УДС 517.946

И. В. Скрыпник
(Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

НОВЫЕ УСЛОВИЯ УСРЕДНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ДИРИХЛЕ В ПЕРФОРИРОВАННЫХ ОБЛАСТЯХ*

We study homogenization of Dirichlet problems for nonlinear elliptic second order equations in domains with a finely granulated boundary. We consider the class of equations which can have a degeneration with respect to gradient of solutions. The pointwise estimate of solutions of the model nonlinear boundary value problem is proved. We construct the averaging boundary value problem by new structural assumptions on perforated domain. In particular we have not made an assumption about smallness of diameters of cavities relative to distances between them.

Вивчається усереднення задач Діріхле для нелінійних еліптичних рівнянь другого порядку в областях з дрібнозернистою межею. Розглядається клас рівнянь, які допускають виродження відносно градієнтів розв'язків. Доведена поточкова оцінка розв'язків модельної нелінійної задачі. Побудована усереднена гранична задача при нових структурних умовах відносно перфорованої області. Зокрема, не припускається малість діаметрів порожнин відносно віддалей між ними.

Данная статья продолжает предыдущие работы автора [1–6], в которых рассматривалось усреднение нелинейных задач Дирихле в последовательности перфорированных областей. В настоящей работе рассмотрен случай более общих нелинейных эллиптических уравнений (допускается вырождение по градиентам решений) при новых структурных условиях на перфорированную область.

Пусть Ω — ограниченная область в R^n и при каждом натуральном числе s задано конечное семейство $\{F_i^{(s)}: i=1, \ldots, I(s)\}$ замкнутых непересекающихся множеств, содержащихся в Ω. В области $\Omega^{(s)}=\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{I(s)} F_i^{(s)}$ рассматривается нелинейная задача

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dx_j} a_j\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = a_0\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad x \in \Omega^{(s)}, \tag{1}$$

$$u(x) = f(x), \quad x \in \partial\Omega^{(s)}, \tag{2}$$

где $f(x)$ — известная определенная в Ω функция.

Основой рассмотрения усреднения задач (1), (2) в [3] являлись поточечные оценки решений модельных нелинейных задач, доказанных раньше для невырожденного случая, соответствующего условиям на коэффициенты уравнения (1) вида

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x, u, p) p_j \geq \nu_1 (1+|p|)^{m-2} |p|^2, \tag{3}$$

$$|a_j(x, u, p)| \leq \nu_2 (1+|p|)^{m-1} \tag{4}$$

при $|u| \leq M$. Отметим, что доказательство поточечных оценок и, следовательно, результаты работ [1–6] остаются в силе (и даже упрощаются), если заменить правые части неравенств (3), (4) соответственно на $\nu_1 |p|^m$, $\nu_2 |p|^{m-1}$. Вместе с тем доказательство поточечной оценки требует изменения при замене условия (3) неравенством

* Данная статья финансово поддержана Фондом фундаментальных исследований Государственного комитета Украины по вопросам науки и технологий, а также INTAS.

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x, u, p)p_j \geq \nu_1 |p|^m \tag{5}$$

и сохранении условия (4).

В данной работе при условиях (4), (5) доказывается поточечная оценка модельной нелинейной задачи и на ее основе строится усреднение последовательности задач (1), (2). При этом имеется возможность рассмотрения различных вариантов условий на множества $F_i^{(s)}$. Ограничимся, для конкретности, случаем множеств $F_i^{(s)}$ малого диаметра и условий на них в терминах емкости.

В статье изменено построение основного асимптотического разложения, что позволило ввести новые структурные условия на семейство $\{F_i^{(s)}: i = 1, \ldots, I(s)\}$. Условия выражаются в терминах емкости $F_i^{(s)}$ и расстояний между содержащими их шарами, и нет содержащейся в [3] малости диаметров множеств относительно соответствующих расстояний. Отметим, что из конструкции поправочного члена усредненного уравнения непосредственно следует принцип аддитивности: если семейство $\{F_i^{(s)}: i = 1, \ldots, I(s)\}$ представить произвольным образом как объединение двух подсемейств, то поправочный член, соответствующий всему семейству, равен сумме поправочных членов, соответствующих подсемействам.

Отметим работы [7, 8] для линейных уравнений, [9–14] для нелинейных уравнений, в которых задачи вида (1), (2) рассматривались в иных условиях. В частности, из конструкций усредненной задачи в [9–14] не следует отмеченный выше принцип аддитивности.

1. Формулировка условий и результатов. Будем предполагать, что функции $a_j(x, u, p)$, $j = 0, 1, \ldots, n$, определены при $x \in \overline{\Omega}$, $u \in R^1$, $p \in R^n$ и удовлетворяют следующим условиям:

A_1) функции $a_j(x, u, p)$ непрерывны по u, p при почти всех $x \in \Omega$, измеримы по x при любых u, p; $a_j(x, u, 0) = 0$ при $x \in \Omega$, $u \in R^1$, $i = 1, \ldots, n$;

A_2) существуют положительные числа ν_1, ν_2, ε такие, что при $1 < m < n$, $1 < m_1 < mn/(n-m)$, $0 < m_2 < m-1$ и всех значениях $x \in \overline{\Omega}$, $u \in R^1$, $p, q \in R^n$ выполнены неравенства

$$\begin{gathered}
\sum_{j=1}^{n} [a_j(x, u, p) - a_j(x, u, q)](p_j - q_j) \geq \nu_1 |p - q|^m, \\
a_0(x, u, p)u \geq -(\nu_1 - \varepsilon)|p|^m - \varphi(x)(1 + |u|), \\
\sum_{j=1}^{n} |a_j(x, u, p) - a_j(x, u, q)| \leq \nu_2 (1 + |u|^{m_1} + |p|^m + |q|^m)^{(m-1-m_2)/m} |p - q|^{m_2}, \\
|a_0(x, u, p)| \leq \nu_2 (|u|^{m_1} + |p|^m)^{(m_1-1)/m_1} + \varphi(x),
\end{gathered} \tag{6}$$

где $\varphi(x) \in L_{r_1}(\Omega)$ с $r_1 > n/m$.

Отметим, что функции $a_j(x, u, p)$ можно продолжить на $\{R^n \setminus \Omega\} \times R^1 \times R^n$ с сохранением условий A_1, A_2.

