УДК 544.542

С. Н. Черников, чл.-корр. АН Украины (Ин-т математики АН Украины, Киев),
С. С. Левищенко, канд. физ.-мат. наук (Киев. пед. ин-т)

Конструктивное описание конечных недисперсивных групп, в которых все подгруппы непримарного индекса абелевы

Доказана теорема, дающая конструктивное описание конечных недисперсивных групп, в которых все подгруппы непримарного индекса абелевы.

Доведена теорема, яка дає конструктивний опис скінченних недисперсивних груп, в яких всі підгрупи непримарного індексу абелеві.

Основной результат этой работы анонсирован в [1]. Сформулируем его в таком виде.

Теорема. *Конечные недисперсивные группы, у которых все подгруппы непримарного индекса абелевы, исчерпываются группами вида*

$$G = (\langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle) \rightthreetimes (\langle b \rangle \rightthreetimes \langle a \rangle),$$

$$|a_1| = |a_2| = 2, \quad |a| = 2^{\alpha-2}, \quad \alpha \geqslant 3, \quad |b| = 3,$$

$$b^{-1}a_1b = a_1a_2, \quad b^{-1}a_2b = a_1, \quad a^{-1}a_1a = a_1a_2,$$

$$a^{-1}a_2a = a_2, \quad a^{-1}ba = b^2,$$

$$Z(G) = \langle a^2 \rangle, \quad G/Z(G) \cong S_4.$$

В настоящей работе приводится доказательство этой теоремы.

Напомним, что произвольные конечные непримарные неабелевы группы, в которых все подгруппы непримарного индекса абелевы, были введены в работе [2] и названы M^*-группами (по аналогии с M-группами, т. е. группами Миллера—Морено — конечными неабелевыми группами, все собственные подгруппы которых абелевы, изучавшимися в [3]). Напомним также, что конечные ненильпотентные группы, в которых все подгруппы непримарного индекса нильпотентны, введены в работе [4] и названы S^*-группами (по аналогии с S-группами, т. е. группами Шмидта — конечными ненильпотентными группами, все собственные подгруппы которых нильпотентны, изучавшимися в [5]). Из этих определений вытекает, что любая недисперсивная M^*-группа является S^*-группой.

Лемма 1. *Недисперсивные M^*-группы являются бипримарными группами.*

Справедливость леммы вытекает из того факта, что недисперсивные S^*-группы имеют порядок p^nq, где p, q — различные простые числа, n — натуральное число, $n \geqslant 3$, причем силовские p-подгруппы неабелевы (см., например, [4]).

Очевидны такие следствия.

Следствие 1. *Силовские p-подгруппы недисперсивной M^*-группы являются группами Миллера — Морено.*

Следствие 2. *Пусть $G = PQ$ — недисперсивная M^*-группа, P, Q — ее силовские p- и q-подгруппы соответственно, $G_0 = P_0Q$ $(1 \neq P_0 \neq P$, $|Q| = q)$ — ее инвариантная подгруппа. Тогда $G_0 = P_0 \rightthreetimes Q$ и $P_0 < P$, $P_0 = P \cap G_0$.*

Перейдем теперь к доказательству теоремы.

Необходимость. Пусть G — недисперсивная M^*-группа. Тогда $|G| = p^\alpha q$, где $\alpha \geqslant 3$, и произвольная силовская p-подгруппа группы G является группой Миллера—Морено. Обозначим через P некоторую силовскую p-подгруппу группы G, а через Q — ее некоторую силовскую q-подгруппу. Будучи разрешимой, группа G содержит нормальный делитель G_1 простого индекса. Из определения недисперсивных M^*-групп следует $|G_1| = p^{\alpha-1}\,q$, а по следствию 2 $G_1 = P_1 \rightthreetimes Q$, где $P_1 < P$, $|P_1| = p^{\alpha-1}$ и $Q \not\triangleleft G_1$.

