УДК 512.54

Л. С. Казарин, д-р физ.-мат. наук (Ярослав. ун-т)

О произведении группы с циклической силовской p-подгруппой и группы с нетривиальным центром

Изучаются конечные группы, которые разлагаются в произведение двух своих подгрупп.

Вивчаються скінченні групи, що розкладаються в добуток двох своїх підгруп.

Группа G есть произведение своих подгрупп A и B, если любой ее элемент g может быть представлен в виде $g = ab$, где $a \in A$, $b \in B$. Стандартное обозначение: $G = AB$. В этом случае говорят также, что G есть группа с факторизацией. Одной из наиболее интересных задач в теории групп с факторизацией является проблема Чунихина — Сепа о непростоте группы, представимой в виде произведения двух своих подгрупп с нетривиальными центрами [1]. Данная задача решена в [2] (и независимо в [3]) по модулю классификации конечных простых групп, так что положительный ответ можно считать известным. Однако это решение вряд ли может считаться удовлетворительным, учитывая непомерный объем, сложность и незавершенность доказательства теоремы классификации. Вместе с тем для ряда частных случаев удается проследить поведение нормального замыкания центра одной из подгрупп, если известна информация о строении другого сомножителя [4, 5].

В настоящей работе эта задача решается для случая, когда один из сомножителей A имеет циклическую силовскую p-подгруппу, являющуюся p-силовской по всей группе G.

Основным результатом статьи является следующая теорема.

Теорема. *Пусть конечная группа G представима в виде произведения группы A с циклической силовской p-подгруппой P и группы B. Если $O_p(Z(A)) \neq 1$ и P является силовской p-подгруппой группы G, то нормальное замыкание в G центра B есть p-разрешимая группа.*

Теорема верна даже в тех случаях, когда $P = A$ или $Z(B) = 1$. Пример группы $G = AB = X \times Y$, где $X \cong \mathrm{PSL}(2, 7)$, $Y \cong \mathrm{PSL}(2, 5)$, $A \cong \mathbb{Z}_7 \times A_4$, $B \cong \mathbb{Z}_6 \times S_4$ (A_4, S_4 — знакопеременная и симметрическая группы перестановок четырех символов), показывает, что в условиях теоремы группа G вообще может не иметь нетривиальных разрешимых нормальных подгрупп.

Так как силовская p-подгруппа группы G является циклической в условиях теоремы, то утверждение о p-разрешимости нормального замыкания $Z(B)$ в G равносильно утверждению о том, что $Z(B) \leqslant O_{p',p,p'}(G)$.

Следствие. *Пусть конечная группа G представима в виде произведения группы A с циклической силовской p-подгруппой P и группы B. Если $O_p(Z(A)) \neq 1$, то $\langle Z(B), \Omega_1(O_p(Z(A)))\rangle$ является p-разрешимой группой.*

Доказательство теоремы не зависит от классификации конечных простых групп. В п. 1 приведены необходимые вспомогательные утверждения, в п. 2 доказан один важный факт, касающийся строения p-разрешимых групп, удовлетворяющих условию теоремы. В п. 3 доказывается теорема.

Используемые обозначения в основном стандартны. Рассматриваются только конечные группы. Буквой p обозначаются только простые числа. Элемент x называется p-регулярным, если его порядок взаимно прост с p и p-сингулярным — в противном случае. Любой элемент x конечной группы G однозначно представляется в виде $x = x_1x_2 = x_2x_1$, где x_1 — p-элемент, а x_2 — p-регулярный элемент. При этом x_1 — p-часть x, а x_2 — p'-часть x. Через $\mathrm{Irr}(G)$ обозначается множество всех неприводимых комплексных характеров группы G. Через $B_0(p)$ обозначается главный p-блок группы G, рассматриваемый здесь как подмножество $\mathrm{Irr}(G)$. Если X — p-группа, то $\Omega_1(X) = \langle x \in X | x^p = 1\rangle$.