Теорема 1. *При выполнении условий A_1, A_2 и $f(x) \in W_m^1(\Omega)$ задача* (1), (2) *имеет, по крайней мере, одно решение $u_s(x) \in f(x) + \overset{\circ}{W}{}_m^1(\Omega)$. Существует постоянная R, не зависящая от s, такая, что при всех s выполняется оценка*

$$\|u_s(x)\|_{W_m^1(\Omega^{(s)})} \le R. \tag{7}$$

Утверждение теоремы доказывается простым применением теории монотонных операторов (см. [3], § 1, гл. 9). Далее через $u_s(x)$ обозначается одно из возможных решений задачи (1), (2), удовлетворяющее оценке (7). Продолжим $u_s(x)$ на Ω, полагая $u_s(x) = f(x)$ при $x \in \Omega \setminus \Omega^{(s)}$. Таким образом полученная функция $u_s(x)$ принадлежит $W_m^1(\Omega)$ и для нее справедлива оценка

$$\|u_s(x)\|_{W_m^1(\Omega)} \le R_1$$

с независящей от s постоянной R_1.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* A_1, A_2 *и* $f(x) \in W_m^1(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$. *Тогда существует независящая от* s *постоянная* M *такая, что при всех* s *справедлива оценка*

$$\operatorname*{vrai\,max}_{x\in\Omega} |u_s(x)| \le M. \tag{8}$$

Утверждение теоремы доказывается методом Мозера (см. [3], гл. 9).

Перейдем к формулировке условий на множества $F_i^{(s)}$. Обозначим через $d_i^{(s)}$ нижнюю грань радиусов шаров, содержащих $F_i^{(s)}$, и пусть $x_i^{(s)}$ — точка такая, что $F_i^{(s)} \subset \overline{B(x_i^{(s)}, d_i^{(s)})}$. Здесь и далее $B(x_0, \rho)$ — шар радиуса ρ с центром в x_0. Через $r_i^{(s)}$ обозначим расстояние от $B(x_i^{(s)}, d_i^{(s)})$ до множества $\bigcup_{j\ne i} B(x_j^{(s)}, d_j^{(s)}) \cup \partial\Omega$.

Для компактного множества $F \subset R^n$ определим m-емкость равенством

$$C_m(F) = \inf \int_{R^n} \left|\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}\right|^m dx,$$

где нижняя грань берется по всем функциям $\varphi(x) \in C_0^\infty(R^n)$, равным единице на F.

Относительно множеств $F_i^{(s)}$ будем полагать выполненными предположения:

B_1) справедливо равенство

$$\lim_{s\to\infty} (d_s + r_s) = 0,$$

где

$$d_s = \max\{d_1^{(s)}, \ldots, d_{I(s)}^{(s)}\}, \quad r_s = \max\{r_1^{(s)}, \ldots, r_{I(s)}^{(s)}\};$$

B_2) существуют положительная постоянная b_0, непрерывная неубывающая функция $b(t)$, $b(0) = 0$, стремящаяся к нулю при $s \to \infty$ числовая последовательность R_s и подмножества индексов J_s, I_s такие, что справедливы условия:

$$\{i = 1, \ldots, I(s)\} = J_s \cup I_s, \quad J_s \cap I_s = \varnothing;$$

$$\lim_{s\to\infty} \sum_{i\in J_s} C_m(F_i^{(s)}) = 0, \tag{9}$$

$$\sum_{i\in I_s(B(x_0,R))} C_m(F_i^{(s)}) \le b_0 R^n \text{ при } R \ge R_s, \tag{10}$$

$$C_m(F_i^{(s)}) \le b(r_s)[r_i^{(s)}]^{n-m}, \quad i \in I_s, \tag{11}$$

где x_0 — произвольная точка области Ω, $I_s(B(x_0,R)) = \{ i \in I_s : x_i^{(s)} \in \in B(x_0,R) \}$.

***Замечание* 1.** Условие B_2, в частности, выполняется, если справедливы неравенства

$$C_m(F_i^{(s)}) \le b_1[r_i^{(s)} + d_i^{(s)}]^n, \quad d_i^{(s)} \le b_2[r_i^{(s)}]^q$$

при $i = 1, \dots, I(s)$, $q > (n-m)/n$ с независящими от i, s положительными постоянными b_1, b_2.

Для формулировки дополнительного условия на $F_i^{(s)}$, обеспечивающего возможность построения граничной задачи для $u_0(x)$, нам понадобятся вспомогательные функции $v_i^{(s)}(x,k)$, определяемые как решения модельных задач. Пусть $\psi(x)$ — функция класса $C_0^\infty(B(0,1))$, равная единице в $B(0,1/2)$. Для $k \in R^1$ при $d_i^{(s)} < 1/2$ обозначим через $v_i^{(s)}(x,k)$ решение уравнения

$$\sum_{j=1}^n \frac{d}{dx_j} a_j\left(x, u_s(x), \frac{\partial v_i^{(s)}(x,k)}{\partial x}\right) = 0, \quad x \in D_i^{(s)} = B(x_i^{(s)},1) \setminus F_i^{(s)}, \tag{12}$$

удовлетворяющее условию

$$v_i^{(s)}(x,k) - k\psi(x - x_i^{(s)}) \in \overset{\circ}{W}{}_m^1(D_i^{(s)}). \tag{13}$$

Существование и однозначность определения функции $v_i^{(s)}(x,k)$ просто доказывается методом монотонных операторов. Продолжим функцию $v_i^{(s)}(x,k)$ на $R^n \setminus D_i^{(s)}$, полагая ее равной k на $F_i^{(s)}$ и нулю вне $B(x_i^{(s)},1)$.

Будем предполагать выполненным следующее условие:

C) существует непрерывная при $(x,k) \in \Omega \times R^1$ функция $c(x,k)$ такая, что для произвольного шара $B \subset \Omega$ выполнено равенство

$$\lim_{s\to\infty} \sum_{i \in I_s(B)} \sum_{j=1}^n \frac{1}{k} \int_{B_i^{(s)}} a_j\left(x, u_s(x), \frac{\partial v_i^{(s)}(x,k)}{\partial x}\right) \frac{\partial v_i^{(s)}(x,k)}{\partial x_j} dx = \int_B c(x,k)\,dx, \tag{14}$$

где $I_s(B)$ — множество номеров i, для которых $i \in I_s$, $x_i^{(s)} \in B$, $B_i^{(s)} = = B(x_i^{(s)}, d_i^{(s)} + r_i^{(s)}/2)$.

Основной результат данной статьи содержится в следующей теореме.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* A_1, A_2, B_1, B_2, C, $f(x) \in W_m^1(R^n) \cap \cap L_\infty(R^n)$ *и* $u_s(x)$ — *слабо сходящаяся к* $u_0(x)$ *последовательность решений задачи* (1), (2). *Тогда последовательность* $u_s(x)$ *сильно сходится в* $W_p^1(\Omega)$ *при любом* $p < m$ *и функция* $u_0(x)$ *является обобщенным решением задачи*

$$\sum_{j=1}^n \frac{d}{dx_j} a_j\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) - a_0\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) + c(x, f(x) - u(x)) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{15}$$

$$u(x) = f(x), \quad x \in \partial\Omega.$$

Доказательству теоремы посвящены три следующих пункта. В п. 3 доказываются пототечная и интегральные оценки решений модельной задачи. В п. 4

изучается поведение членов асимптотического разложения. Выводу усредненной граничной задачи (15), (16) посвящен п. 5.

