УДК 517.928.5

В. П. Яковец, канд. физ.-мат. наук (Ин-т математики АН Украины, Киев)

Построение асимптотических решений линейных сингулярно возмущенных систем второго порядка с вырождением

Исследован вопрос о построении асимптотики общего решения линейной сингулярно возмущенной системы вида

$$\varepsilon^{2h} A(t, \varepsilon) \frac{d^2 x}{dt^2} + \varepsilon^h B(t, \varepsilon) \frac{dx}{dt} + C(t, \varepsilon) x = 0,$$

где $x \in R^n$, $t \in [t_0; T]$, $h \in N$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon \ll 1$ и $\det A(t, 0) \equiv 0$. Рассмотрен случай, когда квадратичный пучок матриц $C(t, 0) + \lambda B(t, 0) + \lambda^2 A(t, 0)$ регулярный и имеет либо простые «конечные» и «бесконечный» элементарные делители, либо по одному кратному.

Досліджене питання про побудову асимптотики загального розв'язку лінійної сингулярно збуреної системи вигляду

$$\varepsilon^{2h} A(t, \varepsilon) \frac{d^2 x}{dt^2} + \varepsilon^h B(t, \varepsilon) \frac{dx}{dt} + C(t, \varepsilon) x = 0,$$

де $x \in R^n$, $t \in [t_0; T]$, $h \in N$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 \ll 1$: $\det A(t, 0) \equiv 0$. Розглянуто випадок, коли квадратичний пучок матриць $C(t, 0) + \lambda B(t, 0) + \lambda^2 A(t, 0)$ регулярний і має або прості «скінченні» і «нескінченний» елементарні дільники, або по одному кратному.

Рассмотрим систему уравнений

$$\varepsilon^{2h} A(t, \varepsilon) \frac{d^2 x}{dt^2} + \varepsilon^h B(t, \varepsilon) \frac{dx}{dt} + C(t, \varepsilon) x = 0, \tag{1}$$

где $x \in R^n$; $t \in [t_0; T]$; $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 \ll 1$; $h \in N$; $A(t, \varepsilon)$, $B(t, \varepsilon)$, $C(t, \varepsilon)$ — вещественнозначные или комплекснозначные $(n \times n)$-матрицы, допускающие на отрезке $[t_0; T]$ сходящиеся или асимптотические разложения по степеням ε:

$$A(t, \varepsilon) = \sum_{k \geqslant 0} \varepsilon^k A_k(t), \quad B(t, \varepsilon) = \sum_{k \geqslant 0} \varepsilon^k B_k(t); \qquad C(t, \varepsilon) = \sum_{k \geqslant 0} \varepsilon^k C_k(t). \quad (2)$$

Предполагаем, что все коэффициенты матричных разложений (2) бесконечно дифференцируемы на отрезке $[t_0; T]$ и корни уравнения

$$\det(C_0(t) + \omega B_0(t) + \omega^2 A_0(t)) = 0, \quad (3)$$

которое будем называть характеристическим, сохраняют постоянную кратность.

Вопрос о построении асимптотики общего решения системы (1) исследован ранее при условии $\det A_0(t) \neq 0$ в различных частных случаях. Так, в работах [1, 2] рассмотрен случай, когда $B_0(t) = 0$, а матрицы $A_0(t)$ и $C_0(t)$ симметричны. Условие симметричности впервые было снято в работе [3], где предполагалось, что $B_0(t) \neq 0$ и все корни уравнения (3) простые. Случай кратных корней уравнения (3) исследован в [4, 5] при условии $A(t, \varepsilon) = E$, $B(t, \varepsilon) = 0$. Наконец, в [6, 7] проведено подробное исследование системы (1) при условии $B_0(t) = 0$. В работе [7] также частично рассмотрен случай, когда $B_0(t) \neq 0$ и уравнение (3) имеет кратный корень.

В настоящей работе исследуется вопрос о построении асимптотических решений системы (1) в случае вырождения матрицы $A(t, \varepsilon)$ при $\varepsilon = 0$, т. е. при условии $\det A_0(t) = 0 \forall t \in [t_0; T]$.

1. Некоторые вспомогательные предложения. Рассмотрим квадратичный пучок матриц $P(\omega) = C + \omega B + \omega^2 A$, где A, B, C — некоторые постоянные $(n \times n)$-матрицы, и $\det A = 0$.

Определение 1. *Пучок матриц $P(\omega)$ будем называть регулярным, если $\det P(\omega) \not\equiv 0$, и сингулярным, если $\det P(\omega) \equiv 0$.*

Введем в рассмотрение пучок матриц $P(\lambda, \omega) = \lambda^2 C + \lambda\omega B + \omega^2 A$, зависящий от двух параметров λ и ω. Найдем его элементарные делители $l_s(\lambda, \omega)$ как неприводимые множители, на которые разлагаются инвариантные многочлены матрицы $P(\lambda, \omega)$ [8]. Часть из них имеет вид $l_i(\lambda, \omega) = (\alpha_i\lambda + \beta_i\omega)^{r_i}$, а вторая часть зависит только от $\lambda : l_j(\lambda) = \lambda^{s_j}$. Если теперь в $l_s(\lambda, \omega)$ положить $\lambda = 1$, то из элементарных делителей первой группы получим элементарные делители пучка $P(\omega)$. Что касается элементарных делителей второй группы, то они являются элементарными делителями пучка $Q(\lambda) = A + \lambda B + \lambda^2 C$, симметричного пучку $P(\omega)$, и соответствуют его нулевому собственному значению. Следуя [8], элементарные делители первой группы будем называть «конечными» элементарными делителями пучка $P(\omega)$, а элементарные делители второй группы — «бесконечными» элементарными делителями этого пучка.