Рассмотрим теперь нормализатор $N_G(Q) = T$ подгруппы Q в группе G. Так как G — недисперсивная группа, то $T \neq G$. Понятно также, что T — ненильпотентная группа, так как в противном случае подгруппа Q содержится в центре $Z(T)$ своего нормализатора T и по теореме Бернсайда $P \triangleleft G$, что противоречит предположению о недисперсивности группы G. Следовательно, $T = Q \rightthreetimes P_2$, причем $P_2 \not\triangleleft T$, где $P_2 < P$ и $|P_2| = p^{\alpha_2}$, $1 \leqslant \alpha_2 < \alpha$. Выделим теперь в группе T подгруппу Миллера—Морено $M \leqslant T$. Так как в T силовские подгруппы абелевы, то подгруппа M будет непримарной и потому $M > Q$. А так как $Q \triangleleft T$, то $Q \triangleleft M$. Но тогда из свойств групп Миллера—Морено следует, что $M' = Q$ и

$$q \equiv 1 \pmod{p}. \tag{1}$$

Так как $M' = Q$ и $M' \leqslant G'$, то $Q \leqslant G'$. Случай $Q = G'$ невозможен ввиду неинвариантности Q в G. Следовательно, $G' = P_3Q$, $1 < P_3 < P$ и ввиду следствия 2 $G' = P_3 \leftthreetimes Q$. Пусть $P_4 = P_1 \cap P_2$. Ясно, что $P_2 \nleqslant P_1$, так как в противном случае $T = Q \times P_2$ (подгруппа P_1 инвариантна в G), что ввиду теоремы Бернсайда противоречит предположению о недисперсивности группы G. Так как подгруппа P_1 максимальна в P, то подгруппа P_4 максимальна в группе P (ведь $|P_2 : P_1 \cap P_2| = p$).

Покажем далее, что $P_4 = Z(G)$. Действительно, так как $P_1 \lhd G$ (как характеристическая подгруппа нормального делителя G_1 группы G), то $P_4 \lhd T$ (ведь $P_4 = P_1 \cap P_2 = P_1 \cap T$, а $T = N_G(Q)$). С другой стороны, так как P_1 максимальна в P и $P_2 \nleqslant P_1$, то $P = P_1P_2$. Подгруппы P_1 и P_2 являются собственными подгруппами группы Миллера — Морено P, а потому абелевы. Но тогда $P_4 \leqslant Z(P)$. А так как $P_4 \lhd T$, то $P_4 \leqslant Z(G)$. Предположим, что $P_4 \neq Z(G)$. Тогда найдется такой элемент $c \in Z(G)$, что $c \overline{\in} P_4$. Ясно, что $c \in Z(P)$. С другой стороны, $P_1 \geqslant Z(P)$ (ввиду максимальности подгруппы P_1 в P и неабелевости P) и потому $c \in P_1$. Ясно также, что $c \in T$, так как $c \in Z(G)$. Но тогда $c \in P_1 \cap T = P_1 \cap P_2 = P_4$, что противоречит выбору элемента c. Полученное противоречие показывает, что $P_4 = Z(G)$.

Найдем теперь второй коммутант G'' группы G. Так как $G' = P_3 \leftthreetimes Q$, то $G'' \leqslant P_3$. Покажем, что $G'' \leftthreetimes Q \lhd G$. С этой целью рассмотрим фактор-группу G/G''. Очевидно, что $G/G'' = P/G'' \cdot (G''Q)/G''$. Ясно также, что $(G/G'')'$ — абелева группа и $(G/G'')' \geqslant (G''Q)/G''$. Но тогда $(G''Q)/G'' \lhd (G/G'')'$, а потому $G''Q/G'' \lhd G/G''$. Отсюда следует, что $G''Q \lhd G$. Покажем далее, что $G' = G'' \leftthreetimes Q$. С этой целью рассмотрим фактор-группу $G/G''Q$. Нетрудно показать, что для группы G существует разложение $G = G''P_2Q$. Тогда $G/G''Q = G''P_2Q/G''Q \cong P_2/G''Q \cap P_2$. А так как P_2 — абелева группа, то $G' \leqslant G''Q$. С другой стороны, $G'' \leqslant P_3$ и, значит, $G''Q \leqslant P_3 \leftthreetimes Q = G'$. Но тогда $G' = G''Q$, а $G'' = P_3$.