Отметим некоторые свойства функции $c(x, k)$, важные при построении усредненных задач в математической физике, ограничившись для простоты случаем, когда коэффициенты $a_j(x, u, p)$, $j = 1, \ldots, n$, не зависят от u.

Принцип аддитивности. Предположим, что $a_j(x, u, p)$, $j = 1, \ldots, n$, не зависят от u, выполнены условия A_1, A_2, B_1, B_2 и при каждом s задано разбиение семейства множеств $F_i^{(s)}$ на два непересекающихся подсемейства

$$\{ F_i^{(s)} : i = 1, \ldots, I(s) \} = \{ F_i^{(s)} : i \in I^{(1)}(s) \} \cup \{ F_i^{(s)} : i \in I^{(2)}(s) \},$$

$I^{(1)}(s) \cap I^{(2)}(s) = \varnothing$. Предположим также, что для каждого из подсемейств $\{ F_i^{(s)} : i \in I^{(j)}(s) \}$, $j = 1, 2$, выполнено условие C соответственно с функцией $c^{(j)}(x, k)$. Тогда условие C выполнено для семейства $\{ F_i^{(s)} : i = 1, \ldots, I(s) \}$ с функцией $c(x, k)$, равной $c^{(1)}(x, k) + c^{(2)}(x, k)$.

Утверждение следует из равенства (14).

Замечание 2. Непосредственно из условия (14) следует независимость $c(x, k)$ от $\{ F_i^{(s)} : i \in J_s \}$. А значит, множества $\{ F_i^{(s)} : i \in J_s \}$, удовлетворяющие условию (9), не влияют на построение усредненной граничной задачи.

2. Оценки решений модельной задачи. Докажем оценки функции $v_i^{(s)}(x, k)$, определенной как решение задачи (12), (13). Для краткости, в этом пункте будем писать $v(x, k)$, D, F, x_0, d вместо $v_i^{(s)}(x, k)$, $D_i^{(s)}$, $F_i^{(s)}$, $x_i^{(s)}$, $d_i^{(s)}$. Через C_j, $j = 1, 2, \ldots$, обозначим постоянные, зависящие лишь от ν_1, ν_2, n, m, M.

Лемма 1. *Предположим, что функции $a_j(x, u, p)$ удовлетворяют условию A_1 и неравенствам* (4), (5), *функции $u_s(x)$ удовлетворяют оценке* (8). *Тогда существует постоянная K_1, зависящая лишь от ν_1, ν_2, n, m, M, такая, что справедлива оценка*

$$\int_D \left| \frac{\partial v(x, k)}{\partial x} \right|^m dx \le K_1 |k| (|k| + d)^{m-1} C_m(F). \tag{16}$$

Доказательство. Определим вспомогательную функцию $\omega(x)$ как решение граничной задачи

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left| \frac{\partial \omega}{\partial x} \right|^{m-2} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right) = 0, \quad x \in D' = B(x_0, 2d) \setminus F, \tag{17}$$

$$\omega(x) = \psi\left(\frac{|x - x_0|}{2d} \right), \quad x \in \partial D', \tag{18}$$

где $\psi(x)$ — та же функция, что и в (13).

Просто доказывается оценка

$$\int_{D'} \left| \frac{\partial \omega(x)}{\partial x} \right|^m dx \le C_1 C_m(F). \tag{19}$$

Продолжим функцию $\omega(x)$ вне D', полагая ее равной 1 при $x \in F$ и нулю вне $B(x_0, 2d)$.

Введем срезывающие функции $\omega_1(x)$, $\omega_2(x)$ равенствами

$$\begin{gathered}\omega_1(x) = 2\max\{\omega(x) - 1/2, 0\},\\ \omega_2(x) = 4\min\{\max[\omega(x) - 1/4, 0], 1/4\}.\end{gathered} \tag{20}$$

Пусть Q_1 — носитель функции $\omega_1(x)$. При $x \in Q_1$ имеем $\omega_2(x) = 1$. Используя неравенство Пуанкаре и оценку (19), получаем

$$\begin{gathered}\operatorname{mes} Q_1 \le \int\limits_{D'} [\omega_2(x)]^m dx \le\\ \le C_2 d^m \int\limits_{D'} \left|\frac{\partial \omega_2(x)}{\partial x}\right|^m dx \le C_3 d^m C_m(F).\end{gathered} \tag{21}$$

Подставим в интегральное тождество

$$\sum_{j=1}^{n} \int\limits_{D} a_j\left(x, u_s(x), \frac{\partial v(x,k)}{\partial x}\right) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j} dx = 0, \quad \varphi(x) \in \overset{\circ}{W}{}^1_m(D), \tag{22}$$

соответствующее задаче (12), (13), пробную функцию $\varphi(x) = v(x,k) - k\omega_1(x)$. Используя неравенства (4), (5) и неравенство Юнга, получаем

$$\nu_1 \int\limits_{D} \left|\frac{\partial v(x,k)}{\partial x}\right|^m dx \le C_3 \int\limits_{D} \left\{|k|^m \left|\frac{\partial \omega_1(x)}{\partial x}\right|^m + |k|\left|\frac{\partial \omega_1(x)}{\partial x}\right|\right\} dx. \tag{23}$$

Оценим правую часть (23), применяя неравенства Гельдера и (19), (21). Имеем

$$\begin{gathered}\int\limits_{D} \left|\frac{\partial v(x,k)}{\partial x}\right|^m dx \le C_3 |k|^m \int\limits_{D} \left|\frac{\partial \omega_1(x)}{\partial x}\right|^m dx +\\ + C_4 |k| \{\operatorname{mes} Q_1\}^{(m-1)/m} \left\{\int\limits_{D} \left|\frac{\partial \omega_1(x)}{\partial x}\right|^m dx\right\}^{1/m} \le C_5 |k| (|k| + d)^{m-1} C_m(F),\end{gathered}$$

что и доказывает оценку (16).

