УДК 517.9

С. З. Курбаншоев, канд. физ.-мат. наук
(Душанб. пед. ин-т)

О поведении интегральных кривых в окрестности оптимальных интегральных многообразий

Указан способ построения в явном виде оптимальных интегральных многообразий [1] квазилинейной системы дифференциальных уравнений с помощью метода последовательных приближений. Исследовано поведение интегральных кривых в окрестности оптимальных интегральных многообразий. Приведен численный способ синтеза оптимального управления и дано его обоснование.

Вказано спосіб побудови в явному вигляді оптимальних інтегральних многовидів [1] квазілінійної системи диференціальних рівнянь за допомогою методу послідовних наближень. Досліджено поведінку інтегральних кривих в околі оптимальних інтегральних многовидів. Наведено чисельний спосіб синтезу оптимального управління та дано його обгрунтування.

1. Постановка задачи и некоторые результаты. Рассмотрим квазилинейную систему уравнений

$$dX/dt = A(t)X + \mu\Phi(t, X, Y, \mu), \quad X \in \mathfrak{B}_1, \quad \Phi(t, 0, 0, \mu) \equiv 0,$$
$$dY/dt = B(t)Y + \mu\Psi(t, X, Y, \mu), \quad Y \in \mathfrak{B}_2, \quad \Psi(t, 0, 0, \mu) \equiv 0, \tag{1}$$

где $A(t)$, $B(t)$ — суммируемые линейные операторы в банаховых пространствах $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$; μ — вещественный параметр. Через $\|X\|$, $\|Y\|$ обозначаются нормы элементов X, Y.

Предполагаем, что нелинейные операторы $\Phi(t, X, Y, \mu)$, $\Psi(t, X, Y, \mu)$ непрерывно зависят от t, x, y, μ и удовлетворяют при $|\mu| \leqslant \mu^*$ и произвольных t, X_k, Y_k, $k = 1, 2$, условиям Липшица

$$\|\Phi(t, X_1, Y_1, \mu) - \Phi(t, X_2, Y_2, \mu)\| \leqslant L_1\|X_1 - X_2\| + L_2\|Y_1 - Y_2\|,$$
$$\|\Psi(t, X_1, Y_1, \mu) - \Psi(t, X_2, Y_2, \mu)\| \leqslant L_3\|X_1 - X_2\| + L_4\|Y_1 - Y_2\|. \tag{2}$$

Предполагаем, что линейные системы дифференциальных уравнений

$$dX/dt = A(t)X, \quad dY/dt = B(t), \quad -\infty < t < \infty, \tag{3}$$

имеют разрешающие операторы соответственно $P(t, \tau)$, $N(t, \tau)$, удовлетворяющие условиям

$$\|P(t, \tau)\| \leqslant ce^{\lambda(t-\tau)}, \quad t \leqslant \tau, \quad \|N(t, \tau)\| \leqslant ce^{-\lambda(t-\tau)}, \quad t \geqslant \tau, \quad c \geqslant 1, \quad \lambda > 0. \tag{4}$$

В работе [2] показано, что при $|\mu| < \mu_0$, где

$$\mu_0 = \min\left\{\frac{\lambda}{cL_5}, \mu^*\right\}, \quad L_5 = \max\{L_1 + L_2, L_3 + L_4\}, \tag{5}$$

система уравнений (1) имеет интегральные многообразия G_1, G_2 решений, которые примыкают к нулевому решению соответственно при $t \to +\infty$, $t \to -\infty$. В работе [2] выведены нелинейные неявные уравнения, определяющие оптимальные интегральные многообразия G_1, G_2. В настоящей работе дан способ построения в явном виде уравнений интегральных многообразий G_1, G_2 с помощью метода последовательных приближений, который сходится при $|\mu| < \mu_1$, где

$$\mu_1 = \min\{2\lambda c^{-1}(L_1 + 2\sqrt{cL_2L_3} + L_4)^{-1}, \mu^*\}. \tag{6}$$

Показано, что любая интегральная кривая, не принадлежащая многообразиям G_1, G_2, примыкает к интегральному многообразию G_2 при $t \to +\infty$ и к интегральному многообразию G_1 при $t \to -\infty$.

2. Свойства оператора $R(t, X(\tau), \mu)$. Пусть при $\tau \leqslant t$ задана ограниченная вектор-функция $X = X(\tau)$. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$dY(\tau)/d\tau = B(\tau)Y(\tau) + \mu\Psi(\tau, X(\tau), Y(\tau), \mu). \tag{7}$$

Решение этого уравнения, ограниченное при $\tau \leqslant t$, является оператором, зависящим от $X(\tau)$, и обозначается при $\tau = t$ через $Y(t) = R(t, X(\tau), \mu)$. Оператор $R(t, X(\tau), \mu)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$R(t, X(\tau), \mu) = \mu \int_{-\infty}^{t} N(t, s)\Psi(s, X(s), R(s, X(\tau), \mu), \mu)\,ds. \tag{8}$$

Возьмем две ограниченные вектор-функции $X = X_k(\tau)$, $k = 1, 2$, удовлетворяющие неравенству

$$\|X_1(\tau) - X_2(\tau)\| \leqslant q(\tau). \tag{9}$$

Вычитая соответствующие интегральные уравнения

$$R(t, X_k(\tau), \mu) = \mu \int_{-\infty}^{t} N(t, s)\Psi(s, X_k(s), R(s, X_k(\tau), \mu), \mu)\,ds, \quad k = 1, 2,$$