Покажем, что $G = G'' \leftthreetimes (Q \leftthreetimes P_2)$. Выше было доказано, что $G = G''QP_2 = G''(Q \leftthreetimes P_2)$. Докажем, что $G'' \cap (Q \leftthreetimes P_2) = 1$. Для этого достаточно показать, что $G'' \cap P_2 = 1$. Предположим, что $G'' \cap P_2 \neq 1$. Так как $G' = G'' \leftthreetimes Q$, $G'' \cap P_2 \leqslant P_1 \cap P_2 = P_4 = Z(G)$ и $G'' \cap P_2 \leqslant G'$, то $G'' \cap P_2 \leqslant Z(G')$. С другой стороны, $G'' \cap P_2 \leqslant G''$ и, значит, $1 \neq G'' \cap P_2 \leqslant Z(G') \cap G'' \neq 1$. В то же время группа G' является разрешимой группой с абелевыми силовскими подгруппами и потому для нее $Z(G') \cap G'' = 1$ (см., например, [6]). Получили противоречие. Следовательно, $G'' \cap P_2 = 1$ и потому $G = G'' \leftthreetimes (Q \leftthreetimes P_2)$.

Докажем далее, что P_2 — циклическая группа. Действительно, пусть P_2 — нециклическая группа и $P_2 = \langle b_1, b_2, \ldots, b_k \rangle$, где k — минимальное число образующих, $k > 1$. Ясно, что $P_2 \nleqslant Z(P)$, так как в противном случае $P_1 \geqslant P_2$ и $T = Q \times P_2$, что ввиду теоремы Бернсайда противоречит предположению о недисперсивности группы G. Тогда хотя бы один из элементов $b_1, b_2, \ldots, b_k$ не содержится в $Z(P)$. Пусть, например, $b_1 \overline{\in} Z(P)$. Из соотношения $G = G'' \leftthreetimes (Q \leftthreetimes P_2)$ вытекает, что $P = G'' \leftthreetimes P_2$. Очевидно, что $G'' \langle b_1 \rangle \neq P$, так как $\langle b_1 \rangle \neq P_2$. Отсюда следует, что $G'' \langle b_1 \rangle$ — абелева группа, как собственная подгруппа группы Миллера—Морено P. Так как $P = G'' \leftthreetimes P_2$, а G'', P_2 — абелевы группы, то $b_1 \in Z(P)$ вопреки выбору элемента b_1. Следовательно, P_2 — циклическая группа. Пусть $P_2 = \langle a \rangle$, $|a| = p^{\alpha_2}$. Понятно, что $P_4 = Z(G)$ — также циклическая группа, так как $P_4 = P_1 \cap P_2 \leqslant P_2$. Кроме того, подгруппа P_4 имеет в группе P_2 простой индекс и, значит, $P_4 = Z(G) = \langle a^p \rangle$.

Легко видеть, что фактор-группа $G/Z(G)$ группы G по ее центру $Z(G)$ является недисперсивной M^*-группой с тривиальным центром. Поэтому дальнейшие рассуждения проведем для случая, когда $Z(G) = 1$. Тогда

$$G = G'' \leftthreetimes (Q \leftthreetimes P_2) = G'' \leftthreetimes (\langle b \rangle \leftthreetimes \langle a \rangle), \quad |b| = q. \tag{2}$$

Так как $Z(G) = 1$, то

$$a^p = 1, \quad G'' = P_3 = P_1, \quad |G''| = |P : P_2| = p^{\alpha - 1}. \tag{3}$$