1. Вспомогательные результаты. В утверждениях (1.1) — (1.7) предполагается, что группа G имеет циклическую силовскую p-подгруппу P, $N = N_G(P)$, $n = |N_G(P) : C_G(P)|$, $q = |P|$ и $t = (q-1)/n$. Приводимые ниже утверждения 1.1 — 1.5 содержатся в [6]. Сведения о p-блоках можно найти в [7, 8].

1.1. *Блок $B_0(p)$ состоит из n неисключительных характеров $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n$ ($1_G = \chi_1$ — главный характер G) и t исключительных характеров χ_λ ($\lambda \in \Lambda$, $|\Lambda| = t$).*

1.2. *Для любого p-сингулярного элемента $a \in G$ и неисключительного характера $\chi_i \in B_0(p)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $\chi_i(a) = \delta_i = \pm 1$ и $\chi_i(1) \equiv \delta_i \pmod p$.*

1.3. *Все исключительные характеры χ_λ из $B_0(p)$, $\lambda \in \Lambda$, имеют одну и ту же степень x_0 и $tx_0 \equiv \delta_0 \pmod q$, где $\delta_0 = \pm 1$.*

1.4. *Пусть $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_n$ определены, как выше. Тогда для любого p-*

регулярного элемента $g \in G$ *и* $\chi_\lambda \in B_0(p)$, $\lambda \in \Lambda$,

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i \chi_i(g) + \delta_0 \chi_\lambda(g) = 0.$$

1.5. *Число характеров степени* 1 *в* $B_0(p)$ *равно* $|G : G'C_G(P)|$.

1.6. *Пусть* x — *p-регулярный элемент,* y — *p-элемент, перестановочный с* x. *Тогда* $\chi(xy) = \chi(y)$ *для любого* $\chi \in B_0(p)$.

Доказательство. Так как силовская p-подгруппа группы G циклическая, то $C_G(y)$ — p-нильпотентная группа для любого неединичного p-элемента y. Теперь утверждение 1.6 следует из [7, с. 159].

1.7. *Пусть* x *и* y — *элементы группы* G, *причем* x — *p-сингулярный. Тогда*

$$\alpha = \sum_{\chi \in B_0(p)} \chi(x)\overline{\chi(y)} \neq 0$$

тогда и только тогда, когда p-части x *и* y *сопряжены. При этом* $\alpha \geqslant 0$ *в любом случае.*

Доказательство. В силу утверждения 1.6 можно считать, что x и y — p-элементы. Если x и y не сопряжены, то справедливость утверждения 1.7 следует из соотношений ортогональности в $B_0(p)$. Если x и y сопряжены, то $\chi(x)\overline{\chi(y)} = |\chi(x)|^2$ и из $1_G \in B_0(p)$ следует утверждение 1.7.

1.8. *Пусть группа* $G = AB$, $a \in Z(A)$, $b \in Z(B)$, $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

i) $\chi(a)\chi(b) = \chi(1)\chi(ab)$;

ii) *если* a *имеет простой порядок и* $\chi(a)\chi(b) = \chi(1)\chi(a)$ *для любого* $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$, *то* $b \in S(G)$;

iii) *подгруппа* $\langle a, b\rangle$ *сопряжена с* $\langle a^x, b^y\rangle$ *для любых* $x, y \in G$ *и* $N_G(\langle a, b\rangle) = K = (K \cap A)(K \cap B)$;

iv) *если* G *является* D_π*-группой для некоторого множества простых чисел* π, *то существуют такие холловы подгруппы* A_1 *и* B_1 *групп* A *и* B *соответственно, что* $H = A_1B_1$ — *холлова* π*-подгруппа группы* G. *В частности, если* a *и* b — π*-элементы, то* $\langle a, b\rangle$ — π*-группа.*

Доказательство следует из утверждений 1.7 и 1.12 в [4].