Следуя [9], введем понятие жордановой цепочки векторов для квадратичного пучка $P(\omega)$.

Определение 2. *Число ω_0 будем называть собственным значением квадратичного пучка $P(\omega)$, а последовательность ненулевых векторов $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ — соответствующей жордановой цепочкой собственного и присоединенных векторов длины p, если выполняются соотношения*

$$P(\omega_0)\varphi_1 = 0, \quad P(\omega_0)\varphi_2 + P'(\omega_0)\varphi_1 = 0,$$

$$P(\omega_0)\varphi_i + P'(\omega_0)\varphi_{i-1} + \frac{1}{2}P''(\omega_0)\varphi_{i-2} = 0, \quad i = \overline{3, p}, \quad (4)$$

и уравнение $P(\omega_0)x + P'(\omega_0)\varphi_p + \frac{1}{2}P''(\omega_0)\varphi_{p-1} = 0$ неразрешимо относительно x.

Лемма 1. *Если пучок матриц $P(\omega)$ регулярный, то он имеет определенное количество «конечных» и «бесконечных» элементарных делителей,* *сумма кратностей которых равна $2n$. Каждому «конечному» элементарному делителю кратности p отвечает жорданова цепочка векторов пучка $P(\omega)$ длины p. Каждому «бесконечному» элементарному делителю кратности q отвечает жорданова цепочка векторов длины q симметричного пучка $Q(\lambda)$, соответствующая его нулевому собственному значению.*

Доказательство. Наряду с квадратичным пучком матриц $P(\omega)$ рассмотрим линейный пучок $(2n \times 2n)$-матриц $L(\omega) = \tilde{A} + \omega\tilde{B}$, в котором матрицы $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ представляются в блочном виде

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -C & B \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где E, 0 — соответственно единичная и нулевая $(n \times n)$-матрицы. Используя формулы Шура для вычисления определителей блочных матриц [8, с. 55], легко убедиться, что $\det L(\omega) = \det P(\omega)$, откуда следует, что собственные значения пучков $P(\omega)$ и $L(\omega)$ совпадают. Покажем, что «конечные» и «бесконечные» элементарные делители этих пучков также совпадают.

Умножив ω-матрицу $L(\omega)$ слева и справа соответственно на неособенные матрицы

$$R(\omega) = \begin{pmatrix} B + \omega A & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}, \quad S(\omega) = \begin{pmatrix} E & 0 \\ -\omega E & E \end{pmatrix},$$

определители которых не зависят от ω, приведем ее к эквивалентной ω-матрице

$$\tilde{L}(\omega) = \begin{pmatrix} P(\omega) & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix},$$

элементарные делители которой совпадают с элементарными делителями пучка $P(\omega)$. Но поскольку элементарные делители эквивалентных ω-матриц совпадают [8], то «конечные» элементарные делители квадратичного пучка $P(\omega)$ совпадают с «конечными» элементарными делителями линейного пучка $L(\omega)$.

Аналогично устанавливаем, что элементарные делители симметричного квадратичного пучка $Q(\lambda)$ совпадают с элементарными делителями соответствующего линейного пучка $M(\lambda) = \tilde{B} + \lambda\tilde{A}$, симметричного $L(\omega)$. Отсюда следует, что совпадают и «бесконечные» элементарные делители пучков $P(\omega)$ и $L(\omega)$.

Поскольку сумма кратностей всех «конечных» и «бесконечных» элементарных делителей линейного регулярного пучка $L(\omega)$ равна $2n$, то такой является и сумма кратностей соответствующих элементарных делителей квадратичного пучка $P(\omega)$.

Пусть пучок $P(\omega)$ имеет «конечный» элементарный делитель $(\omega - \omega_0)^p$ кратности p. По доказанному выше такой же «конечный» элементарный делитель имеет и линейный пучок $L(\omega)$. Исходя из теоремы Вейерштрасса о приведении линейного регулярного пучка матриц к каноническому виду [8, с. 315], легко убедиться, что этому элементарному делителю отвечает жорданова цепочка $2n$-мерных векторов длины p, состоящая из собственного вектора φ_1 и $p-1$ присоединенных векторов φ_i, $i = \overline{2, p-1}$, которые удовлетворяют соотношениям

$$(\tilde{A} + \omega_0\tilde{B})\varphi_1 = 0, \quad (\tilde{A} + \omega_0\tilde{B})\varphi_i + \tilde{B}\varphi_{i-1} = 0, \quad i = \overline{2, p}. \tag{6}$$

При этом уравнение

$$(\tilde{A} + \omega_0\tilde{B})y + \tilde{B}\varphi_p = 0 \tag{7}$$

неразрешимо.

Обозначим $\varphi_i = \mathrm{col}(\varphi_i^{(1)}, \varphi_i^{(2)})$, где $\varphi_i^{(j)}$, $i = \overline{1, p}$, $j = 1, 2$, — n-мерные векторы, координатами которых являются соответственно n первых и n последних координат векторов φ_i. Тогда, учитывая структуру матриц $\tilde{A}$,

$\tilde{B}$, из уравнений (6) получим

$$P(\omega_0)\varphi_1^{(1)} = 0, \quad P(\omega_0)\varphi_i^{(1)} + P'(\omega_0)\varphi_{i-1}^{(1)} + A\varphi_{i-2}^{(1)} = 0, \quad i = \overline{2, p}. \tag{8}$$

Кроме того, из неразрешимости уравнения (7) следует неразрешимость уравнения $P(\omega_0)x + P'(\omega_0)\varphi_p + A\varphi_{p-1} = 0$. Таким образом, «конечному» элементарному делителю квадратичного пучка $P(\omega)$ отвечает жорданова цепочка векторов, длина которой совпадает с кратностью элементарного делителя.

