородную систему $h_0 + 1$ уравнений для $h_0 + 1$ неизвестных $\xi_1 = \Phi_0(u_{h_0}, u_{h_0})$, $\xi_{s+2} = 2\mathrm{Re}\,[u_{h_0+s}, u_{h_0-1-s}]_0$, $s = 0, \ldots, h_0 - 1$. При этом первые $k + 1$, $k = 0, \ldots, h_0 - 1$, уравнений имеют вид

$$\frac{1}{(2k+1)\,k!k!}\xi_1 + \frac{1}{(k+1)!k!}\xi_2 + \frac{1}{(k+2)!\,(k-1)!}\xi_3 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{(2k+1)!\,0!}\xi_{k+2} = 0,$$

а последнее уравнение —

$$\frac{1}{(2h_0+1)\,h_0!h_0!}\xi_1 + \frac{1}{(h_0+1)!h_0!}\xi_2 +$$
$$+ \frac{1}{(h_0+2)!\,(h_0-1)!}\xi_3 + \ldots + \frac{1}{(2h_0)!1!}\xi_{h_0+1} = 0.$$

Запишем определитель $D(h_0)$ этой системы. Очевидно, что в $(k+1)$-й, $k = 0, \ldots, h_0 - 1$, строке этого определителя лишь первые $k + 2$ элемента отличны от нуля. Преобразуем определитель $D(h_0)$. Прибавим к $(k+1)$-му, $k = 1, \ldots, h_0$, столбцу 1-й столбец, умноженный на $(-1)^k$, 2-й, умноженный на $(-1)^{k-1}$ и т. д., k-й, умноженный на -1. Тогда в силу тождества $\dfrac{(-1)^k}{(2k+1)\,k!k!} + \displaystyle\sum_{s=0}^{k-1}\frac{(-1)^s}{(2k-s)!\,(s+1)!} = \frac{1}{(2k+1)!}$ преобразованный определитель принимает диагональный вид, а на диагонали располагаются числа $1, \dfrac{1}{3!}, \dfrac{1}{5!}, \ldots, \dfrac{1}{(2h_0+1)!}$. Следовательно, $D(h_0) \neq 0$, а значит, $\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_{h_0+1} = 0$. Отсюда, в частности, получаем $\Phi_0(u_{h_0}, u_{h_0}) = 0$.

Таким образом, равенство (11) справедливо при тех индексах h, для которых $2h \leqslant p$, что доказывает утверждение леммы 2 при $i\zeta \neq 0$. Если же $i\zeta = 0$, то нетрудно убедиться, что

$$\Phi_t(u_h, v_j) = J_t^1(u_{h-\varkappa_0}, v_{j-\varkappa_0}). \tag{14}$$

Следовательно, в равенстве (12) выражение $\Phi_0(u_{h-s}, u_{h-l+1+s})$ заменяется на $J_0'(u_{h-\varkappa_0-s}, u_{h-\varkappa_0+l+1+s})$. Затем, повторяя предыдущий процесс до $2h \leqslant p - \varkappa_0$, заключаем, что $J_0^1(u_h, u_h) = 0$ при $h = 0, \ldots, [(p-\varkappa_0)/2]$, откуда и из (14) при $u = v$ вытекает равенство (11) при $h = 0, \ldots, [(p+\varkappa_0)/2]$. Этим завершается доказательство леммы 2.

Далее, на основании леммы 1, равенства (10) и леммы 2, рассуждая, как и в [1, с. 21—24], выводим следующее утверждение.

Лемма 3. *Пусть выполнено условие A и $u_{h,j,k}(x,t)$, где $(h,j,k) \in \Lambda$ — элементарные решения, построенные по корневым функциям (3), а $\Xi \equiv \{(h,j,k) \in \Lambda : \operatorname{Re}\lambda_k < 0\}$, $\Delta \equiv \{(h,j,k) \in \Lambda : \operatorname{Re}\lambda_k = 0\}$, Δ_k — подмножество множества Δ, состоящее из мультииндексов $(h,j,k) \in \Delta$, у которых третий индекс k фиксирован. Тогда если $(-1)^r J_t^1(u,u) \geqslant 0$ при некотором $r = 0, 1$ и всех $u \in \mathcal{H}$, то для любого конечного набора комплексных чисел $c_{h,j,k}$*

$$(-1)^r \Big[\sum_{(h,j,k)\in\Delta\cup\Xi} c_{h,j,k}u_{h,j,k}, \sum_{(h,j,k)\in\Delta\cup\Xi} c_{h,j,k}u_{h,j,k}\Big]_0 \geqslant$$

$$\geqslant (-1)^r \sum_k \Big[\sum_{j:(\varkappa_{j,k},j,k)\in\Delta_k} c_{\varkappa_{j,k},j,k}u_{\varkappa_{j,k},j,k}, \sum_{j:(\varkappa_{j,k},j,k)\in\Delta_k} c_{\varkappa_{j,k},j,k}u_{\varkappa_{j,k},j,k}\Big]_0. \quad (15)$$

