УДК 517.5

Ю. В. Гнатюк (Кам'янець-Поділ. пед. ін-т)

ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ ЗАДАЧІ НАЙКРАЩОГО ОДНОЧАСНОГО НАБЛИЖЕННЯ КІЛЬКОХ ЕЛЕМЕНТІВ

Dual correlations and criteria of the element of the best approximation based on the notions of subdifferential and conjugate function are established for the problem of the best approximation of several elements with additional restrictions with respect to the maximum of fractional-convex-concave functions.

Для задачі найкращого за максимумом дробово-опукло-вгнутих функцій наближення кількох елементів з додатковими обмеженнями встановлені співвідношення двоїстості та критерії елемента найкращого наближення.

Задача найкращого за максимумом дробово-опукло-вгнутих функцій наближення кількох елементів з додатковими обмеженнями включає задачі найкращого наближення за нормою, переднормою, сублінійною функцією, основні результати дослідження яких підсумовані в [1–3]. До задач дробової апроксимації приводить розв'язування задач теорії чебишовських раціональних наближень [4], проблеми моментів [5, 6] та ін.

У даній статті на випадок задачі найкращого за максимумом дробово-опукло-вгнутих функцій наближення кількох елементів з додатковими обмеженнями розповсюджені співвідношення двоїстості та критерії елемента найкращого наближення, наведені в [1] для задачі найкращого наближення за нормою.

Нехай X, Y — лінійні нормовані простори, X^*, Y^* — простори, спряжені з просторами X, Y; p_j, h_i — опуклі на X, g_j — вгнуті на X неперервні функції, p_j^*, g_j^*, h_i^* — функції, спряжені з p_j, g_j, h_i; A_j, B_j, C_i — лінійні неперервні оператори, що діють з Y в X; x_j, y_j, z_i — фіксовані елементи простору X; $\partial p_j(x)$, $\partial g_j(x)$, $\partial h_i(x)$ — субдиференціали функцій p_j, g_j, h_i в точці x відповідно, $j=\overline{1,\ l}$, $i=\overline{1,\ m}$; U — опукла підмножина простору Y,

$$p(x) = \max_{1\le j\le l} \frac{p_j(x)}{g_j(x)}.$$

Задачею найкращого у розумінні функції p наближення фіксованих елементів x_j, y_j, $j=\overline{1,\ l}$, простору X опуклою множиною U за допомогою лінійних неперервних операторів A_j, B_j, $j=\overline{1,\ l}$, при наявності додаткових обмежень будемо називати задачу знаходження величини

$$\alpha^* = \inf_{\substack{h_i(C_i u - z_i)\le 0,\\ i=\overline{1,\ m},\ u\in U}} \max_{1\le j\le l} \frac{p_j(A_j u - x_j)}{g_j(B_j u - y_j)}. \tag{1}$$

Позначимо $F=\{u:\ u\in U,\ h_i(C_i u - z_i)\le 0,\ \ i=\overline{1,\ m}\}$. Елемент $u^*\in F$, який реалізує в (1) точну нижню межу, тобто такий, що

$$\max_{1\le j\le l} \frac{p_j(A_j u^* - x_j)}{g_j(B_j u^* - y_j)} = \alpha^*,$$

будемо називати елементом найкращого у множині F за функцією p наближення сукупності елементів x_j, y_j за допомогою лінійних неперервних операторів A_j, B_j, $j=\overline{1,\ l}$.

Припускається, що $g_j(B_j u - y_j) > 0$ для всіх $j = \overline{1, l}$, $u \in U$, а у випадку, коли серед функцій g_j, $j = \overline{1, l}$, є відмінні від афінних, тоді, крім того,

$$\max_{1 \le j \le l} p_j(A_j u - x_j) \ge 0$$

для всіх $u \in F$.

Теорема 1. *Для будь-якого* $u \in U$ *справедлива рівність*

$$\max_{1 \le j \le l} \frac{p_j(A_j u - x_j)}{g_j(B_j u - y_j)} = \max_{\substack{\lambda_j \ge 0,\ j = \overline{1, l},\\ \sum_{j=1}^{l} \lambda_j = 1}} \frac{\sum_{j=1}^{l} \lambda_j p_j(A_j u - x_j)}{\sum_{j=1}^{l} \lambda_j g_j(B_j u - y_j)}. \tag{2}$$

Якщо $\lambda^u = (\lambda_1^u, \ldots, \lambda_l^u)$ реалізує максимум у правій частині рівності (2), то, крім того,

$$\lambda_j^u \left(\frac{p_j(A_j u - x_j)}{g_j(B_j u - y_j)} - \max_{1 \le j \le l} \frac{p_j(A_j u - x_j)}{g_j(B_j u - y_j)} \right) = 0, \quad j = \overline{1, l}.$$

З теореми 1 випливає справедливість рівності

$$\alpha^* = \inf_{u \in F} \max_{\substack{\lambda_j \ge 0,\ j = \overline{1, l}\\ \sum_{j=1}^{l} \lambda_j = 1}} \frac{\sum_{j=1}^{l} \lambda_j p_j(A_j u - x_j)}{\sum_{j=1}^{l} \lambda_j g_j(B_j u - y_j)}. \tag{3}$$

Надалі будемо припускати, що існує вектор $\overline{u} \in U$, для якого $h_i(C_i \overline{u} - z_i) < 0$, $i = \overline{1, m}$.