Если пучок $P(\omega)$ имеет «бесконечный» элементарный делитель кратности q, то по доказанному выше такой же элементарный делитель имеет линейный пучок $L(\omega)$. В этом случае, как следует из той же теоремы Вейерштрасса, нулевому собственному значению симметричного пучка $M(\lambda)$ отвечает жорданова цепочка длины q, состоящая из $2n$-мерных векторов $\tilde{\varphi}_i$, $i = \overline{1, q}$, которые удовлетворяют соотношениям

$$\tilde{B}\tilde{\varphi}_1 = 0, \quad \tilde{B}\tilde{\varphi}_i + \tilde{A}\tilde{\varphi}_{i-1} = 0, \quad i = \overline{2, q},$$

а уравнение $\tilde{B}y + \tilde{A}\varphi_q = 0$ неразрешимо. Отсюда, обозначая $\tilde{\varphi}_i = \mathrm{col}(\tilde{\varphi}_i^{(1)}, \tilde{\varphi}_i^{(2)})$, $i = \overline{1, q}$, и учитывая (5), для n-мерных векторов $\tilde{\varphi}_i^{(2)}$, $i = \overline{1, q}$, будем иметь

$$A\tilde{\varphi}_i^{(2)} = 0, \quad A\tilde{\varphi}_i^{(2)} + B\tilde{\varphi}_{i-1}^{(2)} + C\tilde{\varphi}_{i-2}^{(2)} = 0, \quad i = \overline{2, q}. \tag{9}$$

При этом уравнение $Ax + B\tilde{\varphi}_{q-1}^{(2)} + C\tilde{\varphi}_q^{(2)} = 0$ неразрешимо. Таким образом, «бесконечному» элементарному делителю пучка $P(\omega)$ отвечает жорданова цепочка симметричного пучка $Q(\lambda)$, соответствующая его нулевому собственному значению, причем длина этой цепочки равна кратности данного «бесконечного» элементарного делителя. Лемма доказана.

Замечание 1. Векторы $\varphi_i^{(1)}$, $i = \overline{1, p}$, и $\tilde{\varphi}_i^{(2)}$, $i = \overline{1, q}$, составляющие жордановы цепочки пучков $P(\omega)$ и $Q(\lambda)$, из соотношений (8), (9) определяются неоднозначно. Выбрав определенным образом собственные векторы $\varphi_1^{(1)}$, $\tilde{\varphi}_1^{(2)}$ и обобщенные обратные матрицы H, G к матрицам $P(\omega_0)$, A соответственно [7], присоединенные векторы можно определять с помощью рекуррентных формул

$$\begin{gathered}\varphi_i^{(1)} = -HP'(\omega_0)\varphi_{i-1}^{(1)} - HA\varphi_{i-2}^{(1)}, \quad i = \overline{2, p},\\ \tilde{\varphi}_i^{(2)} = -GB\tilde{\varphi}_{i-1}^{(2)} - GC\tilde{\varphi}_{i-2}^{(2)}, \quad i = \overline{2, q}.\end{gathered} \tag{10}$$

Замечание 2. Доказанная лемма полностью переносится на случай квадратичного пучка $P(t, \omega) = C_0(t) + \omega B_0(t) + \omega^2 A_0(t)$ с переменными матрицами, если все его «конечные» и «бесконечные» элементарные делители сохраняют постоянную кратность на рассматриваемом промежутке изменения независимой переменной. При этом, используя идеи доказательства теоремы 1.7 из [7], можно показать, что если элементы матриц $A_0(t)$, $B_0(t)$, $C_0(t)$ имеют на отрезке $[t_0; T]$ непрерывные производные до m-го порядка включительно, то все собственные значения пучка $P(t, \omega)$ имеют на $[t_0; T]$ непрерывные производные того же порядка. Кроме того, собственные векторы пучка $P(t, \omega)$ и симметричного пучка $Q(t, \lambda)$, а также обобщенные обратные матрицы $H(t)$ и $G(t)$ к матрицам $P(t, \omega_0(t))$ и $A_0(t)$ можно определить так, чтобы они имели такую же степень гладкости.

2. Случай простых элементарных делителей. Допустим, что пучок матриц $P(t, \omega)$ регулярный и имеет на отрезке $[t_0; T]$ только простые элементарные делители: один «бесконечный» и $(2n-1)$ «конечных», которые отвечают простым корням $\omega_i(t)$, $i = \overline{1, 2n-1}$, характеристического уравнения (3). Обозначим через $\tilde{\varphi}(t)$ собственный вектор матрицы $A_0(t)$, соответствующий ее нулевому собственному значению, а через

$\tilde{\psi}(t)$ — элемент нуль-пространства матрицы $A_0^*(t)$, сопряженной $A_0(t)$. Тогда справедлива такая теорема.

Теорема 1. *Если выполняется условие*

$$(A_1(t)\tilde{\varphi}(t), \tilde{\psi}(t)) \neq 0 \quad \forall t \in [t_0; T], \tag{11}$$

где символом (,) *обозначено скалярное произведение в n-мерном евклидовом пространстве, то система уравнений* (1) *имеет на отрезке* $[t_0; T]$ $(2n-1)$ *формальных решений вида*

$$x(t, \varepsilon) = u(t, \varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_{t_0}^{t}\lambda(t, \varepsilon)\,dt\right), \tag{12}$$

соответствующих «конечным» элементарным делителям пучка $P(t, \omega)$, *и одно решение вида*

$$x(t, \varepsilon) = v(t, \varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h-1}\int_{t_0}^{t}\frac{dt}{\xi(t, \varepsilon)}\right), \tag{13}$$

соответствующее «бесконечному» элементарному делителю, где $u(t, \varepsilon)$, $v(t, \varepsilon)$ — *n-мерные векторы, а* $\lambda(t, \varepsilon)$, $\xi(t, \varepsilon)$ — *скалярные функции, которые представляются в виде разложений по степеням* ε:

$$u(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k u_k(t), \quad \lambda(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\lambda_k(t), \tag{14}$$

$$v(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k v_k(t), \quad \xi(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\xi_k(t). \tag{15}$$

Доказательство. Покажем, что коэффициенты разложений (14), (15) можно определить так, чтобы векторы (12), (13) удовлетворяли системе (1) в смысле равенства формальных рядов.