и оценивая норму разности

$$p(t) = \| R(t, X_1(\tau), \mu) - R(t, X_2(\tau), \mu) \|,$$

получаем неравенство

$$p(t) \leqslant |\mu| \int_{-\infty}^{t} ce^{-\lambda(t-s)} [L_3 q(s) + L_4 p(s)] \, ds. \tag{10}$$

Для решения интегрального неравенства (10) решим интегральное уравнение для мажорантной функции $v(t)$:

$$v(t) = |\mu| \int_{-\infty}^{t} ce^{-\lambda(t-s)} [L_3 q(s) + L_4 v(s)] \, ds. \tag{11}$$

Умножим уравнение (11) на $\exp\{\lambda t\}$ и продифференцируем по t. При этом получим дифференциальное уравнение

$$dv(t)/dt = -L_6 v(t) + |\mu| c L_3 q(t), \quad L_6 \equiv \lambda - |\mu| c L_4 > 0.$$

Интегрируя это уравнение, находим единственное, ограниченное на всей оси t при ограниченной функции $q(t)$ решение

$$v(t) = |\mu| c L_3 \int_{-\infty}^{t} e^{-L_6(t-s)} q(s) \, ds.$$

Окончательно имеем

$$\| R(t, X_1(\tau), \mu) - R(t, X_2(\tau), \mu) \| \leqslant |\mu| c L_3 \int_{-\infty}^{t} e^{-L_6(t-s)} \| X_1(s) - X_2(s) \| \, ds. \tag{12}$$

В частном случае при $X_2(\tau) \equiv 0$ из формулы (12) получим оценку

$$\| R(t, X(\tau), \mu) \| \leqslant |\mu| c L_3 \int_{-\infty}^{t} e^{-L_6(t-s)} \| X(s) \| \, ds. \tag{13}$$

Пусть неравенство (9) имеет конкретный вид

$$\| X_1(\tau) - X_2(\tau) \| \leqslant Q e^{-L(t-\tau)}, \quad L \geqslant 0. \tag{14}$$

Тогда из неравенства (12) вытекает оценка

$$\| R(t, X_1(\tau), \mu) - R(t, X_2(\tau), \mu) \| \leqslant \frac{|\mu| c L_3 Q}{\lambda + L - |\mu| c L_4}. \tag{15}$$

3. Метод последовательных приближений для построения оптимальных интегральных многообразий G_1, G_2. При известном операторе $R(t, X(\tau), \mu)$ интегрирование систем уравнений (1) сводится к интегрированию уравнения

$$dX/dt = A(t) X + \mu \Phi(t, X, R(t, X(\tau), \mu), \mu). \tag{16}$$

Значение правой части определено лишь при известной вектор-функции $X = X(\tau)$ при $\tau \leqslant t$.

Предположим, что уравнение интегрального многообразия G_2 можно представить в виде

$$Y = g(t, X, \mu). \tag{17}$$

Тогда решения уравнения (16) с операторной правой частью совпадают с решениями обыкновенного дифференциального уравнения

$$dX/dt = A(t) X + \mu \Phi(t, X, g(t, X, \mu), \mu). \tag{18}$$

При известном решении $X = X(\tau)$ дифференциального уравнения

$$dX(\tau)/d\tau = A(\tau) X(\tau) + \mu \Phi(\tau, X(\tau), g(\tau, X(\tau), \mu), \mu), \quad X(t) = X$$

или эквивалентного ему интегрального уравнения

$$X(\tau) = P(\tau, t) X + \mu \int_t^\tau P(t, s) \Phi(s, X(s), g(s, X(s), \mu), \mu) ds, \tag{19}$$

выполняется равенство

$$g(t, X, \mu) = R(t, X(\tau), \mu). \tag{20}$$

Система уравнений (8), (19), (20) определяет оператор $g(t, X, \mu)$. Будем решать эту систему методом последовательных приближений так же, как в работе [3].

Положим $g_0(t, X, \mu) \equiv 0$. Пусть известно n-е приближение $g_n(t, X, \mu)$ для оператора $g(t, X, \mu)$. Находим решение $X = X_n(\tau)$ интегрального уравнения

$$X_n(\tau) = P(\tau, t) X + \mu \int_t^\tau P(\tau, s) \Phi(s, X_n(s), g_n(s, X_n(s), \mu), \mu) ds, \tag{21}$$

$$n = 0, 1, \ldots .$$

Пусть найдено $X_n(\tau)$. Решаем интегральное уравнение

$$R(t, X_n(\tau), \mu) = \mu \int_{-\infty}^t N(t, s) \Psi(s, X_n(s), R(s, X_n(\tau), \mu), \mu) ds, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{22}$$

и затем полагаем

$$g_{n+1}(t, X, \mu) = R(t, X_n(\tau), \mu), \quad n = 0, 1, \ldots . \tag{23}$$

Если $g_n(t, X, \mu)$ непрерывно зависит от t, X, μ, то и оператор $g_{n+1}(t, X, \mu)$ будет непрерывно зависеть от t, X, μ. Далее будет доказано, что последовательность $g_n(t, X, \mu)$ сходится к $g(t, X, \mu)$ при $|\mu| < \mu_1$.