Теорема 2. *Справедливе співвідношення двоїстості*

$$\alpha^* = \max \left\{ \inf_{u \in U} \frac{\sum_{j=1}^{l} \lambda_j (\varphi_j (A_j u - x_j) - p_j^*(\varphi_j)) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i (\delta_i (C_i u - z_i) - h_i^*(\delta_i))}{\sum_{j=1}^{l} \lambda_j (\gamma_j (B_j u - y_j) - g_j^*(\gamma_j))} : \right.$$

$$\left. (\varphi; \gamma; \delta; \lambda; \mu) \in S_1 \right\}, \tag{4}$$

де

$$S_1 = \Big\{ (\varphi; \gamma; \delta; \lambda; \mu) : \varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_l),\ \gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_l),$$

$$\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_m),\ \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l),\ \mu = (\mu_1, \ldots, \mu_m),\ \varphi_j \in \operatorname{dom} p_j^*,$$

$$\gamma_j \in \operatorname{dom} g_j^*,\ \lambda_j \ge 0,\ j = \overline{1, l},\ \sum_{j=1}^{l} \lambda_j = 1,\ \delta_i \in \operatorname{dom} h_i^*,\ \mu_i \ge 0,\ i = \overline{1, m} \Big\}.$$

Доведення. Оскільки за означенням

$$p_j^*(\varphi_j) = \sup_{x \in X} (\varphi_j(x) - p_j(x)), \qquad g_j^*(\gamma_j) = \inf_{x \in X} (\gamma_j(x) - g_j(x)),$$

$$h_i^*(\delta_i) = \sup_{x \in X} (\delta_i(x) - h_i(x))$$

для $\varphi_j \in X^*$, $\gamma_j \in X^*$, $j = \overline{1, l}$, $\delta_i \in X^*$, $i = \overline{1, m}$, то для всіх

$$u \in Y, \quad \varphi_j \in \operatorname{dom} p_j^*, \quad \gamma_j \in \operatorname{dom} g_j^*, \quad j = \overline{1, l}, \quad \delta_i \in \operatorname{dom} h_i^*, \quad i = \overline{1, m},$$

виконуються нерівності

$$p_j(A_j u - x_j) \geq \varphi_j(A_j u - x_j) - p_j^*(\varphi_j), \quad j = \overline{1, l}, \tag{5}$$

$$h_i(C_i u - z_i) \geq \delta_i(C_i u - z_i) - h_i^*(\delta_i), \quad i = \overline{1, m}, \tag{6}$$

$$g_j(B_j u - y_j) \leq \gamma_j(B_j u - y_j) - g_j^*(\gamma_j), \quad j = \overline{1, l}. \tag{7}$$

Тоді для довільних

$$\lambda_j \geq 0, \quad j = \overline{1, l}, \quad \sum_{j=1}^{l} \lambda_j = 1, \quad \mu_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m},$$

та $u \in F$ одержимо

$$\sum_{j=1}^{l} \lambda_j p_j(A_j u - x_j) \geq \sum_{j=1}^{l} \lambda_j p_j(A_j u - x_j) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i h_i(C_i u - z_i) \geq$$

$$\geq \sum_{j=1}^{l} \lambda_j(\varphi_j(A_j u - x_j) - p_j^*(\varphi_j)) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i(\delta_i(C_i u - z_i) - h_i^*(\delta_i)), \tag{8}$$

$$\sum_{j=1}^{l} \lambda_j g_j(B_j u - y_j) \leq \sum_{j=1}^{l} \lambda_j(\gamma_j(B_j u - y_j) - g_j^*(\gamma_j)). \tag{9}$$

З (8), (9) та умов, накладених на функції p_j, g_j, $j = \overline{1, l}$, випливає, що для всіх

$$u \in F, \quad \lambda_j \geq 0, \quad j = \overline{1, l}, \quad \sum_{j=1}^{l} \lambda_j = 1, \quad \mu_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m},$$

$$\varphi_j \in \operatorname{dom} p_j^*, \quad \gamma_j \in \operatorname{dom} g_j^*, \quad j = \overline{1, l}, \quad \delta_i \in \operatorname{dom} h_i^*, \quad i = \overline{1, m},$$

виконується нерівність

$$\max_{\substack{\alpha_j \geq 0,\, j = \overline{1, l} \\ \sum_{j=1}^{l} \alpha_j = 1}} \frac{\sum_{j=1}^{l} \alpha_j p_j(A_j u - x_j)}{\sum_{j=1}^{l} \alpha_j g_j(B_j u - y_j)} \geq$$

$$\geq \frac{\sum_{j=1}^{l} \lambda_j(\varphi_j(A_j u - x_j) - p_j^*(\varphi_j)) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i(\delta_i(C_i u - z_i) - h_i^*(\delta_i))}{\sum_{j=1}^{l} \lambda_j(\gamma_j(B_j u - y_j) - g_j^*(\gamma_j))}. \tag{10}$$