3. Докажем теперь теорему 1. Если в (15) суммирование вести по мультииндексам $(h,j,k) \in \Theta\, U\, \Theta_r$ $(\subseteq \Delta\, U\, \Xi)$, то в силу определения множества Θ_r правая часть в неравенстве (15) становится неотрицательной. Отсюда и из неравенства (7) вытекает, что для произвольного конечного набора комплексных чисел $c_{h,j,k}$

$$\Big\| \sum_r c_{h,j,k} F_-^{1/2} P_l^0 y_{h,j,k} \Big\|_{\mathbb{C}^l}^2 \sum_r c_{h,j,k} y_{h,j,k}^{1-1}(x) \Big\|_{\mathfrak{H}_{1-r}}^2 \leqslant$$

$$\leqslant \omega_0 \Big(\Big\| \sum_r c_{h,j,k} y_{h,j,k}^r(x) \Big\|_{\mathfrak{H}_r}^2 + \Big\| \sum_r c_{h,j,k} F_+^{1/2} P_l^0 y_{h,j,k} \Big\|_{\mathbb{C}^l}^2 \Big),$$

где $r = 0$ или $r = 1$, $\mathfrak{H}_0 = W_{2,u}^1$, $\mathfrak{H}_1 = L_2$, а символ $\sum\limits_r$ означает, что суммирование ведется по конечному числу индексов $(h,j,k) \in \Theta \cup \Theta_r$. Следовательно, полагая $\tilde{\mathfrak{H}}_0 = W_{2,u}^1 \oplus \mathbb{C}^l$, $\tilde{\mathfrak{H}}_1 = L_2 \oplus \mathbb{C}^l$, $\tilde{\mathfrak{H}} = W_{2,u}^1 \oplus L_2 \oplus \mathbb{C}^l$, $\hat{\mathfrak{H}} = W_{2,u}^1 \oplus L_2 \oplus \mathbb{C}^{2l}$ и $\hat{y}_{h,j,k} \equiv \{\tilde{y}_{h,j,k}(x), F_+^{1/2} P_l^0 y_{h,j,k}, F_-^{1/2} P_l^0 y_{h,j,k}\} \in \hat{\mathfrak{H}}$, $\hat{y}_{h,j,k}^0 \equiv \{\tilde{y}_{h,j,k}(x), F_+^{1/2} P_l^0 y_{h,j,k}\} \in \tilde{\mathfrak{H}}$, $\tilde{y}_{h,j,k}^r \equiv \{y_{h,j,k}^r(x), F_+^{1/2} P_l^0 y_{h,j,k}\} \in \tilde{\mathfrak{H}}_r$, получаем неравенства

$$(1+\omega_0)^{-1/2} \Big\| \sum_r c_{h,j,k} \hat{y}_{h,j,k} \Big\|_{\hat{\mathfrak{H}}} \leqslant \Big\| \sum_r c_{h,j,k} y_{h,j,k}^r \Big\|_{\tilde{\mathfrak{H}}_r} \leqslant \Big\| \sum_r c_{h,j,k} \hat{y}_{h,j,k} \Big\|_{\hat{\mathfrak{H}}}. \quad (16)$$

Из этих неравенств нетрудно вывести [1, с. 12], что оператор S, определенный для произвольного конечного набора чисел $c_{h,j,k}$ по формуле $S \sum\limits_r c_{h,j,k} \hat{y}_{h,j,k} = \sum\limits_r c_{h,j,k} \tilde{y}_{h,j,k}^r$, расширяется до ограниченного и ограниченно обратимого оператора $S : \mathfrak{O}[\hat{\mathfrak{H}}; \hat{y}_{h,j,k}; \Theta \cup \Theta_r] \to \mathfrak{O}[\tilde{\mathfrak{H}}_r; \tilde{y}_{h,j,k}^r; \Theta \cup \Theta_r]$. А это в силу определения эквивалентных систем (см. п. 1) равносильно первому соотношению эквивалентности из (8). Точно так же устанавливается второе соотношение эквивалентности в (8). При этом используются неравенства, аналогичные неравенствам (16), в которых вектор $\hat{y}_{h,j,k}$ заменен на вектор $\hat{y}_{h,j,k}^0$, а пространство $\hat{\mathfrak{H}}$ — на $\tilde{\mathfrak{H}}$.