1.9. *Пусть* $K_1, K_2, \ldots, K$ — *все классы сопряженных элементов группы* G *с представителями* $x_1, x_2, \ldots, x_r$, R — *один из них с представителем* z. *Если* $d_i = |z^{-1}R \cap K_i|$, $i = 1, 2, \ldots, r$, *то для любого* $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ *выполнено*

$$|R|\chi(z)\overline{\chi(z)}/\chi(1) = \sum_{i=1}^{r} d_i\chi(x_i).$$

Доказательство легко следует из того, что сумма $\hat{R}$ элементов, содержащихся в R, лежит в центре групповой алгебры $\mathbb{C}G$ и аддитивности функции $\chi : \mathbb{C}_G \to \mathbb{C}$.

1.10. *Пусть* G — *группа,* $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ *и* $\chi(g)/\chi(1)$ — *целое алгебраическое число. Тогда либо* $\chi(g) = 0$, *либо* $g \ker \chi \in Z(G/\ker \chi)$.

Доказательство. Достаточно воспользоваться схемой рассуждений в доказательстве леммы 4.3.1 и теоремой 4.1.3 из [9].

1.11. *Пусть* G — *группа с циклической силовской p-подгруппой* P. *Тогда либо* G *имеет p-длину* 1, *либо единственный композиционный фактор, порядок которого делится на* p. *Кроме того,* $K = C_G(\Omega_1(P))$ — *p-нильпотентная группа и* $K = [K, P]\,C_K(P)$.

Доказательство. Первая часть следует из результатов работы [6], а вторая — из теорем 7.4.2 и 7.4.3 в [9]. Утверждение о факторизации K извлекается из p-нильпотентности K и теоремы 5.3.5 в [9].

2. Ключевая лемма. Докажем один важный факт, касающийся строения p-разрешимых групп, обладающих факторизацией, указанной в теореме.

Лемма. *Пусть p-разрешимая группа* $G = AB$ *имеет циклическую силовскую p-подгруппу* $P \neq 1$, $a \in \Omega_1(P) \cap Z(A)$, z — *элемент простого порядка* r *из* $Z(B)$. *Тогда либо* az *сопряжен с* z, *либо является p-сингулярным элементом.*

Доказательство. Пусть p-разрешимая группа $G = AB$ удовлетворяет условию леммы и является контрпримером наименьшего порядка к ее заключению. Из утверждения 1.8 (*iii*) следует, что $\langle a, z\rangle \lhd G$. В силу тождества Дедекинда $G = \langle a, z\rangle A = \langle a, z\rangle B$. Так как силовская p-подгруппа группы G циклическая, а G p-разрешима, то $G = O_{p',p,p'}(G)$ согласно утверждению 1.11. Если $z \in O_{p'}(G)$, то az — p-сингулярный элемент. Поэтому $G \neq O_{p',p}(G)$ и $z \notin O_{p'}(G)$. Положим $\pi = \{p, r\}$. Из p-разрешимости группы G и теоремы Ф. Холла (теорема 18.18 в [10]) следует, что G является D_π-группой. Применяя утверждение 1.8 (*iv*) и предположение о минимальности контрпримера G, заключаем, что G является π-группой. Так как $|\pi| = 2$, то по теореме Бернсайда G разрешима. Так как $O_p(Z(A)) \neq 1$, а силовская p-подгруппа группы G циклическая, то нетрудно показать, что $A = O_{p'}(A)P$ и $O_{p'}(A) \leqslant O_{p'}(G) = F$. Ясно, что B является r-группой и $F = O_r(G)$. Отсюда BF—силовская r-подгруппа группы G. Так как G — контрпример наименьшего порядка к заключению леммы, а $A \leqslant FP = O_{p',p}(G) \lhd G$, то $FP\langle z\rangle = A(FP(z) \cap B) = G$. С другой стороны, $G/F = \bar{P} \rtimes \langle\bar{z}\rangle$, где $\bar{P} = FP/F$, $\langle\bar{z}\rangle = \langle z, F\rangle/F$. Так как $B \leqslant F\langle z\rangle$, то $\langle a, z, F\rangle = (\langle a, z, F\rangle \cap A)B = G$. В частности, $A = O_r(A) \times P$ и $|P| = p$.