Якщо, крім того,

$$\sum_{j=1}^{l} \lambda_j p_j(A_j u - x_j) \geq 0,$$

або ж функції g_j, $j = \overline{1, l}$, афінні, то маємо

$$\frac{\sum_{j=1}^{l} \lambda_j p_j(A_j u - x_j)}{\sum_{j=1}^{l} \lambda_j g_j(B_j u - y_j)} \geq$$

$$\geq \frac{\sum_{j=1}^{l} \lambda_j(\varphi_j(A_j u - x_j) - p_j^*(\varphi_j)) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i(\delta_i(C_i u - z_i) - h_i^*(\delta_i))}{\sum_{j=1}^{l} \lambda_j(\gamma_j(B_j u - y_j) - g_j^*(\gamma_j))}. \tag{11}$$

Використовуючи (3) і (10), одержуємо

$$\alpha^* \geq \inf_{u\in U} \frac{\sum_{j=1}^{l} \lambda_j(\varphi_j(A_j u - x_j) - p_j^*(\varphi_j)) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i(\delta_i(C_i u - z_i) - h_i^*(\delta_i))}{\sum_{j=1}^{l} \lambda_j(\gamma_j(B_j u - y_j) - g_j^*(\gamma_j))}. \tag{12}$$

Із співвідношення (12) випливає справедливість рівності (4) у випадку, коли $\alpha^* = -\infty$.

Нехай

$$\alpha^* > -\infty, \quad h(u) = \max_{1\leq j\leq l} (p_j(A_j u - x_j) - \alpha^* g_j(B_j u - y_j)).$$

Враховуючи умови, при яких розглядається задача (1), встановлюємо, що

$$\beta^* = \inf_{u\in F} h(u) \geq 0.$$

У просторі R^{m+1} далі розглянемо множину M, елементами якої є ті і тільки ті вектори $(\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_m)$, для кожного з яких знайдеться така точка $u \in U$, що

$$h(u) - \beta^* < \pi_0, \quad h_1(C_1 u - z_1) \leq \pi_1, \ldots, \quad h_m(C_m u - z_m) \leq \pi_m.$$

Легко переконатися, що M — опукла множина, яка містить внутрішність невід'ємного ортанта і не містить точки 0. За теоремою віддільності [7, с. 174] множину M можна відділити від нуля ненульовим лінійним функціоналом, тобто існують не рівні одночасно нулю числа $\overline{\mu}_i$, $i = \overline{0, m}$, такі, що

$$\sum_{i=0}^{m} \overline{\mu}_i \pi_i \geq 0 \tag{13}$$

для всіх $\pi = (\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_m) \in M$.

Оскільки M містить внутрішність невід'ємного ортанта простору R^{m+1}, всі $\overline{\mu}_i$ невід'ємні. З (13) при $\pi_i = h_i(C_i u - z_i)$, $i = \overline{1, m}$, $\pi_0 > h(u) - \beta^*$, де $u \in U$, випливає

$$\overline{\mu}_0 \pi_0 + \sum_{i=1}^{m} \overline{\mu}_i h_i(C_i u - z_i) \geq 0.$$

Спрямовуючи в цій нерівності π_0 до $h(u) - \beta^*$, маємо, що для всіх $u \in U$

$$\overline{\mu}_0 h(u) + \sum_{i=1}^{m} \overline{\mu}_i h_i(C_i u - z_i) \geq \overline{\mu}_0 \beta^*. \tag{14}$$

Оскільки за умовою існує вектор $\overline{u} \in U$, для якого $h_i(C_i \overline{u} - z_i) < 0$, то $\overline{\mu}_0 > 0$. Поділивши обидві частини нерівності (14) на $\overline{\mu}_0$ і поклавши

$$\mu_i^* = \overline{\mu}_i (\overline{\mu}_0)^{-1}, \quad i = \overline{1, m},$$

одержимо, що для всіх $u \in U$

$$h(u) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i^* h_i(C_i u - z_i) \geq \beta^*.$$

Звідси випливає

$$\inf_{u \in U} \left(h(u) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i^* h_i(C_i u - z_i) \right) = \beta^*.$$

Зрозуміло, що при цьому також виконується рівність

$$\inf_{u \in Y} \left(h(u) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i^* h_i(C_i u - z_i) + \delta_{\overline{U}}(u) \right) = \beta^*,$$

де $\delta_{\overline{U}}$ — індикаторна функція замикання $\overline{U}$ множини U.