Аналогично строится интегральное многообразие G_1, которое при достаточно малых значениях $|\mu|$ можно представить уравнением $X = h(t, Y, \mu)$. Образуем последовательность операторов $h_n(t, Y, \mu)$, полагая $h_0(t, Y, \mu) \equiv 0$. Пусть известно n-е приближение $h_n(t, Y, \mu)$. Находим решение $Y = Y_n(\tau)$ интегрального уравнения

$$Y_n(\tau) = N(\tau, t) Y + \mu \int_t^\tau N(\tau, s) \Psi(s, h_n(s, Y_n(s), \mu), Y_n(s), \mu) ds, \quad n = 0, 1, \ldots .$$

При найденном $Y_n(\tau)$ решаем интегральное уравнение

$$S(t, Y_n(\tau), \mu) = -\mu \int_t^\infty P(t, s) \Phi(s, S(t, Y_n(\tau), \mu), Y_n(s), \mu) ds, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

и затем полагаем

$$h_{n+1}(t, Y, \mu) = S(t, Y_n(\tau), \mu), \quad n = 0, 1, \ldots .$$

Можно доказать, что последовательность $h_n(t, Y, \mu)$ сходится к $h(t, Y, \mu)$ при $|\mu| < \mu_1$, где μ_1 определено согласно (6).

4. В ы п о л н е н и е д л я о п е р а т о р о в $g_n(t, X, \mu)$ у с л о в и й Л и п ш и ц а. Предположим, что оператор $g_n(t, X, \mu)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной M_n

$$\| g_n(t, X_1, \mu) - g_n(t, X_2, \mu) \| \leqslant M_n \| X_1 - X_2 \|. \tag{24}$$

Так как $g_0(t, X, \mu) \equiv 0$, то можно положить $M_0 = 0$. Зная M_n, найдем оценку для M_{n+1}. Для этого возьмем два разных решения $X = X_n(\tau)$, $X = X_n'(\tau)$ дифференциального уравнения

$$dX_n/d\tau = A(\tau) X_n + \mu \Phi(\tau, X_n, g_n(\tau, X_n, \mu), \mu)$$

с различными начальными условиями $X_n(t) = X$, $X'_n(t) = X'$. При этом получаем интегральные уравнения

$$X_n(\tau) = P(\tau, t)X + \mu \int_t^\tau P(\tau, s)\Phi(s, X_n(s), g_n(s, X_n(s), \mu), \mu,) ds,$$

$$X'_n(\tau) = P(\tau, t)X' + \mu \int_t^\tau P(t, s)\Phi(s, X'_n(s), g_n(s, X'_n(s), \mu), \mu), ds, \quad \tau \leqslant t.$$

Оценивая норму разности $P_n(\tau) = \| X_n(\tau) - X'_n(\tau)\|$, получаем интегральное неравенство

$$p_n(\tau) \leqslant ce^{\lambda(\tau - t)} \| X - X' \| + |\mu| \int_\tau^t ce^{\lambda(t-s)}(L_1 + L_2M_n) p_n(s) ds,$$

решая которое, находим оценку

$$\| X_n(\tau) - X'_n(\tau) \| \leqslant e^{-L(t-\tau)} c \| X - X' \|, \ L \equiv \lambda - |\mu| c (L_1 + L_2M_n). \quad (25)$$

Из неравенства (15) получим оценку

$$\| g_{n+1}(t, X, \mu) - g_{n+1}(t, X', \mu) \| = \| R(t, X_n(\tau), \mu) - R(t, X'_n(\tau), \mu) \| \leqslant$$
$$\leqslant |\mu| c^2 L_3 (\lambda + L - |\mu| cL_4)^{-1} \| X - X' \|.$$

Следовательно, в качестве постоянной Липшица M_{n+1} можно взять величину

$$M_{n+1} = |\mu| c^2 L_3 (2\lambda - |\mu| cL_1 - |\mu| cL_4 - |\mu| cL_2M_n)^{-1}.$$

Обозначим через $M(\mu)$ наименьший положительный корень уравнения

$$M(\mu) = |\mu| c^2 L_3 (2\lambda - |\mu| cL_1 - |\mu| cL_4 - |\mu| cL_2M(\mu))^{-1}. \quad (26)$$

Из неравенства $M_n \leqslant M(\mu)$, которое заведомо выполнено при $n = 0$, вытекает справедливость неравенства $M_{n+1} \leqslant M(\mu)$. Следовательно, при всех значениях $n = 0, 1, \ldots$ будет выполнено условие Липшица

$$\| g_n(t, X, \mu) - g_n(t, X', \mu) \| \leqslant M(\mu) \| X - X' \|. \quad (27)$$

Решая уравнение (26), получаем явное выражение для $M(\mu)$:

$$M(\mu) = 2|\mu| c^2 L_3 (2\lambda - |\mu| cL_1 - |\mu| cL_4 + ((2\lambda - |\mu| cL_1 - |\mu| cL_4)^2 -$$
$$- 4|\mu|^2 c^3 L_2 L_3)^{1/2})^{-1}. \quad (28)$$

Постоянная $M(\mu)$ существует лишь в случае, когда подкоренное выражение неотрицательно, т. е. при выполнении условия $|\mu| \leqslant \mu_1$.