Подставив (12), (14) в систему (1) и приравняв в полученном соотношении коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим

$$P(t, \lambda_0)u_0(t) = 0, \tag{16}$$

$$P(t, \lambda_0)u_k(t) = b_k(t), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{17}$$

где

$$b_k(t) = -\lambda_k(B_0 + 2\lambda_0A_0)u_0 + f_k(t), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{18}$$

а $f_k(t)$ выражается через коэффициенты матричных рядов (2) и содержит только те коэффициенты разложений (14), индексы которых меньше k. Согласно предположениям из уравнения (16) определяются $(2n-1)$ различных функций $\lambda_0(t)$ и столько же векторов $u_0(t)$:

$$\lambda_0(t) = \omega_i(t), \quad u_0(t) = \varphi_i(t), \quad i = \overline{1, 2n-1}. \tag{19}$$

Зафиксируем одну из определенных таким образом функций $\lambda_0(t)$ и соответствующий вектор $u_0(t)$. Пусть, например, $\lambda_0(t) = \omega_s(t)$, $u_0(t) = \varphi_s(t)$. Тогда уравнения (17) запишутся в виде

$$P(t, \omega_s)u_k(t) = -\lambda_k\frac{\partial P(t, \omega_s)}{\partial\omega}\varphi_s + f_k(t), \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{20}$$

Они разрешимы тогда и только тогда, когда их правые части ортогональны вектору $\psi_s(t)$-элементу нуль-пространства матрицы $P^*(t, \omega_s)$, сопряженной матрице $P(t, \omega_s)$. Поскольку по предположению $\omega_s(t)$ — простые собственные значения пучка $P(t, \omega)$, то в силу леммы 1 присоединенные векторы у этого пучка отсутствуют. Следовательно, $\left(\frac{\partial P(t, \omega_s)}{\partial\omega}\varphi_s, \psi_s\right) \neq$ $\neq 0$ $\forall t \in [t_0; T]$. Поэтому за счет скалярного множителя, с точностью до которого определяется вектор $\psi_s(t)$, определим его так, чтобы

$\left(\dfrac{\partial P(t, \omega_s)}{\partial \omega} \varphi_s, \psi_s\right) = 1$. Тогда, записав условие разрешимости уравнения (20), найдем $\lambda_k(t) = (f_k(t), \psi_s(t))$. Теперь вектор $u_k(t)$ определим по формуле $u_k(t) = H_s(t) b_k(t)$, где $H_s(t)$ — обобщенная обратная матрица к матрице $P(t, \omega_s)$.

Полученные формулы имеют рекуррентный характер и позволяют определять любые коэффициенты разложений (14). Существование производных, которые содержатся в этих формулах, следует из бесконечной дифференцируемости коэффициентов матричных разложений (2) и замечания 2. Изменяя s от 1 до $2n-1$, таким способом будет построено $2n-1$ частных формальных решений системы (1), соответствующих «конечным» элементарным делителям пучка $P(t, \omega)$.

Подставив теперь в систему (1) вектор (13), будем иметь

$$A(t, \varepsilon) v(t, \varepsilon) + \varepsilon \xi(t, \varepsilon) B(t, \varepsilon) v(t, \varepsilon) + \varepsilon^2 \xi^2(t, \varepsilon) C(t, \varepsilon) v(t, \varepsilon) + 2\varepsilon^{h+1} \xi(t, \varepsilon) \times$$
$$\times A(t, \varepsilon) v'(t, \varepsilon) - \varepsilon^{h+1} \xi'(t, \varepsilon) A(t, \varepsilon) v(t, \varepsilon) + \varepsilon^{h+2} \xi^2(t, \varepsilon) B(t, \varepsilon) v'(t, \varepsilon) +$$
$$+ \varepsilon^{2h+2} \xi^2(t, \varepsilon) A(t, \varepsilon) v''(t, \varepsilon) = 0. \tag{21}$$

Приравняв здесь коэффициенты при одинаковых степенях ε с учетом разложений (2), (15), получим бесконечную систему уравнений

$$A_0(t) v_0(t) = 0, \tag{22}$$

$$A_0(t) v_k(t) = a_k(t), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{23}$$

где

$$a_k(t) = -\xi_{k-1}(t) B_0(t) v_0(t) + g_k(t),$$

а вектор $g_k(t)$ выражается через коэффициенты разложений (2), а также функции $\xi_i(t)$, индексы которых $i < k-1$, и вектор-функции $v_j(t)$, индексы которых $j < k$. В частности,

$$g_1(t) = -A_1(t) v_0(t). \tag{24}$$

Из уравнения (22) найдем

$$v_0(t) = \tilde{\varphi}(t). \tag{25}$$

Уравнения (23) разрешимы, если $(a_k, \tilde{\psi}) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$. Используя это условие при $k = 1$ и учитывая (24), (25), получаем

$$\xi_0 (B_0 \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) - (A_1 \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) = 0. \tag{26}$$