Пусть U — наименьшая нормальная подгруппа группы G, содержащая $O_r(A)$. Так как $O_r(A) \leqslant U \leqslant F$, то $F = U(F \cap B)$ и z индуцирует тождественный автоморфизм на группе F/U. Так как $G/U = F/U\ PU/U\ \langle z\rangle U/U$, а G/F — группа Фробениуса (порядка pr), то из нормальности в G/U централизатора F/U следует, что PU/U также централизует F/U. Так как $A \leqslant PU \lhd G$, то легко видеть что $G = PU\langle z\rangle$ и $U = F$. Итак, F — наименьшая нормальная подгруппа группы G, содержащая $O_r(A)$.

Пусть $E = \Phi(P)$. Так как $F \lhd G$ и E — характеристическая подгруппа F, то $E \lhd G$. По теореме 5.1.3 из [9] $\bar{F} = F/E$ — элементарная абелева r-группа. Пусть $\bar{A} = O_r(A)E/E$, $\bar{P} = PE/E$ и $\bar{G} = G/E$. Очевидно, что $\bar{A} \leqslant C_{\bar{F}}(\bar{P}) = O_r(Z(\bar{P}\bar{F})) \lhd \bar{G}$. В силу доказанного выше $\bar{F} = C_{\bar{F}}(\bar{P})$. Поэтому P индуцирует тождественную группу автоморфизмов на $\bar{F}$. По теореме 5.1.4 из [9] $[P, F] = 1$. Отсюда следует, что $P \lhd G$. Так как $\langle P, z\rangle = P \rtimes \langle z\rangle$ в этом случае, то легко убедиться, что либо элемент az сопряжен с z, либо $\langle P, z\rangle$ — абелева группа и az — p-сингулярный элемент.

3. Доказательство теоремы. Зафиксируем до конца доказательства следующие обозначения. Пусть $G = AB$ — группа, являющаяся контрпримером наименьшего порядка к заключению теоремы. Согласно утверждению 1.11 $A = MP$, где $M = O_{p',p}(A)$, P— циклическая силовская p-подгруппа группы G, B — группа с нетривиальным центром, R — минимальная нормальная подгруппа группы G (как будет видно из дальнейшего, она единственная), $q = |P|$, $n = |N_G(P) : C_G(P)|$ и $t = (q-1)/n$. Предпошлем заключительной части доказательства несколько лемм, описывающих свойства гипотетического минимального контрпримера.

Лемма 1. *$O_{p'}(G) = O_p(G) = 1$, R — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G и $P \leqslant R$.*

Доказательство. Очевидно, что группа $\bar{G} = G/O_{p'}(G)$ имеет факторизацию $\bar{G} = \bar{A}\bar{B}$, где $\bar{A} = AO_{p'}(G)/O_{p'}(G)$ и $\bar{B} = BO_{p'}(G)/O_{p'}(G)$. Если $|\bar{G}| < |G|$, то $Z(\bar{B}) \leqslant O_{p',p,p'}(\bar{G})$ в силу минимальности контрпримера G, а отсюда легко следует противоречие с выбором G. Поэтому $O_{p'}(G) = 1$. Если $O_p(G) \neq 1$, то из утверждения 1.11 следует p-разрешимость группы G.

Итак, $O_p(G) = O_{p'}(G) = 1$. Согласно утверждению 1.11 G имеет единственный композиционный фактор, порядок которого делится на p. Отсюда R—единственная минимальная нормальная подгруппа группы G.