Покажем, что P_1 — нециклическая группа и имеет два образующих элемента. Ясно, что P_1 — нециклическая группа, так как в противном случае $p \equiv 1 \pmod q$, что противоречит сравнению (1). Предположим теперь, что минимальное число образующих элементов в группе P_1 больше двух. Пусть, например, $P_1 = \langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle \times \ldots \times \langle a_s \rangle$, $s > 2$. Так как $P = P_1 \leftthreetimes \langle a \rangle = (\langle a_1 \rangle \times \ldots \times \langle a_s \rangle) \leftthreetimes \langle a \rangle$ — неабелева группа, то хотя бы один из элементов a_i, $i = 1, 2, \ldots, s$, неперестановочен с элементом a. Пусть, например, $a_1 a \neq a a_1$. Группа P, будучи группой Миллера—Морено, имеет циклический коммутант простого порядка $|P'| = p$. Так как $P' < P$ и P_1 не может быть порождена двумя своими элементами, то $\langle P', a_1 \rangle \neq P_1$. Кроме того, $\langle P', a_1 \rangle \lhd P$, так как $\langle P', a_1 \rangle > P'$. Поэтому в группе P существует собственная, а потому абелева подгруппа $\langle P', a_1 \rangle \langle a \rangle$. Но тогда $a_1 a = a a_1$, что противоречит выбору элемента a_1. Итак, $P_1 = \langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle$.

Покажем далее, что $p = 2$, $q = 3$. Для этого в группе $G_1 = P_1 \leftthreetimes Q = (\langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle) \leftthreetimes \langle b \rangle$ выделим подгруппу Миллера—Морено $M_1 \leqslant G_1$. Так как в группе G_1 все примарные подгруппы абелевы, то M_1 должна быть непримарной группой. Очевидно, что $M_1 = P_0 \leftthreetimes \langle b \rangle$ и $P_0 = M_1 \cap P_1 \lhd M_1$. Известно, что инвариантный множитель в ненильпотентной группе Миллера—Морено является элементарной абелевой группой и если $|P_0| = p^{\alpha_0}$, то α_0 — показатель числа p по модулю q. А так как P_1 — группа с двумя образующими элементами, то порядок элементарной абелевой подгруппы, которую можно выделить в ней, не превышает числа p^2. Значит, $|P_0| = |p|$ или $|P_0| = p^2$. Если $|P_0| = p$, то $p \equiv 1 \pmod q$, что противоречит сравнению (1). Следовательно, $p^2 \equiv 1 \pmod q$, где 2 — показатель числа p по модулю q. Отсюда вытекает, что число q делит произведение $(p - 1)(p + 1)$. Так как ввиду (1) $p < q$, то $q \mid (p + 1)$. Но тогда $q = p + 1$. Для простых чисел p и q это означает, что $p = 2$, $q = 3$. Следовательно, $|G| = 2^{\alpha} \times 3$, $|P| = 2^{\alpha}$, $|Q| = 3$.

Докажем теперь, что подгруппа Фраттини $\Phi(P_1)$ группы P_1 тривиальна. Пусть $\Phi(P_1) \neq 1$. Так как $\Phi(P_1)$ — характеристическая подгруппа нормального делителя G_1 группы G, то $\Phi(P_1) \lhd G$. Легко видеть, что $\Phi(P_1)$ — нециклическая, так как в противном случае подгруппа $\Phi(P_1) \leftthreetimes Q$ абелева (группа автоморфизмов циклической 2-группы сама является 2-группой), что противоречит предположению о тривиальности центра группы G. Так как $\Phi(P_1)$ — пересечение всех максимальных подгрупп из группы P_1, а P_1 — абелева группа с двумя образующими, то произвольная максимальная подгруппа группы P_1 не является циклической и порождена двумя элементами. Покажем, что при $\Phi(P_1) \neq 1$ $\Phi(P_1) \geqslant P'$. Действительно, пусть в группе P_1 найдется максимальная подгруппа P_1^*, не содержащая P'. Так как $|P'| = p$, то тогда $P_1^* \cap P' = 1$ и $P_1 = P_1^* \times P'$ и, значит, группа P_1 является абелевой группой, у которой минимальная система образующих содержит три элемента, что по доказанному выше невозможно. Следовательно,