Поскольку «бесконечный» элементарный делитель по предположению простой, то согласно лемме 1 $(B_0 \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) \neq 0$ $\forall t \in [t_0; T]$. Поэтому вектор $\tilde{\psi}(t)$ определим так, чтобы выполнялось соотношение $(B_0 \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) = 1$. Тогда из уравнения (26) согласно условию (11) определяется отличная от нуля функция $\xi_0(t) = (A_1 \tilde{\varphi}, \tilde{\psi})$, что обеспечивает отличие от нуля функции $\xi(t, \varepsilon)$ при достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Последующие коэффициенты разложений (15) определяются рекуррентным образом. Если $\xi_i(t)$ и $v_{i+1}(t)$ уже известны при $i < k$, то, использовав условие разрешимости уравнений (23) на $(k+1)$-м шаге, найдем $\xi_k(t) = (g_{k+1}(t), \tilde{\psi}(t))$, а вектор $v_{k+1}(t)$ определим по формуле $v_{k+1}(t) = G(t) a_{k+1}(t)$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 3. Теорема 1 позволяет построить $2n$ частных формальных решений системы (1). Хотя векторы $\varphi_i(t)$, $i = \overline{1, 2n-1}$, $\tilde{\varphi}(t)$ линейно зависимы, тем не менее построенные решения линейно независимы при достаточно малых $\varepsilon > 0$. Действительно, рассмотрим нулевые приближения, оборвав разложения (14), (15) на нулевом члене:

$$x_0^{(i)}(t, \varepsilon) = \varphi_i(t) \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_{t_0}^{t} \omega_i(t)\, dt\right), \quad i = \overline{1, 2n-1}, \tag{27}$$

$$x_0^{(2n)}(t,\varepsilon)=\tilde{\varphi}(t)\exp\left(\varepsilon^{-h-1}\int_{t_0}^{t}\frac{dt}{\xi_0(t)}\right).$$

Составим $2n$-мерные векторы из этих приближений и их производных, оставив только главные члены и отбросив возмущающие члены более высокого порядка малости:

$$y_0^{(i)}(t,\varepsilon)=\begin{pmatrix}\varphi_i(t)\\ \varepsilon^{-h}\omega_i(t)\varphi_i(t)\end{pmatrix}\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_{t_0}^{t}\omega_i(t)\,dt\right),\quad i=\overline{1,\,2n-1},$$

$$y_0^{(2n)}(t,\varepsilon)=\begin{pmatrix}0\\ \varepsilon^{-h-1}\xi_0^{-1}(t)\,\tilde{\varphi}(t)\end{pmatrix}\exp\left(\varepsilon^{-h-1}\int_{t_0}^{t}\frac{dt}{\xi_0(t)}\right).$$

Поскольку экспоненциальные множители не влияют на линейную зависимость этих векторов, то для доказательства их линейной независимости достаточно доказать неособенность $(2n\times 2n)$-матрицы $U_0(t,\varepsilon)$, составленной из векторных множителей при экспонентах. Используя свойства определителей, будем иметь

$$\det U_0(t,\varepsilon)=\varepsilon^{-nh}\varepsilon^{-1}\xi_0^{-1}(t)\begin{vmatrix}\varphi_1 & \dots & \varphi_{2n-1} & 0\\ \omega_1\varphi_1 & \dots & \omega_{2n-1}\varphi_{2n-1} & \tilde{\varphi}\end{vmatrix}.$$

Из доказательства леммы 1 следует, что первые $2n-1$ вектор-столбцов данного определителя являются собственными векторами линейного пучка $(2n\times 2n)$-матриц $L(t,\omega)=\tilde{A}_0(t)+\omega\tilde{B}_0(t)$, соответствующими его простым собственным значениям $\omega_i(t)$, а последний вектор-столбец является собственным вектором симметричного пучка $M(t,\lambda)=\tilde{B}_0(t)+\lambda\tilde{A}_0(t)$, соответствующим его нулевому собственному значению (матрицы $\tilde{A}_0(t)$, $\tilde{B}_0(t)$ имеют структуру, аналогичную (5)). Поскольку эти векторы линейно независимы, то отсюда следует, что $\det U_0(t,\varepsilon)\neq 0$. Следовательно, нулевые приближения (27) линейно независимы, а значит, при достаточно малых $\varepsilon>0$ линейно независимыми будут любые m-приближения, получаемые путем обрыва разложений (14), (15) на m-м члене. Таким образом, построенные решения представляют собой общее формальное решение системы (1).

З а м е ч а н и е 4. Как видно из доказательства теоремы 1, для существования решения (13), соответствующего «бесконечному» элементарному делителю квадратичного пучка $P(t,\omega)$, существенную роль играет условие (11). Нетрудно убедиться, что это условие обеспечивает неособенность матрицы $A(t,\varepsilon)$ при достаточно малых $\varepsilon>0$. Если это условие тождественно не выполняется, то вместо него появятся другие, которые также должны обеспечивать неособенность матрицы $A(t,\varepsilon)$. Чтобы найти эти условия и проследить закономерность их появления, допустим, что ряд (2) для матрицы $A(t,\varepsilon)$ конечный и обрывается на s-м члене:

$$A(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{s}\varepsilon^k A_k(t). \tag{28}$$

Тогда матрицу $A(t,\varepsilon)$ можно рассматривать как полиномиальный пучок матриц относительно ε порядка s. Поскольку $\det A_0(t)=0$, то этот пучок имеет нулевое собственное значение и по предположению ему отвечает один собственный вектор $\tilde{\varphi}(t)$. Матрица $A(t,\varepsilon)$ будет неособенной при достаточно малых $\varepsilon>0$ тогда и только тогда, когда полиномиальный пучок (28) регулярен. Это условие обеспечивается в том случае, если кратность нулевого собственного значения этого пучка не превышает степени многочлена $\det A(t,\varepsilon)$, которая, в свою очередь, не превышает sn. Но кратность нулевого собственного значения полиномиального пучка (28) в рассматриваемом случае должна совпадать с длиной соответствующей жордановой цепочки собственного и присоединенных векторов данного пучка.