Згідно з [3, с. 344]

$$-\beta^* = \inf_{f \in Y^*} (e^*(f) + \delta_{\overline{U}}^*(-f)), \tag{15}$$

де $e^*(f)$ — функція, спряжена з функцією

$$e(u) = h(u) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i^* h_i(C_i u - z_i),$$

і, крім того, множина розв'язків задачі (15) не порожня. Нехай f^* — розв'язок задачі (15). Згідно з теоремами 1–3 з [7, с. 188–190] та твердженням 4 з [7, с. 186] існують функціонали φ_j^*, γ_j^*, $j = \overline{1, l}$, δ_i^*, $i = \overline{1, m}$, з X^* та числа λ_j^*, $j = \overline{1, l}$, μ_i^*, $i = \overline{1, m}$, такі, що

$$\varphi_j^* \in \operatorname{dom} p_j^*, \quad \gamma_j^* \in \operatorname{dom} g_j^*, \quad j = \overline{1, l},$$

$$\delta_i^* \in \operatorname{dom} h_i^*, \quad i = \overline{1, m}, \quad \lambda_j^* \geq 0, \quad j = \overline{1, l},$$

$$\sum_{j=1}^{l} \lambda_j^* = 1, \quad \mu_i^* \geq 0, \quad i = \overline{1, m},$$

$$e^*(f^*) = \sum_{j=1}^{l} \lambda_j^* (\varphi_j^*(x_j) + p_j^*(\varphi_j^*)) - \alpha^* \sum_{j=1}^{l} \lambda_j^* (\gamma_j^*(y_j) + g_j^*(\gamma_j^*)) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \mu_i^* (\delta_i^*(z_i) + h_i^*(\delta_i^*)),$$

$$f^* = \sum_{j=1}^{l} \lambda_j^* A_j^* \varphi_j^* - \alpha^* \sum_{j=1}^{l} \lambda_j^* B_j^* \gamma_j^* + \sum_{i=1}^{m} \mu_i^* C_i^* \delta_i^*,$$

де A_j^*, B_j^*, C_i^* — оператори, спряжені з операторами A_j, B_j, $j = \overline{1, l}$, C_i, $i = \overline{1, m}$, відповідно. Враховуючи рівність (15), одержуємо

$$0 \geq -\beta^* = \sum_{j=1}^{l} \lambda_j^* (\varphi_j^*(x_j) + p_j^*(\varphi_j^*)) - \alpha^* \sum_{j=1}^{l} \lambda_j^* (\gamma_j^*(y_j) + g_j^*(\gamma_j^*)) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \mu_i^* (\delta_i^*(z_i) + h_i^*(\delta_i^*)) - \inf_{u \in \overline{U}} \left(\sum_{j=1}^{l} \lambda_j^* (A_j^* \varphi_j^*)(u) - \right.$$

$$- \alpha^* \sum_{j=1}^{l} \lambda_j^*(B_j^*\gamma_j^*)(u) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i^*(C_i^*\delta_i^*)(u)\Bigg).$$

Звідси випливає, що для всіх $u \in U$

$$\sum_{j=1}^{l} \lambda_j^*(\varphi_j^*(A_j u - x_j) - p_j^*(\varphi_j^*)) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i^*(\delta_i^*(C_i u - z_i) - h_i^*(\delta_i^*)) \geq$$

$$\geq \alpha^* \sum_{j=1}^{l} \lambda_j^*(\gamma_j^*(B_j u - y_j) - g_j^*(\gamma_j^*)).$$

Тому

$$\inf_{u \in U} \frac{\sum_{j=1}^{l} \lambda_j^*(\varphi_j^*(A_j u - x_j) - p_j^*(\varphi_j^*)) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i^*(\delta_i^*(C_i u - z_i) - h_i^*(\delta_i^*))}{\sum_{j=1}^{l} \lambda_j^*(\gamma_j^*(B_j u - y_j) - g_j^*(\gamma_j^*))} \geq \alpha^*.$$

З останньої нерівності та нерівності (12) робимо висновок про справедливість рівності (4). Теорему доведено.

Накладаючи додаткові умови на функції p_j, g_j, $j = \overline{1, l}$, h_i, $i = \overline{1, m}$, та на множину U, із співвідношення двоїстості (4) одержуємо ряд часткових випадків, які самі по собі мають важливе значення в теорії найкращого наближення та математичному програмуванні. Наведемо деякі з них.

***Наслідок* 1.** *Якщо* U — *конус і*

$$S_2 = \Bigg\{ (\varphi; \gamma; \delta; \lambda; \mu) : (\varphi; \gamma; \delta; \lambda; \mu) \in S_1,$$

$$\inf_{\substack{u \in U, \\ \sum_{j=1}^{l} \lambda_j \gamma_j (B_j u) = 0}} \left(\sum_{j=1}^{l} \lambda_j \varphi_j (A_j u) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \delta_i (C_i u) \right) = 0 \Bigg\} \neq \varnothing,$$

то

$$\alpha^* = \max_{(\varphi;\gamma;\delta;\lambda;\mu) \in S_2} \min \Bigg\{ \frac{\sum_{j=1}^{l} \lambda_j(\varphi_j(-x_j) - p_j^*(\varphi_j)) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i(\delta_i(-z_i) - h_i^*(\delta_i))}{\sum_{j=1}^{l} \lambda_j(\gamma_j(-y_j) - g_j^*(\gamma_j))},$$

$$\inf_{\substack{u \in U, \\ \sum_{j=1}^{l} \lambda_j \gamma_j (B_j u) > 0}} \frac{\sum_{j=1}^{l} \lambda_j \varphi_j (A_j u) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \delta_i (C_i u)}{\sum_{j=1}^{l} \lambda_j \gamma_j (B_j u)} \Bigg\}.$$

Якщо $S_2 = \varnothing$, *то* $\alpha^* = -\infty$.