Полученный результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 1. *Если для системы уравнений* (1) *выполнены условия* (2), (4), *то при* $|\mu| < \mu_1$ *последовательность операторов* $g_n(t, X, \mu)$, *определяемая уравнениями* (21)—(23), *удовлетворяет условию Липшица* (27) *с общей постоянной Липшица* $M(\mu)$, *определяемой по формуле* (28).

Отметим, что постоянную $M(\mu)$ можно записать также в виде

$$M(\mu) = |\mu| c^2 L_3 (\lambda + L - |\mu| cL_4)^{-1} = |\mu| c^2 L_3 (L + L_6)^{-1}. \quad (29)$$

Величина $M(\mu)$, рассматриваемая как функция от $|\mu|$, возрастает при $0 \leqslant |\mu| \leqslant \mu_1$, т. е. выполняется неравенство

$$M(\mu) \leqslant M(\mu_1) \leqslant (cL_3L_2^{-1})^{1/2}. \quad (30)$$

Далее для простоты представления результатов положим $L_0 = \max\{L_1, L_2, L_3, L_4\}$, т. е. в условиях Липшица (2) полагаем $L_k = L_0$, $k = 1, \ldots, 4$. При этом для значения μ_1 получим выражение

$$\mu_1 = \min\{\lambda(2cL_0(1 + \sqrt{c}))^{-1}, \mu^*\}, \quad c \geqslant 1, \quad (31)$$

а неравенство (30) при $|\mu| \leqslant \mu_1$ примет вид

$$M(\mu) \leqslant M(\mu_1) \leqslant \sqrt{c}. \tag{32}$$

Для постоянной $L(\mu)$, определенной по формуле (25) при $M_n = M(\mu)$, получим выражение

$$L(\mu) = \lambda - |\mu| c (L_0 + L_0 M(\mu)) = ((\lambda - |\mu| c L_0)^2 - |\mu|^2 c^3 L_0^2)^{1/2}. \tag{33}$$

5. Сходимость последовательности операторов $g_h(t, X, \mu)$. Оценим близость операторов $g_n(t, X, \mu)$ при различных значениях n. Положим

$$\| g_n(t, X, \mu) - g_{n-1}(t, X, \mu) \| \leqslant \beta_n \| X \|, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{34}$$

Так как $g_0(t, X, \mu) \equiv 0$, то можно взять $\beta_1 = M(\mu)$.

Оценим норму разности решений $X_n(\tau)$, $X_{n-1}(\tau)$ уравнений

$$X_n(\tau) = P(\tau, t) X + \mu \int_t^\tau P(\tau, s) \Phi(s, X_n(s), g_n(s, X_n(s), \mu), \mu)\, ds,$$

$$X_{n-1}(\tau) = P(\tau, t) X + \mu \int_t^\tau P(\tau, s) \Phi(s, X_{n-1}(s), g_n(s, X_{n-1}(s), \mu), \mu)\, ds.$$

Для нормы разности решений получим неравенство

$$\| X_n(\tau) - X_{n-1}(\tau) \| \leqslant |\mu| \int_\tau^t c e^{\lambda(\tau - s)} (L_0 \beta_n \| X_n(s) \| + $$
$$+ L_0 (1 + M(\mu)) \| X_n(s) - X_{n-1}(s) \|)\, ds. \tag{35}$$

Используя неравенство (25) при $X_n'(\tau) \equiv 0$

$$\| X_n(\tau) \| \leqslant e^{-L(t-\tau)} c \| X \|,$$

преобразуем неравенство (35) к виду

$$\| X_n(\tau) - X_{n-1}(\tau) \| \leqslant |\mu| c^2 L_0 \beta_n \| X \| (\lambda - L)^{-1} e^{\lambda\tau - Lt} (e^{(L-\lambda)\tau} - e^{(L-\lambda)t}) +$$
$$+ |\mu| c L_0 (1 + M(\mu)) \int_\tau^t e^{\lambda(\tau - s)} \| X_n(s) - X_{n-1}(s) \|\, ds,$$

решая которое, находим оценку

$$\| X_n(\tau) - X_{n-1}(\tau) \| \leqslant |\mu| c^2 L_0 \beta_n \| X \| (t - \tau) e^{-L(t-\tau)}. \tag{36}$$

Из формул (12), (36) получим неравенство

$$\| g_{n+1}(t, X, \mu) - g_n(t, X, \mu) \| = \| R(t, X_n(\tau), \mu) - R(t, X_{n-1}(\tau), \mu) \| \leqslant$$

$$\leqslant |\mu| c L_0 \int_{-\infty}^t e^{-L_6(t-s)} \| X_n(s) - X_{n-1}(s) \|\, ds = |\mu|^2 c^3 L_0^2 \beta_n (L + L_6)^{-2} \| X \|.$$

Следовательно, постоянные β_n связаны неравенствами

$$\beta_{n+1} \leqslant q(\mu) \beta_n, \quad \beta_1 = M(\mu), \; q(\mu) \equiv |\mu|^2 c^3 L_0^2 (L + L_6)^{-2}. \tag{37}$$