Таким образом, матрица $A(t, \varepsilon)$ неособенна при достаточно малых $\varepsilon > 0$ тогда и только тогда, когда длина этой цепочки не превышает sn. Отсюда, используя определение жордановой цепочки для полиномиальных пучков матриц [9], приходим к следующему алгоритму для получения условий, обеспечивающих неособенность матрицы $A(t, \varepsilon)$.

Пусть $\tilde{\varphi}_1 = \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}_2, \ldots$ — векторы, составляющие указанную жорданову цепочку. Тогда выполняются соотношения

$$A_0\tilde{\varphi} = 0, \quad A_0\tilde{\varphi}_2 = -\tilde{A}_1\tilde{\varphi},$$

$$A_0\tilde{\varphi}_i = -A_1\tilde{\varphi}_{i-1} - A_2\tilde{\varphi}_{i-2} - \ldots - A_s\tilde{\varphi}_{i-s}, \quad i = \overline{3, sn}.$$

Если $(A_1\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) \neq 0$, то эта цепочка обрывается уже на втором шаге, что приводит к теореме 1. Если $(A_1\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) = 0 \quad \forall t \in [t_0; T]$, то длина цепочки больше 1. Тогда из второго уравнения найдем $\tilde{\varphi}_2 = -GA_1\tilde{\varphi}$. Подставив это выражение в третье уравнение, получим условие $((A_2 - A_1GA_1)\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}) \neq 0$, которое обеспечит существование цепочки длины 2. Рассуждая так и далее, на k-м шаге получим условие

$$\gamma_k(t) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^i (\sigma(i, k)\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) \neq 0 \quad \forall t \in [t_0; T], \tag{29}$$

где символом $\sigma(i, k)$ обозначена сумма всевозможных произведений i множителей $A_{j_1}, GA_{j_2}, \ldots, GA_{j_i}$, сумма индексов которых равна k. Как легко убедиться из (21), если $\gamma_i(t) \equiv 0$ при $i < k$, но $\gamma_k(t) \neq 0$, то решение, соответствующее «бесконечному» элементарному делителю, необходимо строить в виде

$$x(t, \varepsilon) = v(t, \varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-h-k} \int_{t_0}^{t} \frac{dt}{\xi(t, \varepsilon)}\right). \tag{30}$$

При этом функция $\xi_0(t) = \gamma_k(t)$.

Если все $\gamma_i(t) \equiv 0$ при $i = \overline{1, sn}$, то полиномиальный пучок (28) становится сингулярным и $\det A(t, \varepsilon) \equiv 0$. В этом случае система (1) будет иметь только $2n - 1$ линейно независимых решений, соответствующих «конечным» элементарным делителям пучка $P(t, \omega)$. Поскольку в данном случае $\mathrm{rang}\, A(t, \varepsilon) = n - 1$, то они дают ее общее решение [10]. Если же ряд для матрицы $A(t, \varepsilon)$ бесконечный, то в случае $\det A(t, \varepsilon) \neq 0 \ \forall t \in [t_0; T]$ будет выполняться одно из условий (29). В случае $\det A(t, \varepsilon) \equiv 0$ ни одно из этих условий выполняться не будет, и решения вида (30) не существует.

3. Случай кратных элементарных делителей. Как видно из доказательства теоремы 1, если корни характеристического уравнения (3) изолированы и сохраняют постоянную кратность на отрезке $[t_0; T]$, то решения системы (1) строятся отдельно для каждого корня, независимо от поведения других корней. Поэтому с целью упрощения выкладок будем предполагать, что уравнение (3) имеет один кратный корень $\omega_0(t)$ кратности $p > 1$, которому отвечает один «конечный» элементарный делитель пучка $P(t, \omega)$ той же кратности. Наряду с этим будем предполагать, что квадратичный пучок матриц $P(t, \omega)$ имеет «бесконечный» элементарный делитель кратности $q \geqslant 1$, причем $p + q = 2n$.

Согласно лемме 1 в этом случае пучок $P(t, \omega)$ имеет жорданову цепочку векторов длины p, состоящую из собственного вектора $\varphi(t)$ и $p - 1$ присоединенных векторов, которые, как отмечалось выше, можно определить с помощью рекуррентных формул

$$\varphi_i(t) = -H(t)\frac{\partial P(t, \omega_0)}{\partial \omega}\varphi_{i-1}(t) - H(t)A_0(t)\varphi_{i-2}(t), \quad i = \overline{2, p}. \tag{31}$$

Из леммы 1 также следует, что нулевому собственному значению симметричного пучка $Q(t, \lambda)$ отвечает жорданова цепочка векторов длины q, состоящая из собственного вектора $\tilde{\varphi}(t)$ и $q-1$ присоединенных векторов, которые определим по формулам

$$\tilde{\varphi}_i(t) = -G(t) B_0(t) \tilde{\varphi}_{i-1}(t) - G(t) C_0(t) \tilde{\varphi}_{i-2}(t), \quad i = \overline{2, q}. \tag{32}$$

Обозначим через $\psi(t)$ элемент нуль-пространства матрицы $P^*(t, \omega_0)$, а через $\tilde{\psi}(t)$ — элемент нуль-пространства матрицы $A_0^*(t)$, которые определим так, чтобы выполнялись соотношения

$$\left(\left(\frac{\partial P(t, \omega_0)}{\partial \omega} \varphi_p + A_0(t) \varphi_{p-1}\right), \psi\right) = 1 \quad \forall t \in [t_0; T], \tag{33}$$

$$((B_0(t) \tilde{\varphi}_q + C_0(t) \tilde{\varphi}_{q-1}), \tilde{\psi}) = 1 \quad \forall t \in [t_0; T]. \tag{34}$$