***Наслідок* 2.** *Справедлива рівність*

$$\alpha^* = \inf_{u \in F} \max_{1 \leq j \leq l} p_j(A_j u - x_j) = \max_{(\varphi;\delta;\lambda;\mu) \in S_3} \Bigg(\sum_{j=1}^{l} \lambda_j (\varphi_j(-x_j) - p_j^*(\varphi_j)) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \mu_i (\delta_i(-z_i) - h_i^*(\delta_i)) + \inf_{u \in U} \left(\sum_{j=1}^{l} \lambda_j \varphi_j (A_j u) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \delta_i (C_i u) \right) \Bigg),$$

де

$$S_3 = \Big\{ (\varphi; \delta; \lambda; \mu) : \varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_l), \; \delta = (\delta_1, \ldots, \delta_m),$$

$$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l), \; \mu = (\mu_1, \ldots, \mu_l), \; \varphi_j \in \operatorname{dom} p_j^*,$$

$$\lambda_j \geq 0, \; j = \overline{1, l}, \; \sum_{j=1}^{l} \lambda_j = 1, \; \delta_i \in \operatorname{dom} h_i^*, \; \mu_i \geq 0, \; i = \overline{1, m} \Big\}.$$

***Наслідок* 3.** *Має місце співвідношення двоїстості*

$$\alpha^* = \inf_{u \in F} \max_{1 \leq j \leq l} \| A_j u - x_j \| = \max_{(\varphi;\delta;\lambda;\mu) \in S_4} \left(\sum_{j=1}^{l} \lambda_j \varphi_j(-x_j) + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{m} \mu_i (\delta_i(-z_i) - h_i^*(\delta_i)) \right) + \inf_{u \in U} \left(\sum_{j=1}^{l} \lambda_j \varphi_j (A_j u) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \delta_i (C_i u) \right),$$

де

$$S_4 = \Big\{ (\varphi; \delta; \lambda; \mu) : \varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_l), \; \delta = (\delta_1, \ldots, \delta_m),$$

$$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l), \; \mu = (\mu_1, \ldots, \mu_m), \; \| \varphi_j \| \leq 1, \; j = \overline{1, l},$$

$$\delta_i \in \operatorname{dom} h_i^*, \; i = \overline{1, m}, \; \lambda_j \geq 0, \; j = \overline{1, l}, \; \sum_{j=1}^{l} \lambda_j = 1, \; \mu_i \geq 0, \; i = \overline{1, m} \Big\}.$$

Зауважимо, що коли $X = Y$, $x_j = y_j = 0$, $j = \overline{1, l}$, $z_i = 0$, $i = \overline{1, m}$, оператори A_j, B_j, $j = \overline{1, l}$, C_i, $i = \overline{1, m}$, є одиничними операторами, тоді задача (1) є задачею дробово-опукло-вгнутого програмування вигляду

$$\alpha^* = \inf \left\{ \max_{1 \leq j \leq l} \frac{p_j(u)}{g_j(u)} : \; h_i(u) \leq 0, \; i = \overline{1, m}, \; u \in U \right\}.$$

Для цієї задачі співвідношення двоїстості (4) набуває вигляду

$$\alpha^* = \max_{(\varphi;\gamma;\delta;\lambda;\mu) \in S_1} \inf_{u \in U} \frac{\sum_{j=1}^{l} \lambda_j (\varphi_j(u) - p_j^*(\varphi_j)) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i (\delta_i(u) - h_i^*(\delta_i))}{\sum_{j=1}^{l} \lambda_j (\gamma_j(u) - g_j^*(\gamma_j))}.$$

Теорема 2 та наслідки з неї дозволяють вказати критерії елемента найкращого наближення.