Пусть z—элемент простого порядка r из $Z(B)$. Так как $O_{p',p,p'}(G) = 1$ согласно лемме 1, то $z \notin O_{p',p,p'}(G)$.

Лемма 2. *Пусть $\chi \in B_0(p)$ — неисключительный характер группы*

G. Если $\chi(1)=1$, *то* $\chi(a)=1$ *для любого* $a\in P$. *Если* $\chi(1)>1$, *то* $\chi(z)=0$.

Доказательство. Пусть $a\in\Omega_1(P)^{\#}$ и $\chi\in B_0(p)$ не является исключительным характером. Согласно утверждению 1.8 (i), $\chi(a)\chi(z)=\chi(1)\chi(az)$. В силу утверждения 1.2 $\chi(a)=\sigma=\pm1$. Поэтому $\chi(z)/x(1)=\delta\chi(az)$ — целое алгебраическое число. Из утверждения 1.10 следует, что либо $\chi(z)=0$, либо $z\ker\chi\in Z(G/\ker\chi)$. Пусть $\chi(z)\neq0$. По лемме 1 $Z(G)=1$. Поэтому $\ker x\neq1$. Так как G имеет единственную минимальную подгруппу R по лемме 1, то $R<\ker\chi$. В частности, $\chi(a)=\chi(1)$ для любого $a\in P$. Так как $\chi(a)=\delta$, то $\chi(a)=1=\chi(1)$, что доказывает лемму.

Лемма 3. $G=RB$, $RA=L\lhd G$, $L\langle z\rangle=G$, *причем* $z\notin L$ *и* $B_0(p)$ *содержит ровно* r *линейных характеров*.

Доказательство. Пусть $R\leqslant K=(K\cap A)(K\cap B)\leqslant G$. Если $Z(B)\cap K\neq1$ и $K\neq G$, то по выбору G имеем $O_{p',p}(K)\neq1$. Очевидно, что $O_{p',p}(K)\cap R=1$. Поэтому $[O_{p',p}(K),R]=1$. Так как $C_G(R)\lhd G$ и R — единственная минимальная подгруппа группы G, то $R\leqslant C_G(R)$, откуда следует абелевость R. Последнее противоречит лемме 1. Таким образом, любая подгруппа K, для которой $R\leqslant K=(K\cap A)(K\cap B)$, содержащая элемент из $Z(B)^{\#}$, совпадает с G. Применяя это рассуждение к $K=RB$, заключаем, что $RB=G$. Если $RA\cap Z(B)\neq1$, то по тем же соображениям $RA=G$. Предположим, что $RA=L\neq G$. Так как $\langle z,R\rangle\leqslant Z(G/R)$, то $L\lhd L\langle z\rangle$. Однако $L\langle z\rangle$ обладает нетривиальным пересечением с $Z(B)$, откуда $L\langle z\rangle=G$.

Теперь осталось показать, что $L\neq G$ и главный p-блок $B_0(p)$ группы G содержит ровно r характеров степени 1. Согласно утверждению 1.5 число линейных характеров $B_0(p)$ равно $|G:G'C_G(P)|$. По лемме 1 $P\leqslant R\leqslant G'$. В силу утверждения 1.11 $A\leqslant C_G(\Omega_1(P))\leqslant G'C_G(P)$. Поэтому $L=RA\leqslant G'C_G(P)$ и число линейных характеров в $B_0(p)$ делит r. Следовательно, $|G:G'C_G(P)|$ делит r.

Предположим, что в $B_0(p)$ имеется только один характер степени 1. Так как $1_G\in B_0(p)$, то это будет главный характер.