При $0 < \mu < |k|$ обозначим

$$E(\mu) = \{x \in D : |v(x,k)| \le \mu\}. \tag{24}$$

Лемма 2. *Предположим, что выполнены условия леммы* 1. *Тогда существует постоянная* K_2, *зависящая лишь от* ν_1, ν_2, n, m, M, *такая, что справедлива оценка*

$$\int\limits_{E(\mu)} \left|\frac{\partial v(x,k)}{\partial x}\right|^m dx \le K_2 \mu (|k| + d)^{m-1} C_m(F). \tag{25}$$

Доказательство. Подставим в (22) пробную функцию $\varphi(x) = v_\mu(x,k) - \mu\omega_1(x)$, где

$$v_\mu(x,k) = \min\{|v(x,k)|, \mu\} \operatorname{sign} k.$$

Получаем

$$\int\limits_{E(\mu)} \left|\frac{\partial v(x,k)}{\partial x}\right|^m dx \le C_6 \mu \int\limits_{D} \left(1 + \left|\frac{\partial v(x,k)}{\partial x}\right|\right)^{m-1} \left|\frac{\partial \omega_1(x)}{\partial x}\right| dx.$$

Оценим последний интеграл, используя неравенство Гельдера и оценки (16), (21). В результате получаем неравенство (25).

Теорема 4. *Предположим, что выполняются условия леммы* 1. *Тогда существует постоянная* K, *зависящая от* ν_1, ν_2, n, m, M, *такая, что при* $0 < \rho \le \rho(x, F)$ *справедлива оценка*

$$|v(x,k)| \le K(|k| + d)\left\{\frac{C_m(F)}{\rho^{n-m}}\right\}^{1/(m-1)} + \rho \tag{26}$$

для произвольной точки $x \in D$. *Здесь* $\rho(x, F)$ — *расстояние от точки* x *до множества* F.

Доказательство. Пусть ξ — произвольная точка области D и $0 < \rho \le \le \rho(\xi, F)$. Определим числовую последовательность

$$\rho_j = \frac{\rho}{4}(3 - 2^{-j}), \quad j = 1, 2, \ldots,$$

и функции $\psi_j(x)$, равные единице на множестве $B_j = B(\xi, \rho_j)$, и нулю вне B_{j+1} такие, что

$$0 \le \psi_j(x) \le 1, \quad \left|\frac{\partial \psi_j(x)}{\partial x}\right| \le \frac{2^{j+4}}{\rho}.$$

Подставим в интегральное тождество (22) пробную функцию

$$\varphi(x) = |v(x,k)|^{\sigma+1}[\psi_j(x)]^{\tau+m}\operatorname{sign} k,$$

где σ, τ — произвольные положительные числа. Используя неравенства (4), (5) и неравенство Юнга, получаем

$$\int_D |v(x,k)|^{\sigma}\left|\frac{\partial v(x,k)}{\partial x}\right|^m [\psi_j(x)]^{\tau+m}\,dx \le$$

$$\le C_7(1+\tau)^m \int_D \left\{|v(x,k)|^{\sigma+m}\left(\frac{2^j}{\rho}\right)^m [\psi_j(x)]^{\tau} + |v(x,k)|^{\sigma+1}\frac{2^j}{\rho}[\psi_j(x)]^{\tau+m-1}\right\}dx. \tag{27}$$

Обозначим $m_j = \max\{|v(x,k)| : x \in \overline{B}_j\}$.

Если $m_{j+1} \le \rho$ при каком-нибудь значении j, то неравенство (26) справедливо в точке ξ. Поэтому дальше будет рассматриваться случай

$$m_{j+1} > \rho \quad \text{при} \quad j = 1, 2, \ldots. \tag{28}$$

В этом случае из (27) получаем

$$\int_D |v(x,k)|^{\sigma}\left|\frac{\partial v(x,k)}{\partial x}\right|^m [\psi_j(x)]^{\tau+m}\,dx \le$$

$$\le C_8(1+\tau)^m \frac{2^{jm}}{\rho^m} m_{j+1}^{m-1} \int_D |v(x,k)|^{\sigma+1}[\psi_j(x)]^{\tau+m-1}\,dx. \tag{29}$$

Далее применим следующую лемму, являющуюся частным случаем леммы 1.3 из ([3], гл. 8).

Лемма 3. *Пусть* $1 < m < n$, $\Omega \subset R^n$ — *содержащаяся в* $B(0, R)$ *область. Предположим, что для ограниченной функции* $u(x) \in W_m^1(\Omega)$ *при некоторой неотрицательной функции* $\varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ *и произвольных положительных числах* σ, τ *выполнено неравенство*

$$\int_{\Omega} |u(x)|^{\sigma} \left|\frac{\partial u(x)}{\partial x}\right|^{m} [\varphi(x)]^{\tau+m} dx \le$$

$$\le C'[\tau+\sigma+m]^{m} \int_{\Omega} |u(x)|^{\sigma+\delta} [\varphi(x)]^{\tau} dx \tag{30}$$

с $\delta \le m$ *и независящей от* σ, τ *постоянной* C'. *Тогда справедлива оценка*

$$\operatorname*{vrai\,max}_{x\in\Omega_1} |u(x)|^{m+n(m-1)/m} \le$$

$$\le C''\left\{C' + \operatorname*{vrai\,max}_{x\in\Omega_2} |u(x)|^{m-1} L^{m}\right\}^{n/m} \int_{\Omega} |u(x)|^{m} [\varphi(x)]^{m} dx \tag{31}$$

с постоянной C'', *зависящей лишь от* n, m, R. *Здесь* $\Omega_1 = \{x \in \Omega : \varphi(x) \ge \ge 1\}$, Ω_2 — *носитель функции* $\varphi(x)$,

$$L = \max_{x\in\Omega} \left|\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x}\right|.$$

Используя лемму 3 при $\delta = 1$, из неравенства (29) получаем оценку

$$m_j^{m+n(m-1)/m} \le C_9 \frac{2^{jn}}{\rho^n} m_{j+1}^{(m-1)n/m} \int_D |v(x,k)|^m [\psi_j(x)]^m dx. \tag{32}$$

Оценим последний интеграл, применяя неравенство Пуанкаре и лемму 2. Имеем

$$\int_D |v(x,k)|^m [\psi_j(x)]^m dx \le \int_{B_{j+1}} |v_{m_{j+1}}(x,k)|^m dx \le$$

$$\le C_{10}\rho^m \int_{E(m_{j+1})} \left|\frac{\partial v(x,k)}{\partial x}\right|^m dx \le C_{11}\rho^m m_{j+1}(|k|+d)^{m-1} C_m(F).$$

Отсюда и из (32) следует неравенство

$$m_j^{m+n(m-1)/m} \le C_{12} \frac{2^{nj}}{\rho^{n-m}} m_{j+1}^{(m-1)n/m+1} (|k|+d)^{m-1} C_m(F). \tag{33}$$

Последовательным применением последнего неравенства получаем (см. лемму 1.5 из ([3], гл. 8)

$$m_1 \le C_{13}(|k|+d)\left\{\frac{C_m(F)}{\rho^{n-m}}\right\}^{1/(m-1)}$$

что и завершает доказательство неравенства (26).