С учетом формулы (29) преобразуем выражение для коэффициента $q(\mu)$:

$$q(\mu) \equiv |\mu|^2 c^3 L_0^2 (L + L_6)^{-2} = c^{-1} M^2(\mu).$$

Коэффициент $q(\mu)$ монотонно возрастает при возрастании $|\mu|$ на отрезке $[0, M_1]$ и при этом в силу формул (30), (32) имеем

$$\max_{|\mu| \leqslant \mu_1} q(\mu) = q(\mu_1) = c^{-1} M^2(\mu_1) = 1.$$

Следовательно, при $|\mu| < \mu_1$ будет выполнено неравенство $q(\mu) < 1$ и разностное неравенство (37) будет иметь решение

$$0 \leqslant \beta_n \leqslant q^{n-1}(\mu) M(\mu), \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{38}$$

Полученные результаты сформулируем в виде теоремы.

Теорема 2. *Пусть для системы уравнений* (1) *выполнены условия* (2), (4). *Если* $|\mu| < \mu_1$, *то последовательность операторов* $g_n(t, X, \mu)$, *определяемая уравнениями* (21)—(23), *сходится равномерно и абсолютно при* $\| X \| \leqslant g = \mathrm{const}$ *к оператору* $g(t, X, \mu)$, *непрерывному по* t, X, μ. *При этом оператор* $g(t, X, \mu)$ *удовлетворяет условию Липшица*

$$\| g(t, X_1, \mu) - g(t, X_2, \mu) \| \leqslant M(\mu) \| X_1 - X_2 \|,$$

а уравнение $Y = g(t, X, \mu)$ *определяет интегральное многообразие* G_2 *системы уравнений* (1).

Теорема 3. *На интегральном многообразии* G_2, *т. е. для дифференциального уравнения*

$$dX/dt = A(t) X + \mu\Phi(t, X, g(t, X, \mu), \mu), \quad g(t, 0, \mu) \equiv 0, \tag{39}$$

для любых двух различных решений $X = X(t)$, $X = X'(t)$ *выполняется неравенство*

$$\| X(t) - X'(t) \| \leqslant e^{-L(\mu)(\tau - t)} c \| X(\tau) - X'(\tau) \|, \quad t \leqslant \tau. \tag{40}$$

Положительная постоянная $L(\mu)$ *при* $|\mu| < \mu_1$ *определена по формуле* (33).

Доказательство теоремы вытекает из предельного перехода при $n \to \infty$ в формуле (25).

Так как уравнение (39) допускает ненулевое решение $X'(\tau) \equiv 0$, то из неравенства (40) следует неравенство

$$\| X(t) \| \leqslant e^{-L(\mu)(\tau - t)} c \| X(\tau) \|, \quad t \leqslant \tau,$$

и, следовательно, любое решение уравнения (39) стремится к 0 при $t \to -\infty$. Таким образом, интегральное многообразие G_2 образовано интегральными кривыми системы (1), примыкающими к нулевому решению при $t \to -\infty$.

Оценим порядок близости $g_n(t, X, \mu)$ к $g(t, X, \mu)$ при $\mu \to 0$. Из формул (34), (38) получим неравенства

$$\| g_n(t, X, \mu) - g_{n-1}(t, X, \mu) \| \leqslant [M(\mu)]^{2n-1} c^{1-n} \| X \|, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{41}$$

Так как при $|\mu| < \mu_1$ оператор $g(t, X, \mu)$ определяется рядом

$$g(t, X, \mu) = g_0(t, X, \mu) + \sum_{k=1}^{\infty} (g_n(t, \mathrm{X}, \mu) - g_{n-1}(t, \mathrm{X}, \mu)),$$

то из неравенства (41) получим оценку

$$\| g(t, X, \mu) - g_n(t, X, \mu) \| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \| g_k(t, X, \mu) - g_{k-1}(t, X, \mu) \| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \beta_k (\| X \| [M(\mu)]^{2n+1} c^{-n} (1 - c^{-1} M^2(\mu))^{-1} \| X \| = O(\mu^{2n+1}) \| X \|. \tag{42}$$

Аналогичные результаты будут справедливы при построении интегрального многообразия G_1.

Изложенный способ построения интегральных многообразий G_1, G_2, позволяющий доказать их существование и вывести некоторые свойства, является конструктивным. Этот способ может быть положен в основу приближенных и численных методов построения оптимальных интегральных многообразий и, следовательно, пригоден для синтеза оптимальных регуляторов [1].

6. Поведение интегральных кривых систем (1) в окрестности оптимальных интегральных многообразий G_1, G_2. Докажем, что при $|\mu| < \mu_1$ произвольное решение системы (1) $X = X(t)$, $Y = Y(t)$ с начальными условиями

$$X(0) = X_0, \quad Y(0) = Y_0 \tag{43}$$

примыкает к интегральному многообразию G_2 при $t \to +\infty$ и к интегральному многообразию G_1 при $t \to -\infty$.