По лемме 2 $\chi(z)=0$ для любого неглавного неисключительного характера χ из $B_0(p)$. Используя утверждение 1.4, получаем

$$\sum_{i=1}^{n}\delta_i\chi_i(z)+\delta_0\theta(z)=0.$$

где $\chi_1,\chi_2,\ldots,\chi_n$ — все неисключительные характеры из $B_0(p)$, а θ — любой исключительный характер в $B_0(p)$. Учитывая изложенное о значениях χ_i на z, имеем $\theta(z)=\pm1$. В силу утверждения 1.8 (*i*) для $a\in\Omega_1(P)^{\#}$ находим

$$\theta(az)=\theta(a)\theta(z)/\theta(1)=\pm\theta(a)/\theta(1).$$

Согласно утверждению 1.10 отсюда следует, что либо $\theta(a)=0$, либо $|\theta(a)|=\theta(1)$. Покажем, что первая возможность исключена. Действительно, кратность вхождения 1_{P_1} в $\theta|_{P_1}$ равна ($P_1=\Omega_1(P)$)

$$c=(\theta|_{P_1},1_{P_1})_{P_1}=1/p\sum_{a\in P_1}\theta(a)=\theta(1)/p.$$

Так как c — целое число, то p делит $\theta(1)$, что противоречит утверждению 1.3.

Итак, $|\theta(a)|=\theta(1)$. По теореме 4.1.3 из [9] это означает, что $a\ker\theta\in Z(G/\ker\theta)$. Однако $a\in R$ — единственной минимальной нормальной подгруппе группы G. Поэтому $a\in\ker\theta$. По доказанному выше $BR=G$, так что $z\ker\theta\in Z(G/\ker\theta)$. Из теоремы 4.1.3 в [9] ясно, что $|\theta(z)|=\theta(1)$. Но $|\theta(z)|=1$. Поэтому θ — линейный характер, содержащийся в $B_0(p)$ и отличный от 1_G. Противоречие. Таким образом, G имеет r линейных характеров, откуда $G=L\langle z\rangle\neq L$.

Лемма 4. *Для любого* $a\in\Omega_1(P)^{\#}$ *элемент* az *является* p-*регулярным и* az *не сопряжен с* z.

Доказательство. Допустим, что az сопряжен с z. Тогда из утверждения 1.8 получим противоречие с леммой 1. Предположим теперь, что az является p-сингулярным для некоторого $a \in \Omega_1(P)^{\#}$. В силу утверждения 1.2 $\chi(az) = \delta = \pm 1$ для любого неисключительного характера $\chi \in B_0(p)$. Из леммы 2 и утверждения 1.8 следует, что тогда любой неисключительный характер из $B_0(p)$ (а их r штук по лемме 3) является линейным. Из утверждения 1.5 и аргумента Фраттини следует, что число линейных характеров группы $G\,(\in B_0(p))$ делит $n = |N_G(P) : C_G(P)|$. В частности, $r \leqslant n$. Поэтому $r = n$. Так как $G = L\langle z\rangle = LN_G(P)$ по аргументу Фраттини и $C_G(P) \leqslant L$, то

$$G/L \cong N_G(P)/N_G(P) \cap L = N_G(P)/N_L(P) \cong N_G(P)/C_G(P).$$

Отсюда ясно, что $N_L(P) = C_L(P)$. Согласно теореме 7.4.3 из [9] L — p-нильпотентная группа, что противоречит лемме 1.

Лемма 5. *$C_G(a) = A$ для любого $a \in \Omega_1(P)^{\#}$ и $C_B(a) = 1$.*

Доказательство. Предположим, что $C_B(a) \neq 1$ для некоторого $a \in \Omega_1(P)^{\#}$. Тогда $C_B(a) \leqslant C_G(\langle a, z\rangle)$. В частности, $\langle a, z\rangle = U$ не нормальна в G вследствие леммы 1. Согласно утверждению 1.8 (*iii*) $K = N_G(\langle a, z\rangle) = (K \cap A)(K \cap B)$. Так как $K \neq G$, то по выбору G нормальное замыкание в K элемента z является p-разрешимой группой. Вследствие тождества Дедекинда и условия на A группа $F = U(K \cap A) = (F \cap B)(F \cap \cap A)$ является p-разрешимой. По ключевой лемме элемент az является либо p-сингулярным, либо сопряжен с элементом z. Любая из этих возможностей противоречит лемме 4.