Лемма 4. *Предположим, что выполнены условия* A_1, A_2. *Существует постоянная* K_3, *зависящая лишь от* ν_1, ν_2, n, m, M, *такая, что при произвольных* $k', k'' \in R^1$ *выполнены оценки*

$$\int_D \left|\frac{\partial v(x,k')}{\partial x} - \frac{\partial v(x,k'')}{\partial x}\right|^m dx \le K_3(|k'|+|k''|+d)^{m-\alpha}|k'-k''|^{\alpha} C_m(F), \tag{34}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \int_D \left\{\frac{1}{k'} a_j\left(x, u_s(x), \frac{\partial v(x,k')}{\partial x}\right)\frac{\partial v(x,k')}{\partial x_j} - \right.$$

$$-\frac{1}{k''}a_j\left(x, u_s(x), \frac{\partial v(x,k'')}{\partial x}\right)\frac{\partial v(x,k'')}{\partial x_j}\Bigg\}dx \le$$

$$\le K_3(|k'|+|k''|+d)^{m-1-\beta}|k'-k''|^{\beta}C_m(F), \tag{35}$$

где $\alpha = m/(m-m_2)$, $\beta = m_2/(m-m_2)$.

Доказательство. Для доказательства оценки (34) подставим в интегральные тождества вида (22), соответствующие значениям k, равным k' и k'', пробную функцию

$$\varphi(x) = v(x,k') - v(x,k'') - (k'-k'')\omega_1(x),$$

где $\omega_1(x)$ — функция, определенная при доказательстве леммы 1. Вычитая из одного полученного таким образом равенства другое и оценивая с использованием неравенств (6), (16), (19), (21), получаем оценку (34). Для доказательства (35) подставим в (22) пробную функцию $\varphi(x) = v(x,k)/k - \omega_1(x)$ и в таким образом полученном равенстве придадим k значения k' и k''. Вычитая полученные равенства одно из другого и оценивая с использованием условий (6) и оценки (34), получаем неравенство (35).

Замечание 2. Определенная в условии C функция $c(x,k)$ удовлетворяет оценкам

$$\begin{gathered} 0 \le c(x,k)\operatorname{sign} k \le A|k|^{m-1}, \\ |c(x,k') - c(x,k'')| \le A(|k'|+|k''|)^{m-1-\beta}|k'-k''|^{\beta}, \end{gathered} \tag{36}$$

где A зависит только от ν_1, ν_2, n, m, M, b_0, диаметра Ω, $\beta = m_2/(m-m_2)$. Для получения первой оценки в (36) достаточно подставить в интегральное тождество (22) для $v_i^{(s)}(x,k)$ пробную функцию $\varphi(x) = v_i^{(s)}(x,k)/k - \omega_1(x)$. Устанавливая простые оценки с использованием леммы 1, неравенств (6), (19), (21) и суммируя полученные неравенства по i с использованием условия (11), в результате получаем первую оценку в (36). Вторая оценка в (36) следует из (35), условия B_2 и определения функции $c(x,k)$.

3. Асимптотическое разложение последовательности решений. Пусть $u_s(x)$ — фиксированная последовательность решений задачи (1), (2), удовлетворяющая оценкам (7), (8) и слабо сходящаяся в $W_m^1(\Omega)$ к функции $u_0(x)$. Продолжим $u_0(x)$ вне Ω, полагая $u_0(x) = f(x)$ при $x \in R^n \setminus \Omega$. В теореме 3 предполагалась принадлежность $f(x)$ пространству $W_m^1(R^n)$, а значит, для продолженной таким образом функции $u_s(x)$ имеем $u_s(x) \in W_m^1(R^n)$.

Пусть $K(\xi)$ — фиксированная бесконечно дифференцируемая на R^1 функция, равная нулю при $|\xi| \ge 1$ и удовлетворяющая условиям

$$0 \le K(\xi) \le 2\omega_n, \quad \int_{R^n} K(|x|)\,dx = 1, \tag{37}$$

где ω_n — мера шара $B(0,1) \subset R^n$.

Определим следующие усреднения функций $u_0(x)$, $f(x)$:

$$\begin{gathered} u_h^{(0)}(x) = \frac{1}{h^n}\int_{R^n} K\left(\frac{|x-y|}{h}\right)u_0(y)\,dy, \\ f_h(x) = \frac{1}{h^n}\int_{R^n} K\left(\frac{|x-y|}{h}\right)f(y)\,dy. \end{gathered} \tag{38}$$

Известно, что $u_h^{(0)}(x)$, $f_h(x)$ сильно сходятся при $h \to 0$ в $W_m^1(\Omega)$ соответственно к $u_0(x)$, $f(x)$. Непосредственным вычислением доказывается следующая лемма.

Лемма 5. *Существует постоянная K_4, зависящая лишь от m, n, такая, что при произвольной точке $x_0 \in R^n$ выполняется оценка*

$$\left| \frac{\partial u_h^{(0)}(x_0)}{\partial x} \right|^m \leq K_4 \frac{1}{h^n} \int\limits_{B(x_0,h)} \left| \frac{\partial u_0(x)}{\partial x} \right|^m dx. \tag{39}$$

Введем подмножества индексов J'_s, J''_s:

$$J'_s = \left\{ i \in J_s : C_m(F_i^{(s)}) > [r_i^{(s)}]^n \ln \frac{1}{r_s + d_s} \right\}, \tag{40}$$

$$J''_s = \left\{ i \in J_s : C_m(F_i^{(s)}) \leq [r_i^{(s)}]^n \ln \frac{1}{r_s + d_s} \right\} \tag{41}$$

и последовательность $\rho_i^{(s)}$:

$$\rho_i^{(s)} = \frac{r_i^{(s)}}{2} \quad \text{при} \quad i \in J'_s, \quad \rho_i^{(s)} = \left\{ \ln \frac{1}{r_s + d_s} \right\}^{-1} r_i^{(s)} \quad \text{при} \quad i \in J''_s,$$
$$\rho_i^{(s)} = \left\{ \ln \frac{1}{r_s + b(r_s)} \right\}^{-1} r_i^{(s)} \quad \text{при} \quad i \in I_s, \tag{42}$$

где множества J_s, I_s, числа r_s, d_s и функция $b(t)$ определены в условиях B_1, B_2. Определим средние значения функций $f_h(x)$, $u_h^{(0)}(x)$ относительно шара $B_{i,s} = B(x_i^{(s)}, d_i^{(s)} + \rho_i^{(s)})$ равенствами

$$f_{i,h}^{(s)} = \frac{1}{\operatorname{mes} B_{i,s}} \int\limits_{B_{i,s}} f_h(x)\,dx, \quad u_{i,h}^{(s)} = \frac{1}{\operatorname{mes} B_{i,s}} \int\limits_{B_{i,s}} u_h^{(0)}(x)\,dx. \tag{43}$$

Пусть также

$$\mu_i^{(s)} = 5 \left\{ K(2M + 1 + d_0) \left\{ \frac{C_m(F_i^{(s)})}{[\rho_i^{(s)}]^{n-m}} \right\}^{1/(m-1)} + d_i^{(s)} + \rho_i^{(s)} \right\}, \tag{44}$$

где K — постоянная из теоремы 4, d_0 — диаметр области Ω.