4. Приведем некоторые примеры краевых задач, удовлетворяющих условиям теоремы 1. При этом, ради удобства, будем предполагать, что собственные значения простые, т. е. в (3) $j = 1$, $d_{1k} = 0$.

Пусть краевые условия (2) имеют вид

$$\lambda y(0) - \alpha\lambda y(1) = 0,\ \bar{\alpha} y'(0) - y'(1) - (\beta_0 + \beta_1\lambda - \beta_2\lambda^2)\, y(1) = 0, \qquad (17)$$

где число $\alpha \in \mathbb{C}$, а числа β_0 и β_2 — вещественные. В этом случае граничные условия в (4) принимают следующий вид: $u_t'(0, t) = \alpha u_t'(1, t)$, $u_x'(1, t) = \bar{\alpha} u_x'(0, t) - \beta_0 u(1, t) - \beta_1 u_t'(1, t) + \beta_2 u_{tt}''(1, t)$. Преобразуя функцию $J_t(u, v)$ с учетом этих равенств, заключаем, что условие A выполняется с функциями

$$J_t^0(u, v) = \beta_0 u(1, t)\, \overline{v(1, t)} - \beta_2 u_t'(1, t)\, \overline{v_t'(1, t)} + \int_0^1 q(x)\, u(x, t)\, \overline{v(x, t)}\, dx,$$

$$J_t^1(u, v) = 2\,[\operatorname{Re}\beta_1 + c(1 - |\alpha|^2)]\, u(1, t)\, \overline{v(1, t)} + 2\int_0^1 \operatorname{Re} p(x)\, u(x, t)\, \overline{v(x, t)}\, dx \qquad (18)$$

и числом $\varkappa_0 = 1$, причем форма $J_t^1(u, u)$ знакоопределена, если

$$\operatorname{Re}\beta_1 + c(1 - |\alpha|^2) \geqslant 0 \text{ и } \operatorname{Re} p(x) \geqslant 0, \qquad (19)$$

или

$$\operatorname{Re}\beta_1 + c(1 - |\alpha|^2) \leqslant 0 \text{ и } \operatorname{Re} p(x) \leqslant 0. \qquad (20)$$

На основании (6) и (18) имеем

$$[u, v]_0 = \beta_0 |u(1, 0)|^2 - \beta_2 |u_t'(1, 0)|^2 + \\ + \int_0^1 (q(x)\, |u(x, 0)|^2 + |u_x'(x, 0)|^2 - |u_t'(x, 0)|^2)\, dx. \qquad (21)$$

Отсюда вытекает, что неравенство (7) при $r = 0$ выполняется с операторами $P_1 u = u_t'(1, 0)$ и $F = -\beta_2$, а при $r = 1$ — с операторами $P_1 u = u_t'(1, 0)$ и $F = \beta_2$, если потребовать, например, чтобы

$$q(x) > 0, \quad \beta_0 \geqslant 0, \text{ или } q(x) > 4|\beta_0|^2, \quad \beta_0 \leqslant 0. \qquad (22)$$

В случае простых собственных значений множество Λ мультииндексов $(0, 1, k)$ эквивалентно множеству натуральных чисел N. По форме (21) определим два подмножества N_1^+ и N_1^- множества N, совпадающие соответственно с множествами $\Theta \cup \Theta_0$ и $\Theta \cup \Theta_1$ в случае простых λ_k. А именно, через $N_1^+ (N_1^-)$ обозначим такое подмножество индексов $k \in N$, для которых либо $\operatorname{Re}\lambda_k < 0$, либо $\operatorname{Re}\lambda_k = 0$ и

$$d_1(\lambda_k) \equiv (\beta_0 - \beta_2 |\lambda_k|^2)\, |y_k(1)|^2 + \int_0^1 [(q(x) - |\lambda_k|^2)\, |y_k(x)|^2 - |y_k'(x)|^2]\, dx \geqslant 0$$

(соответственно $d(\lambda_k) \leqslant 0$). Тогда из теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть краевые условия* (2) *имеют вид* (17). *Тогда если* $\beta_2 \geqslant 0$ *и выполнены неравенства* (19), *то при* $k \in N_1^+$

$$\langle \{\tilde{y}_k(x), \beta_2\lambda_k y_k(1)\};\ W_{2,u}^1 \oplus L_2 \oplus \mathbb{C}\rangle \simeq \langle y_k(x);\ W_{2,u}^1\rangle \simeq \langle \tilde{y}_k(x);\ W_{2,u}^1 \oplus L_2\rangle.$$