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Если выполняется условие* (11), *а также условие*

$$\left(\left(C_1 + \omega_0 B_1 + \omega_0^2 A_1 + \delta_{1,h}\left(\omega_0' A_0 + \frac{\partial P(t, \omega_0)}{\partial \omega} \frac{d}{dt}\right)\right) \varphi, \psi\right) \neq 0 \quad \forall t \in [t_0; T], \tag{35}$$

где $\delta_{1,h}$ — символ Кронекера, то система (1) *имеет на отрезке* $[t_0; T]$ p *частных формальных решений вида*

$$x(t, \varepsilon) = u(t, \mu) \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_{t_0}^{t} \lambda(t, \mu)\, dt\right), \tag{36}$$

соответствующих «конечному» элементарному делителю пучка $P(t, \omega)$, и q решений вида

$$x(t, \varepsilon) = v(t, \nu) \exp\left(\varepsilon^{-h} \nu^{-1} \int_{t_0}^{t} \frac{dt}{\xi(t, \nu)}\right), \tag{37}$$

соответствующих «бесконечному» элементарному делителю, где n-мерный вектор $u(t, \mu)$ и функция $\lambda(t, \mu)$ представляются разложениями по степеням $\mu = \sqrt[p]{\varepsilon}$:

$$u(t, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k u_k(t), \quad \lambda(t, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \lambda_k(t), \tag{38}$$

а вектор $v(t, \nu)$ и функция $\xi(t, \nu)$ — по степеням $\nu = \sqrt[q]{\varepsilon}$:

$$v(t, \nu) = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k v_k(t), \quad \xi(t, \nu) = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k \xi_k(t). \tag{39}$$

Доказательство. Подставив вектор (36) в систему (1) и приравняв в полученном соотношении коэффициенты при одинаковых степенях μ, получим

$$P(t, \lambda_0) u_0(t) = 0, \tag{40}$$

$$P(t, \lambda_0) u_k(t) = b_k(t), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{41}$$

$$b_k(t) = -\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial P(t, \lambda_0)}{\partial \omega} u_{k-i} - \sum_{i=2}^{k} \alpha(2, i) A_0 u_{k-i} + f_k(t), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{42}$$

где вектор $f_k(t) = 0$ при $k < p$ и содержит только те $u_i(t)$ и $\lambda_i(t)$, индексы которых $i \leqslant k - p$. В частности,

$$f_p(t) = (C_1 + \lambda_0 B_1 + \lambda_0^2 A_1) u_0 + \delta_{1,h} \left(\lambda_0' A_0 u_0 + \frac{\partial P(t, \lambda_0)}{\partial \omega} u_0' \right). \tag{43}$$

Символом $\alpha(i, k)$ обозначается сумма всевозможных произведений i множителей $\lambda_{j_1}, \lambda_{j_2}, \ldots, \lambda_{j_i}$ с натуральными индексами, сумма которых равна k.

Покажем, что из системы уравнений (40), (41) можно определить любые коэффициенты разложений (38). Из уравнения (40) имеем

$$\lambda_0(t) = \omega_0(t), \quad u_0(t) = \varphi(t). \tag{44}$$

Уравнения (41) разрешимы, если

$$(b_k(t), \psi(t)) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{45}$$

При выполнении этого условия векторы $u_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$, будем определять по формуле

$$u_k(t) = H(t)\, b_k(t), \tag{46}$$

а для определения функций $\lambda_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$, используем условие (45). Для этого, используя формулы (46) и (42), преобразуем выражение для вектора $b_k(t)$ к следующему виду:

$$b_k(t) = -\sum_{i=1}^{k} \alpha(i, k) \left(\frac{\partial P(t, \omega_0)}{\partial \omega} \varphi_i + A_0 \varphi_{i-1} \right) - \sum_{j=0}^{k-p-1} \sum_{i=1}^{k-p-j} \alpha(i, k-p-j) \times$$

$$\times \left(\frac{\partial P(t, \omega_0)}{\partial \omega} f_{p+j}^{(i)} + A_0 f_{p+j}^{(i-1)} \right) + f_k(t),$$

где $\varphi_1(t) = \varphi(t)$, векторы $\varphi_i(t)$, $i = 2, 3, \ldots$, удовлетворяют рекуррентным соотношениям вида (31) (при $i < p$ они совпадают с векторами, составляющими жорданову цепочку пучка $P(t, \omega)$, соответствующую его «конечному» элементарному делителю), $f_{p+j}^{(1)}(t) = f_{p+j}(t)$, а векторы $f_{p+j}^{(i)}(t)$ определяются с помощью рекуррентных формул

$$f_{p+j}^{(i)}(t) = -H(t) \left(\frac{\partial P(t, \omega_0)}{\partial \omega} f_{p+j}^{(i-1)}(t) + A_0(t) f_{p+j}^{(i-2)}(t) \right), \quad i = 2, 3, \ldots; \quad j = 0, 1, \ldots$$

Так как по предположению цепочка векторов (31) имеет длину p, то отсюда следует, что при $k < p$ условие (45) выполняется, а при $k = p$ согласно (44), (33) оно запишется в виде $\lambda_1^p(t) + (K\varphi, \psi) = 0$, где $K = C_1 + \omega_0 B_1 + \omega_0^2 A_1 + \delta_{1,h} \left(\omega_0' A_0 + \frac{\partial P}{\partial \omega} \frac{d}{dt} \right)$. Отсюда при выполнении условия (35) найдем p различных отличных от нуля функций $\lambda_1(t)$. Определив $\lambda_1(t)$, найдем $b_1(t)$, а тогда по формуле (45) определим и вектор $u_1(t)$. Последующие коэффициенты разложений (38) определяются по той же схеме рекуррентным образом. При этом ветвление функции $\lambda_1(t)$ на p различных комплекснозначных ветвей позволяет построить p различных частных решений вида (36).