Теорема 3. *Для того щоб у множині F елемент u^* був елементом найкращого за функцією p наближення сукупності елементів x_j, y_j за допомогою лінійних неперервних операторів A_j, B_j, $j = \overline{1, l}$, необхідно і досить існування елементів φ_j^*, γ_j^*, δ_i^* простору X^* та чисел λ_j^*, μ_i^*, $j = \overline{1, l}$, $i = \overline{1, m}$, які мають такі властивості*:

1) $\varphi_j^* \in \operatorname{dom} p_j^*$, $\gamma_j^* \in \operatorname{dom} g_j^*$, $j = \overline{1, l}$, $\delta_i^* \in \operatorname{dom} h_i^*$, $i = \overline{1, m}$;

2) $$p_j(A_j u^* - x_j) = \varphi_j^*(A_j u^* - x_j) - p_j^*(\varphi_j^*),$$

$$g_j(B_j u^* - y_j) = \gamma_j^*(B_j u^* - y_j) - g_j^*(\gamma_j^*), \quad j = \overline{1, l},$$

$$h_i(C_i u^* - z_i) = \delta_i^*(C_i u^* - z_i) - h_i^*(\delta_i^*), \quad i = \overline{1, m};$$

3) $\mu_i^* \geq 0, \quad \mu_i^* h_i(C_i u^* - z_i) = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad \sum_{j=1}^{l} \lambda_j^* = 1, \quad \lambda_j^* \geq 0,$

$$\lambda_j^* \left(\frac{p_j(A_j u^* - x_j)}{g_j(B_j u^* - y_j)} - \max_{1 \leq j \leq l} \frac{p_j(A_j u^* - x_j)}{g_j(B_j u^* - y_j)} \right) = 0, \quad j = \overline{1, l};$$

4) $$\inf_{u \in U} \frac{\sum_{j=1}^{l} \lambda_j^* (\varphi_j^*(A_j u - x_j) - p_j^*(\varphi_j^*)) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i^* (\delta_i^*(C_i u - z_i) - h_i^*(\delta_i^*))}{\sum_{j=1}^{l} \lambda_j^* (\gamma_j^*(B_j u - y_j) - g_j^*(\gamma_j^*))} =$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^{l} \lambda_j^* (\varphi_j^*(A_j u^* - x_j) - p_j^*(\varphi_j^*)) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i^* (\delta_i^*(C_i u^* - z_i) - h_i^*(\delta_i^*))}{\sum_{j=1}^{l} \lambda_j^* (\gamma_j^*(B_j u^* - y_j) - g_j^*(\gamma_j^*))}.$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай $u^* \in F$ — елемент найкращого за функцією p наближення сукупності елементів x_j, y_j за допомогою лінійних неперервних операторів A_j, B_j, $j = \overline{1, l}$, і $(\varphi^*; \gamma^*; \delta^*; \lambda^*; \mu^*)$ — вектор множини S_1, на якому досягається максимум у правій частині рівності (4). Згідно з теоремами 1, 2 та нерівностями (8), (10), (11) одержуємо

$$\alpha^* = \max_{1 \leq j \leq l} \frac{p_j(A_j u^* - x_j)}{g_j(B_j u^* - y_j)} = \max_{\substack{\sum_{j=1}^{l} \lambda_j = 1, \\ \lambda_j \geq 0,\, j = \overline{1, l}}} \frac{\sum_{j=1}^{l} \lambda_j p_j(A_j u^* - x_j)}{\sum_{j=1}^{l} \lambda_j g_j(B_j u^* - y_j)} =$$

$$= \inf_{u \in U} \frac{\sum_{j=1}^{l} \lambda_j^* (\varphi_j^*(A_j u - x_j) - p_j^*(\varphi_j^*)) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i^* (\delta_i^*(C_i u - z_i) - h_i^*(\delta_i^*))}{\sum_{j=1}^{l} \lambda_j^* (\gamma_j^*(B_j u - y_j) - g_j^*(\gamma_j^*))} =$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^{l} \lambda_j^* (\varphi_j^*(A_j u^* - x_j) - p_j^*(\varphi_j^*)) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i^* (\delta_i^*(C_i u^* - z_i) - h_i^*(\delta_i^*))}{\sum_{j=1}^{l} \lambda_j^* (\gamma_j^*(B_j u^* - y_j) - g_j^*(\gamma_j^*))} =$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^{l} \lambda_j^* p_j(A_j u^* - x_j)}{\sum_{j=1}^{l} \lambda_j^* g_j(B_j u^* - y_j)} \tag{16}$$

і, крім того,

$$\lambda_j^* \left(\frac{p_j(A_j u^* - x_j)}{g_j(B_j u^* - y_j)} - \max_{1 \leq j \leq l} \frac{p_j(A_j u^* - x_j)}{g_j(B_j u^* - y_j)} \right) = 0, \quad j = \overline{1, l}.$$

Зрозуміло, що для індексів j та i, для яких $\lambda_j^* = 0$, $\mu_i^* = 0$, в наведених вище міркуваннях можна вважати, що

$$\varphi_j^* \in \partial p_j(A_j u^* - x_j), \qquad \gamma_j^* \in \partial g_j(B_j u^* - y_j), \qquad \delta_i^* \in \partial h_i(C_i u^* - z_i),$$

а при $\alpha^* = 0$ $\gamma_j^* \in \partial g_j(B_j u^* - y_j)$ для всіх $j = \overline{1, l}$. Для цих індексів і таким чином вибраних функціоналів φ_j^*, γ_j^*, δ_i^* умови 1, 2 теореми мають місце. Оскільки виконується рівність (16), із співвідношень (5)–(9) можна зробити висновок щодо виконання умов і для інших індексів.