Если же $\beta_2 \leqslant 0$ *и выполнены условия* (20), (22), *то при* $k \in N_1^-$

$$\langle \{\tilde{y}_k(x), \beta_2\lambda_k y_k(1)\};\ W_{2,u}^1 \oplus L_2 \oplus \mathbb{C}\rangle \simeq \langle \lambda_k y_k(x);\ \tilde{L}_2\rangle \simeq \langle y_k(x);\ W_{2,u}^1 \oplus L_2\rangle.$$

Замечание. Рассмотрим уравнение (1) с краевыми условиями

$$u(0) - \alpha y(1) = 0, \quad \bar{\alpha} y'(0) - y'(1) - (\beta_0 + \beta_1\lambda - \beta_2\lambda^2)\, y(1) = 0, \qquad (23)$$

где либо $\beta_0 \geqslant 0$ и $q(x) > 0$, либо $\beta_0 \geqslant 0$, $q(x) \geqslant 0$ и $|1 - \alpha| + \beta_0 > 0$. Нетрудно убедиться, что $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи (1), (23), а при $\lambda \neq 0$ краевые условия (17) и (23) совпадают. Следовательно, теорема 2 справедлива для задачи (1), (23). Эта задача при $\beta_1 = \beta_2 = 0$ рассматривалась в [2], при $c = p(x) = \alpha = \beta_0 = \beta_2 = \beta_1 - i = 0$ совпадает с задачей Редже из теории рассеяния и рассматривалась в [5], а при $q(x) = p(x) = c = \alpha = 0$ совпадает с одной задачей из теории волновых движений жидкости (см., например, [6]).

Пусть теперь краевые условия (2) имеют вид

$$\alpha_1 y'(0) + \beta_1 y'(1) - \lambda y(0) = 0, \quad \alpha_2 y'(0) + \beta_2 y'(1) - \lambda y(1) = 0. \tag{24}$$

В этом случае условие A выполняется с функциями

$$J_t^0(u, v) = \int_0^1 q(x)\, u(x, t)\, \overline{v(x, t)}\, dx,$$
$$J_t^1(u, v) = (\tilde{\mathcal{A}}\tilde{u}(t), \tilde{v}(t))_{\mathbb{C}^2} + 2\int_0^1 \operatorname{Re} p(x)\, u_t'(x, t)\, \overline{v_t'(x, t)}\, dx \tag{25}$$

и числом $\varkappa_0 = 0$, где квадратная симметричная матрица

$$\tilde{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 2[\operatorname{Re}\alpha_1 + c(|\alpha_2|^2 - |\alpha_1|^2) & \beta_1 - \bar{\alpha}_2 + 2c(\bar{\alpha}_2\beta_2 - \bar{\alpha}_1\beta_1) \\ \bar{\beta}_1 - \alpha_2 + 2c(\alpha_2\bar{\beta}_2 - \alpha_1\bar{\beta}_1) & -2[\operatorname{Re}\beta_2 + c(|\beta_1|^2 - |\beta_2|^2) \end{pmatrix},$$

а вектор-столбцы $\tilde{u}(t) = \{u_x'(0, t), u_x'(1, t)\}^{\mathrm{T}}$, $\tilde{v}(t) = \{v_x'(0, t), v_x'(1, t)\}^{\mathrm{T}}$. При этом форма $J_t^1(u, u)$ знакоопределена, если $\tilde{\mathcal{A}} \geqslant 0$ и $\operatorname{Re} p(x) \geqslant 0$, или $\tilde{\mathcal{A}} \leqslant 0$ и $\operatorname{Re} p(x) \leqslant 0$. Кроме того, на основании (6) и (25) имеем

$$[u, u]_0 = \int_0^1 (q(x)\,|u(x, 0)|^2 + |u_x'(x, 0)|^2 - |u_t'(x, 0)|^2)\, dx.$$

Следовательно, неравенство (7) при $r = 0$ выполняется с оператором $F = 0$, а при $r = 1$ — с этим же оператором, если $q(x) > 0$ почти всюду на $(0, 1)$. Множества N_2^+ и N_2^- определяются как и в первом примере, но уже с помощью чисел

$$d_2(\lambda_k) \equiv \int_0^1 [(q(x) - |\lambda_k|^2)\,|y_k(x)|^2 + |y_k'(x)|^2]\, dx.$$