Отметим, что из условий B_1, B_2 и определения $\mu_i^{(s)}$, $\rho_i^{(s)}$ следуют равенства

$$\lim_{s \to \infty} \left\{ \max_{i \in I_s} \mu_i^{(s)} \right\} = 0, \quad \lim_{s \to \infty} \left\{ \max_{i \in J''_s} \mu_i^{(s)} \right\} = 0. \tag{45}$$

Далее последовательность $k_{i,h}^{(s)}$ определяется условиями

$$k_{i,h}^{(s)} = f_{i,h}^{(s)} - u_{i,h}^{(s)}, \text{ если } \mu_i^{(s)} > 1 \text{ или } |f_{i,h}^{(s)} - u_{i,h}^{(s)}| > 4[\mu_i^{(s)}]^{(2m-1)/2m},$$
$$k_{i,h}^{(s)} = 4[\mu_i^{(s)}]^{(2m-1)/2m}, \text{ если } \mu_i^{(s)} \leq 1, \quad |f_{i,h}^{(s)} - u_{i,h}^{(s)}| \leq 4[\mu_i^{(s)}]^{(2m-1)/2m} \tag{46}$$

Введем срезывающие функции $\varphi_{i,h}^{(s)}(x)$, $\overline{\varphi}_{i,h}^{(s)}(x)$ равенствами

$$
\begin{aligned}
\varphi_{i,h}^{(s)}(x) &= \frac{2}{\mu_i^{(s)}} \min\left\{\max\left[\left|v_i^{(s)}(x, k_{i,h}^{(s)})\right| - \frac{\mu_i^{(s)}}{2}, 0\right], \frac{\mu_i^{(s)}}{2}\right\}, \\
\overline{\varphi}_{i,h}^{(s)}(x) &= \frac{4}{\mu_i^{(s)}} \min\left\{\max\left[\left|v_i^{(s)}(x, k_{i,h}^{(s)})\right| - \frac{\mu_i^{(s)}}{4}, 0\right], \frac{\mu_i^{(s)}}{4}\right\},
\end{aligned} \tag{47}
$$

где $v_i^{(s)}(x, k_{i,h}^{(s)})$ — решение задачи (12), (13) при $k = k_{i,h}^{(s)}$.

Лемма 6. *Предположим, что выполнены условия* A_1, A_2, B_1, B_2. *Тогда существует* s_1 *такое, что*

$$
S(\varphi_{i,h}^{(s)}) \cap S(\varphi_{j,h}^{(s)}) = \varnothing, \quad S(\overline{\varphi}_{i,h}^{(s)}) \cap S(\overline{\varphi}_{j,h}^{(s)}) = \varnothing \tag{48}
$$

при $i \neq j$, $s \geq s_1$, $h > 0$. *Здесь* $S(\varphi)$ — *носитель функции* $\varphi(x)$.

Доказательство. Из оценки (26) и определения $\mu_i^{(s)}$ получаем, что носители функций $\varphi_{i,h}^{(s)}(x)$, $\overline{\varphi}_{i,h}^{(s)}(x)$ содержатся в $B(x_i^{(s)}, d_i^{(s)} + \rho_i^{(s)})$. Теперь равенства (49) следуют из (42) и определения $r_i^{(s)}$, как только $\ln 1/(r_s + d_s) \geq 2$, $\ln 1/(r_s + b(r_s)) \geq 2$.

Лемма 7. *Предположим, что выполнены условия* A_1, A_2, B_1, B_2. *Тогда существует независящая от* h *последовательность* $\tau_s^{(1)}$, *стремящаяся к нулю при* $s \to \infty$, *такая, что выполнено неравенство*

$$
\sum_{i \in I(s)} \operatorname{mes} S(\varphi_{i,h}^{(s)}) \leq \tau_s^{(1)}. \tag{49}
$$

Доказательство. Используя неравенство Пуанкаре и лемму 2, получаем

$$
\operatorname{mes} S(\varphi_{i,h}^{(s)}) \leq \int_{D_i^{(s)}} \left|\overline{\varphi}_{i,h}^{(s)}(x)\right|^m dx \leq
$$

$$
\leq C_{14}[\rho_i^{(s)} + d_i^{(s)}]^m \int_{D_i^{(s)}} \left|\frac{\partial \overline{\varphi}_{i,h}^{(s)}(x)}{\partial x}\right|^m dx \leq
$$

$$
\leq C_{15}\left[\frac{\rho_i^{(s)} + d_i^{(s)}}{\mu_i^{(s)}}\right]^m \int_{E(\mu_i^{(s)}/2,\, h)} \left|\frac{\partial v_i^{(s)}(x, k_{i,h}^{(s)})}{\partial x}\right|^m dx \leq C_{16}\mu_i^{(s)} C_m(F_i^{(s)}).
$$

Теперь неравенство (50) следует из (36), (37), (44), (45) и условий B_1, B_2. Здесь

$$
E(\mu_i^{(s)}/2, h) = \left\{x \in D_i^{(s)} : \left|v_i^{(s)}(x, k_{i,h}^{(s)})\right| \leq \mu_i^{(s)}/2\right\}.
$$

Определим основное в настоящей работе асимптотическое разложение

$$
u_s(x) = u_h^{(0)}(x) + r_{s,h}(x) + \sum_{j=1}^{3} r_{s,h}^{(j)}(x) + w_{s,h}(x), \tag{50}
$$

где

$$
r_{s,h}(x) = \sum_{i \in I_s} v_i^{(s)}(x, f_{i,h}^{(s)} - u_{i,h}^{(s)}) \varphi_{i,h}^{(s)}(x),
$$

$$
r_{s,h}^{(1)}(x) = \sum_{i \in J_s} v_i^{(s)}(x, f_{i,h}^{(s)} - u_{i,h}^{(s)}) \varphi_{i,h}^{(s)}(x),
$$

$$r_{s,h}^{(2)}(x) = \sum_{i=1}^{I(s)} [u_{i,h}^{(s)} - u_h^{(0)}(x)]\varphi_{i,h}^{(s)}(x),$$

$$r_{s,h}^{(3)}(x) = \sum_{i=1}^{I(s)} [f_h(x) - f_{i,h}^{(s)}]\varphi_{i,h}^{(s)}(x) + f(x) - f_h(x),$$

$w_{s,h}(x)$ — остаточный член разложения.