Решение $X = X(t)$, $Y = Y(t)$ удовлетворяет системе интегральных уравнений

$$\begin{gathered} X(t) = P(t, u) X(u) + \mu \int_u^t P(t, s) \Phi(s, X(s), Y(s), \mu) \, ds, \\ Y(t) = N(t, 0) Y_0 + \mu \int_0^t N(t, s) \Psi(s, X(s), Y(s), \mu) \, ds. \end{gathered} \tag{44}$$

Для сравнения возьмем на интегральном многообразии G_2 решение $X = X'(t)$, $Y = Y'(t)$ такое, что при $t = u$ $X'(u) = X(u)$. Обозначим

$$X'(0) = X_1, \quad Y'(0) = Y_1. \tag{45}$$

Из теоремы 2 следует $Y_1 = g(0, X_1, \mu)$ и при этом

$$\|Y_1\| \leqslant M(\mu) \|X_1\|. \tag{46}$$

Решение $X = X'(t)$, $Y = Y'(t)$, лежащее на многообразии G_2, удовлетворяет системе интегральных уравнений

$$\begin{gathered} X'(t) = P(t, u) X(u) + \mu \int_u^t P(t, s) \Phi(s, X'(s), Y'(s), \mu) \, ds, \\ Y'(t) = N(t, 0) Y_1 + \mu \int_0^t N(t, s) \Psi(s, X'(s), Y'(s), \mu) \, ds. \end{gathered} \tag{47}$$

Введем обозначения

$$q(t) = \|X(t) - X'(t)\|, \quad p(t) = \|Y(t) - Y'(t)\|. \tag{48}$$

Вычитая соответственно первые и вторые уравнения систем (44), (47) и оценивая нормы разностей решений, получаем при $0 \leqslant t \leqslant u$ интегральные неравенства

$$\begin{gathered} q(t) \leqslant |\mu| \int_t^u c e^{\lambda(t-s)} L_0 (q(s) + p(s)) \, ds, \quad q(u) = 0, \\ p(t) \leqslant c e^{-\lambda t} \|Y_0 - Y_1\| + |\mu| \int_0^t c e^{-\lambda(t-s)} L_0 (q(s) + p(s)) \, ds, \quad p(0) = c \|Y_0 - Y_1\|. \end{gathered} \tag{49}$$

Для мажорантных функций $w(t)$, $v(t)$, мажорирующих функции $q(t)$, $p(t)$, получим систему интегральных уравнений

$$\begin{gathered} w(t) = |\mu| \int_t^u c e^{\lambda(t-s)} L_0 (w(s) + p(s)) \, ds, \quad w(u) = 0, \\ v(t) = c e^{-\lambda t} \|Y_0 - Y_1\| + |\mu| \int_0^t c e^{-\lambda(t-s)} L_0 (q(s) + v(s)) \, ds, \\ v(0) = c \|Y_0 - Y_1\|. \end{gathered} \tag{50}$$

Дифференцируя по t систему интегральных уравнений (50), приходим к краевой задаче

$$dw(t)/dt = (\lambda - |\mu| cL_0) w(t) - |\mu| cL_0 v(t), \ w(u) = 0,$$
$$dv(t)/dt = |\mu| cL_0 w(t) - (\lambda - |\mu| cL_0) v(t), \ v(0) = c \| Y_0 - Y_1 \|.$$

Характеристическое уравнение

$$z^2 - (\lambda - |\mu| cL_0)^2 + |\mu|^2 c^2 L_0^2 = 0$$

имеет при $|\mu| < \mu_1$ вещественные корни разных знаков

$$z_1 = ((\lambda - |\mu| cL_0)^2 - |\mu|^2 c^2 L_0^2)^{1/2} > 0, \ z_2 = -z_1. \tag{51}$$

Решение системы уравнений (50) имеет вид

$$w(t) = |\mu| cL_0 (z_1 + \lambda - |\mu| cL_0)(e^{-z_1 t} - e^{-z_1 t} e^{-2z_1 u}) l^{-1} c \| Y_0 - Y_1 \|,$$
$$v(t) = ((z_1 + \lambda - |\mu| cL_0)^2 - |\mu|^2 c^2 L_0^2 e^{-2z_1(u-t)}) e^{-z_1 t} l^{-1} c \| Y_0 - Y_1 \|, \tag{52}$$

где $l = (z_1 + \lambda - |\mu| cL_0) - |\mu|^2 c^2 L_0^2 e^{-2z_1 u}$.

Учитывая формулы (52), получаем неравенства

$$q(0) \leqslant w(0) < |\mu| cL_0 (z_1 + \lambda - |\mu| cL_0)^{-1} c \| Y_0 - Y_1 \|, \tag{53}$$

$$p(t) \leqslant v(t) \leqslant e^{-z_1 t} c \| Y_0 - Y_1 \|. \tag{54}$$

Из формул (29), (33) следует, что выполнено неравенство

$$|\mu| c^2 L_0 (z_1 + \lambda - |\mu| cL_0)^{-1} \leqslant |\mu| c^2 L_0 (L(\mu) + \lambda - |\mu| cL_0)^{-1} = M(\mu).$$

Поэтому неравенство (53) примет более простой вид

$$\| X_0 - X_1 \| \leqslant M(\mu) \| Y_0 - Y_1 \|.$$

Из этого неравенства и неравенства (46) вытекают неравенства

$$\| X_1 \| - \| X_0 \| \leqslant \| X_0 - X_1 \| \leqslant M(\mu)(\| Y_0 \| + \| Y_1 \|) \leqslant$$
$$\leqslant M(\mu) \| Y_0 \| + M^2(\mu) \| X_1 \|$$