Таким образом, из теоремы 1 получаем следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть краевые условия* (2) *имеют вид* (24). *Тогда если* $\tilde{\mathcal{A}} \geqslant 0$ *и* $\operatorname{Re} p(x) \geqslant 0$, *то при* $k \in N_2^+$

$$\langle \tilde{y}_k(x); W_{2,u}^1 \oplus L_2 \rangle \simeq \langle y_k(x); W_{2,u}^1 \rangle.$$

Если же $\tilde{\mathcal{A}} \leqslant 0$, $\operatorname{Re} p(x) \leqslant 0$ *и* $q(x) > 0$, *то при* $k \in N_2^-$

$$\langle \tilde{y}_k(x); W_{2,u}^1 \oplus L_2 \rangle \simeq \langle \lambda_k y_k(x); L_2 \rangle.$$

Приведем теперь некоторые утверждения относительно свойств минимальности и базисности части корневых функций, для чего понадобятся некоторые условия нормальности и усиленной регулярности в смысле [5] краевых задач.

Пусть в (1) $c^2 < 1$. Тогда непосредственным вычислением (см., например, [2, с. 32]) можно убедиться, что задача (1), (17) нормальна, если $|\alpha| + |\beta_2| + |c + \beta_1 \pm i| > 0$, и усиленно регулярна, если $\beta_2 = 0$ и

$$\alpha[(|\alpha|^2 - 1)c \pm i(|\alpha|^2 + 1)\sqrt{1 - c^2} - \beta_1] \neq 0 \text{ при } c \neq 0,$$
$$\alpha[\beta_1 + i(|\alpha|^2 + 1)][(1 + |\alpha|^2)^2 - \beta_1^2 - 4(\operatorname{Re}\alpha)^2] \neq 0 \text{ при } c = 0. \tag{26}$$

Отсюда и из результатов работы [5] заключаем, что система векторов

$\{\tilde{y}_k(x), \beta_2\lambda_k y_k(1)\}$ при $k \in N$ минимальна в пространстве $W_{2,u}^1 \oplus L_2 \oplus \mathbb{C}$, если $|\alpha| + |\beta_2| + |c + \beta_1 \pm i| > 0$, а система $\tilde{y}_k(x)$ при $k \in N$ образует безусловный базис в $W_{2,u}^1 \oplus L_2$, если $\beta_2 = 0$ и выполнены условия (26). Следовательно, из теоремы 2 и свойств эквивалентных систем [1, с. 10] вытекают следующие утверждения.

Следствие 1. *Рассмотрим задачу* (1), (17), *в которой* $c^2 < 1$ *и* $|\alpha| + |\beta_2| + |c + \beta_1 \pm i| > 0$. *Тогда если* $\beta_2 \geqslant 0$ *и выполнено условие* (19), *то система* $y_k(x)$ *при* $k \in N_1^+$ *минимальна в пространстве* $W_{2,u}^1$, *а если* $\beta_2 \leqslant 0$ *и выполнены условия* (20), (22), *то система* $y_k(x)$ *при* $k \in N_1^-$ *минимальна в пространстве* L_2.

Следствие 2. *Рассмотрим задачу* (1), (17), *в которой* $c^2 < 1$, $\beta_2 = 0$ *и выполняются неравенства* (26). *Тогда если выполнено условие* (19), *то система* $y_k(x)$ *при* $k \in N_1^+$ *образует безусловный базис в* $\mathfrak{D}[W_{2,u}^1; y_k(x); N_1^+]$, *а если выполнены условия* (20) *и* (22), *то система* $\lambda_k y_k(x)$ *при* $k \in N_1^-$ *образует безусловный базис в* $\mathfrak{D}[L_2; y_k(x); N_1^-]$.

Нетрудно сформулировать аналогичные утверждения и для задачи (1), (24).

1. *Радзиевский Г. В.* Квадратичный пучок операторов (эквивалентность части корневых векторов).— Киев, 1984.— 51 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; № 84.32).
2. *Ашуров С. Б.* Эквивалентность и минимальность части корневых функций пучков дифференциальных операторов второго и четвертого порядков.— Киев, 1986.— 56 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; № 86. 9).
3. *Радзиевский Г. В.* Линейная независимость, эквивалентность и минимальность корневых векторов для некоторых нелинейных спектральных задач // Сиб. мат. журн.— 1990.— **31**, № 3.— С. 147—166.
4. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы.— М. : Наука, 1969.— 528 с.
5. *Шкаликов А. А.* Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Тр. сем. им. П. Г. Петровского.— 1983.— Вып. 9.— С. 190—229.
6. *Костюченко А. Г., Шкаликов А. А.* К теории самосопряженных квадратичных пучков операторов // Вест. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика.— 1983.— № 6.— С. 40—51.

Получено 16.07.90