З рівності (16) та нерівностей (8), (9) також випливає $\mu_i^* h_i(C_i u^* - z_i) = 0$, $i = \overline{1, m}$. Необхідність доведено.

Достатність. Нехай для елемента $u^* \in F$ існують функціонали φ_j^*, γ_j^*, $j = \overline{1, l}$, δ_i^*, $i = \overline{1, m}$, та числа λ_j^*, $j = \overline{1, l}$, μ_i^*, $i = \overline{1, m}$, які задовольняють умови 1–4 теореми. Тоді, врахувавши теорему 1 і нерівність (10), для будь-якого $u \in F$ одержимо

$$\max_{1 \le j \le l} \frac{p_j(A_j u - x_j)}{g_j(B_j u - y_j)} \ge$$

$$\ge \frac{\sum_{j=1}^{l} \lambda_j^*(\varphi_j^*(A_j u - x_j) - p_j^*(\varphi_j^*)) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i^*(\delta_i^*(C_i u - z_i) - h_i^*(\delta_i^*))}{\sum_{j=1}^{l} \lambda_j^*(\gamma_j^*(B_j u - y_j) - g_j^*(\gamma_j^*))} \ge$$

$$\ge \frac{\sum_{j=1}^{l} \lambda_j^*(\varphi_j^*(A_j u^* - x_j) - p_j^*(\varphi_j^*)) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i^*(\delta_i^*(C_i u^* - z_i) - h_i^*(\delta_i^*))}{\sum_{j=1}^{l} \lambda_j^*(\gamma_j^*(B_j u^* - y_j) - g_j^*(\gamma_j^*))} =$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^{l} \lambda_j^* p_j(A_j u^* - x_j)}{\sum_{j=1}^{l} \lambda_j^* g_j(B_j u^* - y_j)} = \max_{1 \le j \le l} \frac{p_j(A_j u^* - x_j)}{g_j(B_j u^* - y_j)}.$$

Звідси u^* — елемент найкращого наближення. Теорему доведено.

Теорема 4. *Для того щоб у множині F елемент u^* був елементом найкращого за функцією p наближення сукупності елементів x_j, y_j за допомогою лінійних неперервних операторів A_j, B_j, $j = \overline{1, l}$, необхідно і досить існування елементів φ_j^*, γ_j^*, δ_i^* простору X^* та чисел λ_j^*, $j = \overline{1, l}$, μ_i^*, $i = \overline{1, m}$, які мають такі властивості:*

1) $$\varphi_j^* \in \partial p_j(A_j u^* - x_j), \quad \gamma_j^* \in \partial g_j(B_j u^* - y_j), \quad j = \overline{1, l},$$
$$\delta_i^* \in \partial h_i(C_i u^* - z_i), \quad i = \overline{1, m};$$

2) $$\mu_i^* \ge 0, \quad \mu_i^* h_i(C_i u^* - z_i) = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad \sum_{j=1}^{l} \lambda_j^* = 1, \quad \lambda_j^* \ge 0,$$

$$\lambda_j^* \left(\frac{p_j(A_j u^* - x_j)}{g_j(B_j u^* - y_j)} - \alpha^* \right) = 0, \quad j = \overline{1, l},$$

де

$$\alpha^* = \max_{1 \le j \le l} \frac{p_j(A_j u^* - x_j)}{g_j(B_j u^* - y_j)};$$

3) $$\inf_{u \in U} \left(\sum_{j=1}^{l} \lambda_j^*(A_j^* \varphi_j^* - \alpha^* B_j^* \gamma_j^*) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i^* C_i^* \delta_i^* \right)(u) =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{l} \lambda_j^*(A_j^* \varphi_j^* - \alpha^* B_j^* \gamma_j^*) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i^* C_i^* \delta_i^* \right)(u^*).$$

Наслідок 4. *Для того щоб елемент $u^* \in F$ реалізував точну нижню межу в задачі знаходження*

$$\inf_{u \in F} \max_{1 \le j \le l} p_j(A_j u - x_j),$$

необхідно і досить існування елементів φ_j^*, $j = \overline{1, l}$, δ_i^*, $i = \overline{1, m}$, *простору* X^* *та чисел* λ_j^*, $j = \overline{1, l}$, μ_i^*, $i = \overline{1, m}$, *які задовольняють умови:*

1) $\varphi_j^* \in \partial p_j(A_j u^* - x_j)$, $j = \overline{1, l}$, $\delta_i^* \in \partial h_i(C_i u^* - z_i)$, $i = \overline{1, m}$;

2) $\mu_i^* \ge 0$, $\mu_i^* h_i(C_i u^* - z_i) = 0$, $i = \overline{1, m}$, $\sum_{j=1}^{l} \lambda_j^* = 1$, $\lambda_j^* \ge 0$,

$$\lambda_j^* \left(p_j(A_j u^* - x_j) - \max_{1 \le j \le l} p_j(A_j u^* - x_j) \right) = 0, \quad j = \overline{1, l};$$