Аналогично строятся и решения вида (37), соответствующие «бесконечному» элементарному делителю пучка $P(t, \omega)$. При этом $v_0(t) = \tilde{\varphi}(t)$, а функция $\xi_0(t)$ определяется из уравнения $\xi_0^q - (A_1 \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) = 0$. Таким образом, условие (11) в данном случае не только гарантирует отличие от нуля функции $\xi(t, \varepsilon)$, но и обеспечивает ее ветвление на q различных ветвей, что позволяет построить q решений вида (37).

Как и в предыдущем случае, можно доказать, что построенные таким образом $2n$ частных формальных решений системы (1) линейно независимы при достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Если условие (11) не выполняется, то существование q решений, соответствующих «бесконечному» элементарному делителю, будет обеспечиваться условиями вида (29). Однако, в отличие от случая простого «бесконечного» элементарного **делителя, вид решений будет несколько** отличным от (30) и кроме условий (29) появятся другие, содержащие кроме коэффициентов разложения матрицы $A(t, \varepsilon)$ еще и коэффициенты разложений (2) для двух других матриц. При этом разложения для вектора $v(t, \varepsilon)$ и функции $\xi(t, \varepsilon)$ строятся по другим дробным степеням параметра ε. В частности, если $(A_1\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) \equiv 0$, то кроме условия $\gamma_2(t) \neq 0 \ \forall t \in [t_0; T]$ при $h > 1$ появляется условие

$$((B_0GA_1 + A_1GB_0)\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) \neq 0 \quad \forall t \in [t_0; T]. \tag{47}$$

В этом случае решения необходимо строить в виде (37), причем $q-1$ разложений для $v(t, \varepsilon)$ и $\xi(t, \varepsilon)$ будут строиться по степеням $\varepsilon^{1/q-1}$, а одно разложение — по степеням ε. Если все $\gamma_k(t) \equiv 0$, $k = 1, 2, \ldots$, то «бесконечному» элементарному делителю пучка $P(t, \omega)$ соответствует меньше, чем q, решений. В частности, при выполнении условия (47) можно построить $q-1$ решений, разлагая $\xi(t, \varepsilon)$ и $v(\varepsilon, \varepsilon)$ по степеням $\varepsilon^{1/q-1}$.

Выбор дробных степеней параметра ε, по которым следует вести разложения для $v(t, \varepsilon)$ и $\xi(t, \varepsilon)$, и нахождение соответствующих условий для коэффициентов системы можно осуществлять с помощью метода диаграмм Ньютона. В этой связи заметим, что если решение, соответствующее «бесконечному» элементарному делителю, искать в виде

$$x(t, \varepsilon) = v(t, \varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-h} \int\limits_{t_0}^{t} \xi^{-1}(t, \varepsilon)\, dt\right),$$

то, как легко убедиться из (21), задача определения вектора $v(t, \varepsilon)$ и функции $\xi(t, \varepsilon)$ сводится к задаче о возмущении нулевого собственного значения и соответствующих собственных векторов квадратичного пучка матриц $Q(t, \lambda)$. Поэтому для применения метода диаграмм Ньютона можно воспользоваться идеями работы [11], где этот метод применен к исследованию задачи о возмущении собственных значений и собственных элементов линейных операторов. Это замечание относится и к решениям, соответствующим «конечному» элементарному делителю пучка $P(t, \omega)$.

В заключение отметим, что, используя методы работы [7], можно доказать асимптотическую сходимость построенных формальных решений к некоторым точным линейно независимым решениям системы (1).

1. *Фещенко С. Ф.* Малі коливання системи із скінченним числом ступенів вільності // Наук. зап. Київ. пед. ін-ту. Фіз.-мат. сер.— 1949.— **9**, № 4.— С. 99—155.
2. *Фещенко С. Ф., Шкиль Н. И., Николенко Л. Д.* Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений.— Киев : Наук. думка, 1966.— 252 с.
3. *Шкиль Н. И., Шаманов З.* Об асимптотическом решении системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка // Приближенные методы математического анализа.— Киев : Киев. пед. ин-т, 1978.— С. 137—146 .
4. *Шкиль Н. И., Мейлиев Т. К.* Об асимптотическом представлении решений системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка с малым параметром при производной дробного ранга // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1979.— № 4.— С. 264—267.
5. *Шкиль Н. И., Конет И. М.* Асимптотические свойства формальных фундаментальных матриц систем линейных дифференциальных уравнений второго порядка, содержащих параметр // Укр. мат. журн.— 1983.— **35**, № 1.— С. 124—130.
6. *Яковец В. П.* Асимптотическое интегрирование линейных систем дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных с медленно меняющимися коэффициентами: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Киев, 1983.— 23 с.
7. *Шкиль Н. И., Старун И. И., Яковец В. П.* Асимптотическое интегрирование линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.— Киев : Вища шк., 1989.— 287 с.
8. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц.— М. : Наука, 1988.— 552 с.
9. *Lancaster P., Maroulas J.* Inverse eigenvelue problems for damped vibrating systems // J. Math. Anal. and Appl.— 1987.— **123**, N 1.— P. 238—261.
10. *Численные* методы решения сингулярных систем / Ю. Е. Бояринцев, В. А. Данилов, А. А. Логинов, В. Ф. Чистяков.— Новосибирск : Наука, 1989.— 223 с.
11. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений.— М. : Наука, 1969.— 527 с.

Получено 01.03.91