Итак, $C_B(a) = 1$ для любого $a \in \Omega_1(P)^{\#}$. Так как $C_G(a) \geqslant A$, то $C_G(a) = AC_B(a) = A$, что доказывает лемму.

Лемма 6. *$\chi(z) = 0$ для любого нелинейного характера $\chi \in B_0(p)$ и $\chi(a) = 1$ для любого линейного характера $\chi \in B_0(p)$, если $a \in P$.*

Доказательство. Допустим, что χ — неисключительный характер из $B_0(p)$. Тогда заключение леммы 6 верно в силу леммы 2. Пусть χ — исключительный характер из $B_0(p)$. В силу утверждения 1.3 и теоремы 4.7.3 из [9] все исключительные характеры из $B_0(p)$ нелинейны. Поэтому все линейные характеры из $B_0(p)$ суть неисключительные характеры. Занумеруем неисключительные характеры из $B_0(p)$ таким образом, чтобы $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_i$ оказались линейными. Тогда очевидно, что $\chi_i(z) = \varepsilon_i$, $i = 1, 2, \ldots, r$, где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r$ — все корни r-й степени из единицы в $\mathbb{C}$. Кроме того, $\delta_i = \chi_i(a) = \chi(a) = 1$ для $i = 1, 2, \ldots, r$. Соотношение в утверждении 1.4 с учетом леммы 2 принимает вид

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_r + \delta_0\chi_\lambda(z) = 0,$$

где $\chi_\lambda \in B_0(p)$ — любой исключительный характер в $B_0(p)$.

Известно, что сумма всех корней r-й степени из единицы при $r > 1$ равна 0. Поэтому $\chi_\lambda(z) = 0$ для любого исключительного характера $\chi_\lambda \in B_0(p)$. Утверждение о значении $\chi \in B_0(p)$ на элементах из P следует из леммы 1.

Теперь завершим доказательство теоремы.

Согласно формуле в утверждении 1.9 имеем

$$|A|\,\chi(z)\overline{\chi(z)}/\chi(1) = \sum_{i=1}^{m} d_i\chi(g_i)$$

для любого $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. Здесь $g_1, g_2, \ldots, g_m$ — представители всех классов сопряженных элементов группы G, d_i — целые неотрицательные числа. Домножая левую и правую части равенства на $\overline{\chi(a)}$, где $a \in \Omega_1(P)^{\#}$, и суммируя полученные выражения по всем характерам из $B_0(p)$, получаем

$$|A| \sum_{\chi \in B_0(p)} \chi(z)\overline{\chi(z)}\,\overline{\chi(a)}/\chi(1) = \sum_{i=1}^{m} d_i \sum_{\chi \in B_0(p)} \chi(g_i)\overline{\chi(a)}.$$