Далее будем считать, что $h \geq R_s + d_s + r_s$, где последовательности d_s, r_s, R_s определены в условиях B_1, B_2.

Лемма 8. *При выполнении условий* A_1, A_2, B_1, B_2 *справедливы равенства*

$$\lim_{h\to 0}\left\{\lim_{s\to\infty}\left\|r_{s,h}^{(2)}(x)\right\|_{W_m^1(\Omega)}\right\} = 0, \quad \lim_{h\to 0}\left\{\lim_{s\to\infty}\left\|r_{s,h}^{(3)}(x)\right\|_{W_m^1(\Omega)}\right\} = 0. \tag{51}$$

Доказательство. Ограничимся доказательством утверждения леммы для $r_{s,h}^{(2)}(x)$. Сходимость $r_{s,h}^{(2)}(x)$ к нулю в $L_m(\Omega)$ следует из (49). Оценим норму градиента $r_{s,h}^{(2)}(x)$ в $L_m(\Omega)$:

$$\left\|\frac{\partial r_{s,h}^{(2)}(x)}{\partial x}\right\|_{L_m(\Omega)}^m \leq \sum_{i=1}^{I(s)} \int_{B_{i,s}} \left|\frac{\partial u_h^{(0)}(x)}{\partial x}\right|^m [\varphi_{i,h}^{(s)}(x)]^m\, dx +$$

$$+ \sum_{i=1}^{I(s)} \int_{B_{i,s}} |u_{i,h}^{(s)} - u_h^{(0)}(x)|^m \left|\frac{\partial \varphi_{i,h}^{(s)}(x)}{\partial x}\right|^m dx. \tag{52}$$

Оба слагаемых правой части (52) стремятся к нулю, если сначала устремить s к ∞, а затем h к нулю. Для первого слагаемого это следует из сильной сходимости $u_h^{(0)}(x)$ в $W_m^1(\Omega)$ и (49).

Установим сейчас требуемую сходимость для второго слагаемого правой части (52). Применяя оценки (38), (25) и равенство (46), при $i \in J_s'$ имеем

$$\int_{B_{i,s}} |u_{i,h}^{(s)} - u_h^{(0)}(x)|^m \left|\frac{\partial \varphi_{i,h}^{(s)}(x)}{\partial x}\right|^m dx \leq C_{18}[d_i^{(s)} + \rho_i^{(s)}]^m \frac{1}{h^n} \int_{B(\xi_i^{(s)},h)} \left|\frac{\partial u_0(x)}{\partial x}\right|^m dx \times$$

$$\times [\mu_i^{(s)}]^{1-m} C_m(F_i^{(s)}) \leq C_{19}[\rho_i^{(s)}]^{n-m}[d_i^{(s)} + \rho_i^{(s)}]^m \frac{1}{h_n} \int_{B(\xi_i^{(s)},h)} \left|\frac{\partial u_0(x)}{\partial x}\right|^m dx, \tag{53}$$

где $\xi_i^{(s)}$ — некоторая точка из шара $B_{i,s}$.

Выберем множество A_h мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ с целыми координатами так, чтобы множество $\{z_\alpha^{(h)}: \alpha \in A_h\}$ состояло из всех точек $z_\alpha^{(h)} = 2\alpha h$, принадлежащих Ω. Определим кубы $K_h(\alpha)$, $K_h'(\alpha)$ равенствами

$$K_h(\alpha) = \{x \in R^n : |x_j - z_{\alpha,j}^{(h)}| \leq 3h,\ j = 1, \ldots, n\},$$

$$K_h'(\alpha) = \{x \in R^n : -h < x_j - z_{\alpha,j}^{(h)} \leq h,\ j = 1, \ldots, n\}.$$

Пусть $I_{s,h}(\alpha) = \{i : i = 1, \ldots, I_s : x_i^{(s)} \in K_h'(\alpha)\}$ при $\alpha \in A_h$. Замечая, что $B(\xi_i^{(s)}, h) \subset K_h(\alpha)$ при $i \in I_{s,h}(\alpha)$, из (53) имеем

$$\sum_{i \in J'_s} \int_{B_{i,s}} |u_{i,h}^{(s)} - u_h^{(0)}(x)|^m \left| \frac{\partial \varphi_{i,h}^{(s)}(x)}{\partial x} \right|^m dx \le$$

$$\le C_{19} \sum_{\alpha \in A_h} \left\{ \sum_{i \in J'_{s,h}(\alpha)} [\rho_i^{(s)}]^{n-m} [d_i^{(s)} + \rho_i^{(s)}]^m \right\} \frac{1}{h^n} \int_{K_h(\alpha)} \left| \frac{\partial u_0(x)}{\partial x} \right|^m dx, \qquad (54)$$

где $J'_{s,h}(\alpha) = J'_s \cap I_{s,h}(\alpha)$.

Оценим слагаемое в фигурных скобках в (54). Из (40), (42), (9) и неравенства Гельдера имеем

$$m_s^{(1)} = \sum_{i \in J'_s} [\rho_i^{(s)}]^{n-m} [d_i^{(s)} + \rho_i^{(s)}]^m \to 0 \quad \text{при} \quad s \to \infty. \qquad (55)$$

При заданном $\alpha \in A_h$ рассмотрим две возможности:

$$\sqrt{m_s^{(1)}} \operatorname{mes} K_h(\alpha) \le \sum_{i \in J'_{s,h}(\alpha)} [\rho_i^{(s)}]^{n-m} [d_i^{(s)} + \rho_i^{(s)}]^m, \qquad (56)$$

$$\sqrt{m_s^{(1)}} \operatorname{mes} K_h(\alpha) > \sum_{i \in J'_{s,h}(\alpha)} [\rho_i^{(s)}]^{n-m} [d_i^{(s)} + \rho_i^{(s)}]^m. \qquad (57)$$

Пусть $A_{s,h}^{(1)}$ — множество тех $\alpha \in A_h$, для которых выполнено первое неравенство, и $A_{s,h}^{(2)}$ — множество тех $\alpha \in A_h$, для которых выполнено второе неравенство. Из определений и (55) следует

$$\sum_{\alpha \in A_{s,h}^{(1)}} \operatorname{mes} K_h(\alpha) \le \frac{1}{\sqrt{m_s^{(1)}}} \sum_{\alpha \in A_{s,h}^{(1)}} \left\{ \sum_{i \in J'_{s,h}(\alpha)} [\rho_i^{(s)}]^{n-m} [d_i^{(s)} + \rho_i^{(s)}]^m \right\} \le$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{m_s^{(1)}}} \sum_{i \in J'_s} [\rho_i^{(s)}]^{n-m} [d_i^{(s)} + \rho_i^{(s)}]^m \le \sqrt{m_s^{(1)}}. \qquad (58)$$

Отметим также, что с некоторой постоянной N, зависящей только от n, выполнены неравенства

$$\sum_{i \in I_{s,h}(\alpha)} [d_i^{(s)} + \rho_i^{(s)}]^n \le N h^n, \quad \sum_{\alpha \in A_h} \chi(K_h(\alpha)) \le N, \qquad (59)$$

где $\chi(K_h(\alpha))$ — характеристическая функция множества $K_h(\alpha)$.