или

$$\| X_1 \| \leqslant (1 - M^2(\mu))^{-1} (\| X_0 \| + M(\mu) \| Y_0 \|).$$

Предполагая, что $M(\mu) < 1$, получаем оценку

$$\| Y_0 - Y_1 \| \leqslant \| Y_0 \| + \| Y_1 \| \leqslant (1 - M^2(\mu))^{-1} (\| X_0 \| + \| Y_0 \|). \tag{55}$$

Из неравенств (54), (55) получим оценку близости произвольной интегральной кривой $X = X(t)$, $Y = Y(t)$ системы (1) к некоторой интегральной кривой $X = X'(t)$, $Y = Y'(t)$, лежащей на интегральном многообразии G_2

$$\| Y(t) - Y'(t) \| \leqslant (1 - M^2(\mu))^{-1} c (M(\mu) \| X_0 \| + \| Y_0 \|) e^{-z_1 t}, \ z_1 > 0. \tag{56}$$

Обозначим через

$$d(X(t), Y(t);\ G_2) = \min_{X', Y' \in G_2} \left\| \begin{pmatrix} X(t) - X' \\ Y(t) - Y' \end{pmatrix} \right\|$$

расстояние между точкой t, $X = X(t)$, $Y = Y(t)$ в расширенном фазовом пространстве и интегральным многообразием G_2.

При $t = u \geqslant 0$ получим неравенство

$$d(X(u), Y(u);\ G_2) \leqslant \| Y(u) - Y'(u) \| \leqslant$$
$$\leqslant (1 - M^2(\mu))^{-1} c (M(\mu) \| X_0 \| + \| Y_0 \|) e^{-z_1 u}. \tag{57}$$

Определим положительные значения μ_2 из уравнения

$$M(\mu_2) = 1. \tag{58}$$

При $|\mu| < \mu_2$ будет выполнено неравенство $M(\mu) < 1$ и, следовательно, будет выполнено неравенство (57). Решая уравнение (58), где $M(\mu)$ определено по формуле (28), находим явное выражение для μ_2:

$$\mu_2 = 2\lambda (c(3+c)L_0)^{-1}. \tag{59}$$

Окончательный результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 4. *Пусть для системы дифференциальных уравнений* (1) *выполнены условия* (2), (4). *Если* $|\mu| \leqslant \mu^*$, $|\mu| < \mu_2$, *то произвольное решение* $X = X(t)$, $Y = Y(t)$ *системы* (1) *примыкает к интегральному многообразию* G_2 *при* $t \to +\infty$ *и к интегральному многообразию* G_1 *при* $t \to -\infty$. *А именно, будут справедливы следующие оценки близости для расстояний между точкой* t, $X(t)$, $Y(t)$ *и многообразиями* G_1, G_2:

$$d(X(t), Y(t);\ G_2) \leqslant (1 - M^2(\mu))^{-1} c (\| X(t_0)\| + \| Y(t_0)\|) e^{-z_1(t-t_0)}, \quad t \geqslant t_0, \tag{60}$$

$$d(X(t), Y(t);\ G_1) \leqslant (1 - M^2(\mu))^{-1} c (\| X(t_0)\| + \| Y(t_0)\|) e^{z_1(t-t_0)}, \quad t \leqslant t_0, \tag{61}$$

где $z_1 = ((\lambda - |\mu| cL_0)^2 - |\mu|^2 c^2 L_0^2)^{1/2} \geqslant \lambda (c-1)^{1/2} (3+c)^{-1/2}$.

Доказательство теоремы вытекает из формулы (57) при $M(\mu) < 1$, если за начальный момент берется вместо $t = 0$ значение $t = t_0$. Формула (61) аналогична формуле (60).

7. Численный метод синтеза оптимального управления. Пусть система автоматического регулирования описывается системой m обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dX/dt = F(t, X, U),\ F(t, 0, 0) \equiv 0, \tag{62}$$

где X — вектор фазовых координат, U — вектор управлений.

Предполагаем, что вектор-функция $F(t, X, U)$ дважды дифференцируема по всем аргументам при произвольных значениях t, X, U.

Ищется оптимальное управление $U = S_1(t, X)$, $S_1(t, 0) \equiv 0$, доставляющее минимум функционалу

$$J_1 = \int_t^\infty w(\tau, X(\tau), U(\tau))\, d\tau,\ w(\tau, 0, 0) \equiv 0, \tag{63}$$

где $\omega(t, X, U)$ — знакоположительная, дважды дифференцируемая по X, U функция.

Введем в рассмотрение строчный вектор $Y^* = (y_1, \ldots, y_m)$, где звездочка обозначает операцию транспонирования вектора.