Из утверждения 1.7 следует, что справа получится сумма, отличная от нуля, тогда и только тогда, когда для некоторого элемента g_i, для которого $d_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, p-часть элемента g_i сопряжена с a. Вычислим теперь выражение слева. Очевидно, что $\chi(z)\,\overline{\chi(z)}\,\overline{\chi(a)} = 1$ для любого $\chi \in B_0(p)$, для которого $\chi(1) = 1$ и $\chi(z)\overline{\chi(z)}\,\overline{\chi(a)} = 0$ для любого $\chi \in B_0(p)$, для которого $\chi(1) > 1$ в силу леммы 6. Поэтому сумма слева равна $|A|r$. Таким образом, существует по меньшей мере один p-сингулярный элемент $g_i \in G$, $i = 1, 2, \ldots, m$, для которого $d_i \neq 0$. Из утверждения 1.9 следует, что элемент g_i сопряжен с элементом вида $z^{-1}z^x$ для подходящего $x \in G$. Так как $C_G(z) \geqslant B$, то $z^x = z^u$ для подходящего $u \in A$, а поскольку g_i — p-сингулярный элемент, то $g_i = a_0^b$ для подходящего $a_0 \in A$, $b \in B$. Действительно, по лемме 5 централизатор любого p-элемента из G содержится в подгруппе, сопряженной с A, а из факторизации $G = AB$ следует, что $g_i \in A^b$ для подходящего $b \in B$. Итак, $z^{-1}z^u = a_0^b$ для подходящих $u \in A$, $b \in B$ и p-сингулярного элемента $a_0 \in A$. Далее, из $G = AB$ следует, что $ub^{-1} = b_1 u_1$ для некоторых $b_1 \in B$, $u_1 \in A$. Так как $bzb^{-1} = z$, то

$$z^{-1}u_1^{-1}\,zu_1 = a_0,$$

где a_0 — p-сингулярный элемент. Отсюда

$$z^{-1}u_1^{-1}z = a_0 u_1^{-1} = u_2.$$

Если u_1 — p-регулярный элемент, то $u_2 = a_0 u_1^{-1}$ является p-сингулярным, так как в p-нильпотентной группе A, очевидно, произведение p-регулярного и p-сингулярного элементов будет p-сингулярным. Поэтому получили противоречие с сопряженностью элементов u_1^{-1} и u_2. Значит, u_1 — p-сингулярный, а u_2 — также p-сингулярный как сопряженный с u_1^{-1}.

Пусть v — p-часть u_1^{-1}. Тогда $v = u_1^{-k}$ для подходящего $k \in \mathbb{Z}$. Следовательно, $z^{-1}vz = u_2^k$. Так как $v \neq 1$, то $u_2^k \neq 1$ и является p-элементом. Поэтому $v_2^k \in P \cap P^z \neq 1$. Так как $\Omega_1(P) \leqslant P \cap P^z$ в этом случае, то $\Omega_1(P) = \Omega_1(P^z)$. Но тогда либо $z \in C_G(\Omega_1(P)) \leqslant A$, что противоречит лемме 5, либо $\langle \Omega_1(P), z\rangle$ — группа Фробениуса, так что az сопряжен с z для любого $a \in \Omega_1(P)$. В силу утверждения 1.8 (i), (ii) это приводит к противоречию с леммой 1.

1. *Кострикин А. И.* Конечная группа // Математическая энциклопедия.— М. : Сов. энцикл., 1979.— Т. 2.— 1104 с.
2. *Arad Z., Fisman E.* A proof of Szep's conjecture on non-simplicity of certain finite groups // J. Algebra.— 1987.— 108.— P. 340—354.
3. *Казарин Л. С.* О произведении двух групп с нетривиальными центрами // XIX Всесоюзн. алгебр. конф.: Тез. сообщ. Ч. 2.— Львов, 1987.— С. 116.
4. *Казарин Л. С.* О проблеме Сепа // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1986. — 50, № 3. — С. 479—507.
5. *Казарин Л. С.* О p^{α}-лемме Бернсайда //Мат. заметки.— 1990.— 48, № 2.— С. 45—48.
6. *Brauer R.* On finite groups with cyclic Sylow subgroups, I. // J. Algebra.— 1976.— 40.— P. 556—584.
7. *Brauer R.* Some applications of the theory of blocks of characters of finite groups, I. // Ibid.— 1964.— 1.— P. 152—167.
8. *Isaacs M. I.* Character theory of finite groups.— New York: Acad. press, 1976.— 303 p.
9. *Gorenstein D.* Finite Groups.— New York: Harper and Row, 1968.— 527 p.
10. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп.— М. : Наука, 1978.— 271 с.

Получено 18.12.91