$$\Phi(P_1) \geqslant P'. \tag{4}$$

Рассмотрим далее фактор-группу $G/\Phi(P_1)$. Ясно, что $G/\Phi(P_1) = P/\Phi(P_1) \times \Phi(P_1)Q/\Phi(P_1)$. Так как $P/\Phi(P_1)$ — абелева группа (см. соотношение (4)), а $\Phi(P_1)Q / \Phi(P_1)$ — циклическая группа простого порядка, то $G/\Phi(P_1)$ дисперсивна. Если $P/\Phi(P_1) \lhd G/\Phi(P_1)$, то $P \lhd G$, что противоречит недисперсивности G. Пусть $\Phi(P_1)Q/\Phi(P_1) \lhd G/\Phi(P_1)$. Тогда $\Phi(P_1)Q \lhd G$. Так как $G' = P_3 \leftthreetimes Q$, а $P_3 = P_1$, то $\Phi(P_1)Q < G'$ и, значит, $\Phi(P_1)Q \lhd G'$. Рассмотрим тогда фактор-группу $G'/\Phi(P_1)Q : G'/\Phi(P_1)Q = P_1Q/\Phi(P_1)Q = \Phi(P_1)QP_1/\Phi(P_1)Q \cong P_1/\Phi(P_1)Q \cap P_1$. Так как подгруппа P_1 абелева, то $\Phi(P_1)Q \geqslant (G')' = G''$. Но это противоречит доказанному выше соотношению $G'' = P_1$. Полученное противоречие показывает, что $\Phi(P_1) = 1$.

Так как $\Phi(P_1) = 1$, а P_1 имеет два образующих, то $|P_1| = 2^2$ и, следовательно, $|G| = 2^3 \cdot 3 = 24$. Но среди 15 типов групп 24-го порядка только одна — симметрическая группа четвертой степени S_4 — является недисперсивной группой и потому при условии $Z(G) = 1$ группа G изоморфна S_4. В соответствии с соотношениями (2) группа S_4 может быть представлена в таком виде $G = (\langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle) \leftthreetimes (\langle b \rangle \leftthreetimes \langle a \rangle)$, где $a_1^2 = a_2^2 = a^2 = b^2 = 1$,

$a_1a_2 = a_2a_1$, $b^{-1}a_1b = a_1a_2$, $b^{-1}a_2^2b = a_1$, $a^{-1}a_1a = a_1a_2$, $a^{-1}a_2a = a_2$, $a^{-1}ba = b^2$. Ясно, что возвращаясь к исходной группе G, т. е. отказываясь от условия $Z(G) = 1$, получаем еще дополнительное соотношение $|a| = 2^{\alpha-2}$, $\alpha - 2 \geqslant 1$. Ясно также, что при этом $Z(G) = \langle a^2 \rangle$ и $G/Z(G) \cong S_4$. Необходимость доказана. Достаточность очевидна. Теорема доказана.

1. *Черников С. Н., Левищенко С. С.* О конечных непримарных группах, у которых все собственные подгруппы непримарных индексов абелевы // XII Всесоюзн. алгебр. коллоквиум: Тез. сообщ. Тетр. 1.— Свердловск, 1973.— С. 119.
2. *Левищенко С. С.* Обобщение групп Миллера—Морено // XI Всесоюзн. алгебр. коллоквиум (Кишинев, 17—19 мая 1971 г.): Рез. сообщ. и докл.— Кишинев, 1971.— С. 53—54.
3. *Miller G. A., Moreno H. C.* Nonabelian groups in which every subgroup is abelian // Trans. Amer. Math. Soc.— 1903.— **4**.— P. 398—404.
4. *Левищенко С. С.* Конечные ненильпотентные группы с некоторыми заданными системами нильпотентных подгрупп // IV Всесоюзн. симп. по теории групп (Новосибирск, 5—9 февр. 1973 г.): Тез. докл.— Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1973.— С. 99—105.
5. *Шмидт О. Ю.* Группы, все подгруппы которых специальные // Мат. сб.— 1924.— **31**.— С. 366—372.
6. *Taunt D.* On *A*-groups // Proc. Cambridge Phil. Soc.— 1949.— **45**, N 1.— P. 14—42.

Получено 26.11.91