Предполагаем, что функция Гамильтона

$$H(t, X, Y^*, U) = Y^* F(t, X, U) + w(t, X, U)$$

имеет при закрепленных значениях t, X, Y^* единственный минимум по U, определяемый из системы уравнений

$$DF(t, X, U)/DU + Dw(t, X, U)/DU = 0, \tag{64}$$

а система уравнений (64) разрешима относительно U. Запишем это решение в виде

$$U = \Phi(t, X, Y),\ \Phi(t, 0, 0) \equiv 0. \tag{65}$$

Из принципа максимума Понтрягина [4] находим необходимые условия оптимальности

$$dX/dt = F(t, X, \Phi),$$
$$dY^*/dt = - Y^* DF(t, X, \Phi)/DX - Dw(t, X, \Phi)/DX;\ \ \Phi = \Phi(t, X, Y). \tag{66}$$

Если для системы (62) существует оптимальное управление $U = S_1(t, X)$, то значения переменных t, $X(t)$, $Y(t)$, соответствующие оптимальному управлению, лежат на оптимальном многообразии G_1 решений системы (66), примыкающих при $t \to +\infty$ к нулевому решению [1]. Другими словами, если уравнения интегрального многообразия G_1 системы (66) представлены в виде $Y = K_1(t, X)$, то оптимальное управление определяется по формуле

$$S_1(t, X) \equiv \Phi(t, X, K_1(t, X)). \tag{67}$$

Таким образом, отыскание оптимального управления $U = S_1(t, X)$ сводится к отысканию оптимального многообразия G_1 системы (66).

Аналогично построение оптимального управления $U = S_2(t, X)$, $S_2(t, 0) \equiv 0$, минимизирующего функционал

$$J_2 = \int_{-\infty}^{t} w(\tau, X(\tau), U(\tau))\, d\tau,$$

сводится к построению оптимального многообразия G_2 решений системы (66), примыкающих к нулевому решению при $t \to -\infty$.

Теорема 4 дает обоснование численного метода синтеза оптимальных управлений, который сводится к численному построению оптимальных интегральных многообразий G_1, G_2 системы (66), если систему (66) удается с помощью обратимой линейной замены Ляпунова свести к системе вида (1).

Приведем алгоритм численного метода [1].

1. С помощью численного интегрирования в сторону уменьшения значений аргумента t ищутся на промежутках $[t_k, t_k + T_k]$ решения системы (66) $X = X_k(t)$, $Y = Y_k(t)$, $k = 1, \ldots, N$, с начальными условиями

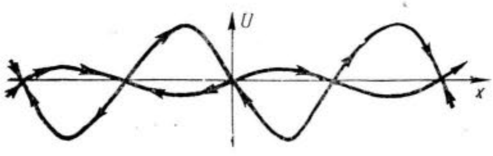
$$X_k(t_k + T_k) = X_k^0,\ Y_k(t_k + T_k) = Y_k^0,\ T_k \gg 1,\ k = 1, \ldots, N.$$

Начальные значения X_k^0, Y_k^0 выбираются в достаточно малой окрестности нулевого решения из неравенств

$$\| X_k^0 \| + \| Y_k^0 \| = \varepsilon_k,\quad 0 < \varepsilon_k \ll 1,\ k = 1, \ldots, N.$$

2. Оптимальное управление $U = S_1(t, X)$ находится с помощью интерполяционных формул из приближенных равенств

$$S_1(t_k, X_k(t_k)) = \Phi(t_k, X_k(t_k), Y_k(t_k)),\quad k = 1, \ldots, N.$$



Пусть ε — заданная точность определения точек t_k, $X_k(t_k)$, $Y_k(t_k)$, лежащих на оптимальном интегральном многообразии G_1. Из теоремы 4 следуют приближенные формулы для ε_k, T_k:

$$\varepsilon_k = \sqrt{\varepsilon \rho_k},\ T_k = \frac{1}{z_1} \ln\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho_k}} (1 - M^2(\mu) c^{-1} \right),$$

где $\rho_k = \max\{\| X_k(t_k) \|,\ \| Y_k(t_k) \|\}$.

Пример. Ищем оптимальное управление $u = s(x)$ для уравнения $dx/dt = \sin x + u$ со счетным числом точек равновесия $x = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, минимизирующее функционал

$$J = \frac{1}{2} \int_t^{\infty} (\sin^2 x + u^2)\, dt.$$

Уравнения (64), (66) примут вид

$$y + u = 0,\ dx/dt = -\sin x + y,\ dy/dt = y\cos x + \sin x \cos x. \qquad (68)$$

Задавая достаточно малые начальные условия $x(0) = \pm 10^{-6} + k\pi$, $y(0) = \pm 10^{-6}$ и численно интегрируя систему уравнений (68) в сторону уменьшения значений аргумента t, находим зависимость u от x, представленную графически на рисунке. Стрелки указывают направление к стабилизируемым точкам $x = k\pi$.

Указанный численный способ построения точек t_k, $X_k(t_k)$, $Y_k(t_k)$, лежащих в достаточно малой окрестности оптимальных интегральных многообразий, позволяет свести задачу синтеза оптимального управления к задаче интерполяции.

1. *Валеев К. Г., Митропольский Ю. А., Финин Г. С.* Численный синтез оптимального управления для линейных стационарных систем: — Киев, 1980. — 76 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 80.4).
2. *Валеев К. Г., Курбаншоев С. З.* О существовании и свойствах оптимальных интегральных многообразий // Изв. АН ТаджССР.— 1987.— № 4.— С. 17—24.
3. *Валеев К. Г., Жаутыков О. А.* Бесконечные системы дифференциальных уравнений.— Алма-Ата: Наука, 1974.— 416 с.
4. *Математическая* теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко.— М. : Наука, 1969.— 384 с.

Получено 04.03.91