3)
$$\inf_{u \in U} \left(\sum_{j=1}^{l} \lambda_j^* A_j^* \varphi_j^* + \sum_{i=1}^{m} \mu_i^* C_i^* \delta_i^* \right)(u) =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{l} \lambda_j^* A_j^* \varphi_j^* + \sum_{i=1}^{m} \mu_i^* C_i^* \delta_i^* \right)(u^*).$$

Наслідок 5. *Для того щоб елемент* $u^* \in F$ *реалізував точну нижню межу в задачі відшукання*

$$\inf_{u \in F} \max_{1 \le j \le l} \| A_j u - x_j \|,$$

необхідно і досить існування елементів φ_j^*, $j = \overline{1, l}$, δ_i^*, $i = \overline{1, m}$, *простору* X^* *та чисел* λ_j^*, $j = \overline{1, l}$, μ_i^*, $i = \overline{1, m}$, *таких, що:*

1) $\| \varphi_j^* \| \le 1$, $j = \overline{1, l}$, $\delta_i^* \in \operatorname{dom} h_i^*$, $i = \overline{1, m}$;

2) $\| A_j u^* - x_j \| = \varphi_j^* (A_j u^* - x_j)$, $j = \overline{1, l}$,

$$\delta_i^* \in \partial h_i(C_i u^* - z_i), \quad i = \overline{1, m};$$

3) $\mu_i^* \ge 0$, $\mu_i^* h_i(C_i u^* - z_i) = 0$, $i = \overline{1, m}$, $\sum_{j=1}^{l} \lambda_j^* = 1$, $\lambda_j^* \ge 0$,

$$\lambda_j^* \left(\| A_j u^* - x_j \| - \max_{1 \le j \le l} \| A_j u^* - x_j \| \right) = 0, \quad j = \overline{1, l};$$

4)
$$\inf_{u \in U} \left(\sum_{j=1}^{l} \lambda_j^* A_j^* \varphi_j^* + \sum_{i=1}^{m} \mu_i^* C_i^* \delta_i^* \right)(u) =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{l} \lambda_j^* A_j^* \varphi_j^* + \sum_{i=1}^{m} \mu_i^* C_i^* \delta_i^* \right)(u^*).$$

Зауваження. Покладемо $X = Y$, $l = 1$, $h_i(x) = -1$ для всіх $x \in X$, $i = \overline{1, m}$, та будемо вважати A_1 одиничним оператором. У цьому випадку $h_i(C_i u - z_i) = -1 < 0$ для всіх $u \in U$, $i = \overline{1, m}$, $\operatorname{dom} h_i^* = \{0\}$, $h_i^*(0) = 1$, $i = \overline{1, m}$, $F = U$. Тому з наслідку 3 випливає, що для будь-якого елемента $x \in X$

$$\inf_{u\in U}\|u-x\| = \inf_{u\in U}\|x-u\| = \max\left\{ \varphi(-x) + \sum_{i=1}^{m}\mu_i(-1) + \right.$$

$$\left. + \inf_{u\in U}\varphi(u) : \varphi\in X^*, \ \|\varphi\|\le 1, \ \mu_i\ge 0, \ i=\overline{1,m} \right\} =$$

$$= \max_{\substack{\varphi\in X^*,\\ \|\varphi\|\le 1}}\left(\varphi(-x) + \inf_{u\in U}\varphi(u)\right) +$$

$$+ \max_{\substack{\mu_i\ge 0,\\ i=\overline{1,m}}}\left(-\sum_{i=1}^{m}\mu_i\right) = \max_{\substack{f\in X^*,\\ \|f\|\le 1}}\left(f(x) - \sup_{u\in U}f(u)\right).$$

Одержане співвідношення двоїстості

$$\inf_{u\in U}\|x-u\| = \max_{\substack{f\in X^*,\\ \|f\|\le 1}}\left(f(x) - \sup_{u\in U}f(u)\right)$$

встановлене в [1] (теорема 2.3.1) за допомогою теореми віддільності.

З урахуванням сказаного вище з наслідку 5 легко одержати критерій елемента найкращого за нормою наближення для x в U (теорема 2.4.1 з [1]).

1. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
2. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближения. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 304 с.
3. *Лоран П.-Ж.* Аппроксимация и оптимизация. – М.: Мир, 1975. – 496 с.
4. *Коллатц Л., Крабс В.* Теория приближения. Чебышевские приближения и их приложения. – М.: Наука, 1978. – 235 с.
5. *Пшеничный Б. Н.* Необходимые условия экстремума. – М.: Наука, 1982. – 141 с.
6. *Гнатюк В. О., Мойко В. В., Гнатюк Ю. В.* Основні властивості задачі найкращого наближення по дробовій функції // Вісн. Київ. ун-ту. Фіз.-мат. науки. – 1991. – Вип. 2. – С. 26–31.
7. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач. – М.: Наука, 1974. – 479 с.

Одержано 14.11.95