Используя неравенства (57), (59), получаем

$$\frac{1}{h^n} \int_{\alpha \in A_h} \left\{ \sum_{i \in J'_{s,h}(\alpha)} [\rho_i^{(s)}]^{n-m} [d_i^{(s)} + \rho_i^{(s)}]^m \right\} \int_{K_h(\alpha)} \left| \frac{\partial u_0(x)}{\partial x} \right|^m dx \le$$

$$\le C_{20} \sum_{\alpha \in A_{s,h}^{(1)}} \int_{K_h(\alpha)} \left| \frac{\partial u_0(x)}{\partial x} \right|^m dx + C_{20} \sqrt{m_s^{(1)}} \sum_{\alpha \in A_{s,h}^{(2)}} \int_{K_h(\alpha)} \left| \frac{\partial u_0(x)}{\partial x} \right|^m dx \le$$

$$\le C_{21} \int_{D_{s,h}^{(1)}} \left| \frac{\partial u_0(x)}{\partial x} \right|^m dx + C_{21} \sqrt{m_s^{(1)}} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_0(x)}{\partial x} \right|^m dx$$

и оба слагаемых правой части стремятся к нулю, если $s \to \infty$: первое — в силу (58), второе — в силу (55). Здесь

$$D_{s,h}^{(1)} = \bigcup_{\alpha \in A_{s,h}^{(1)}} K_h(\alpha).$$

Используя (38), (25), (44), при $i \in I_s'' = I_s \cup J_s''$ оценим иным образом интеграл в левой части (53). Получаем

$$\sum_{i \in I_s''} \int_{B_{i,s}} |u_{i,h}^{(s)} - u_h^{(0)}(x)|^m \left| \frac{\partial \varphi_{i,h}^{(s)}(x)}{\partial x} \right|^m dx \le$$

$$\le C_{22} \sum_{i \in I_s''} [d_i^{(s)} + \rho_i^{(s)}]^m \frac{1}{h^n} \int_{B(\xi_i^{(s)}, h)} \left| \frac{\partial u_0(x)}{\partial x} \right|^m dx \times$$

$$\times [\mu_i^{(s)}]^{1-m} C_m(F_i^{(s)}) \le C_{22} \sum_{i \in I_s''} \mu_i^{(s)} C_m(F_i^{(s)}) \frac{1}{h^n} \int_{B(\xi_i^{(s)}, h)} \left| \frac{\partial u_0(x)}{\partial x} \right|^m dx \le$$

$$\le C_{22} \sum_{\alpha \in A_h} \left\{ \sum_{i \in I_{s,h}''(\alpha)} \mu_i^{(s)} C_m(F_i^{(s)}) \right\} \frac{1}{h^n} \int_{K_h(\alpha)} \left| \frac{\partial u_0(x)}{\partial x} \right|^m dx, \tag{60}$$

где $I_{s,h}''(\alpha) = I_s'' \cap I_{s,h}(\alpha)$, A_h, $K_h(\alpha)$ имеют такой же смысл, как и в (54).

Замечая, что из (10), (40), (41), (44), (45) следует оценка

$$\sum_{i \in I_s''(\alpha)} \mu_i^{(s)} C_m(F_i^{(s)}) \le m_s^{(2)} h^n,$$

где $m_s^{(2)} \to 0$ при $s \to \infty$, и используя второе неравенство в (59), получаем, что правая часть (60) стремится к нулю при $s \to \infty$. Тем самым закончено доказательство утверждения леммы 8 для $r_{s,h}^{(2)}(x)$. Для $r_{s,h}^{(3)}(x)$ доказательство сильной сходимости градиентов аналогично.

Лемма 9. *Пусть выполнены условия A_1, A_2, B_1, B_2. Тогда последовательность $r_{s,h}^{(1)}(x)$ сильно сходится к нулю в $W_m^1(\Omega)$ при $s \to \infty$ равномерно относительно h.*

Доказательство. Сходимость $r_{s,h}^{(1)}(x)$ к нулю в $L_m(\Omega)$ следует из (49). При оценке градиента $r_{s,h}^{(1)}(x)$ будет использовано неравенство

$$\int_{D_i^{(s)}} \left| \frac{\partial}{\partial x} [v_i^{(s)}(x, f_{i,h}^{(s)} - u_{i,h}^{(s)}) \varphi_{i,h}^{(s)}(x)] \right|^m dx \le C_{23} C_m(F_i^{(s)}), \tag{61}$$

справедливое при $i = 1, \ldots, I(s)$. При получении этого неравенства в случае, когда $k_{i,h}^{(s)}$ определяется первым равенством в (46), использована оценка

$$\left| v_i^{(s)}(x, f_{i,h}^{(s)} - u_{i,h}^{(s)}) \right| \le \mu_i^{(s)}, \text{ если } \left| \frac{\partial \varphi_{i,h}^{(s)}(x)}{\partial x} \right| \ne 0, \tag{62}$$

следующая из определения $\varphi_{i,h}^{(s)}(x)$.

Из (61) следует

$$\left\| \frac{\partial r_{s,h}^{(1)}(x)}{\partial x} \right\|_{L_m(\Omega)}^m \le C_{23} \sum_{i \in J_s} C_m(F_i^{(s)}),$$

и правая часть последнего неравенства стремится к нулю при $s \to \infty$ в силу (9), что и завершает доказательство леммы.

Лемма 10. *При выполнении условий A_1, A_2, B_1, B_2 последовательность $r_{s,h}(x)$ стремится к нулю сильно в $W_p^1(\Omega)$ для любого $p \in (1, m)$ и слабо в $W_m^1(\Omega)$ при $s \to \infty$.*

Доказательство. Сходимость $r_{s,h}(x)$ к нулю в $L_m(\Omega)$ следует из (49). Из (61) получаем оценку

$$\left\| \frac{\partial r_{s,h}(x)}{\partial x} \right\|_{L_m(\Omega)}^m \leq C_{23} \sum_{i \in I_s} C_m(F_i^{(s)}), \tag{63}$$

из которой с учетом (10) следует ограниченность последовательности $r_{s,h}(x)$ в $W_m^1(\Omega)$. Сильная сходимость $r_{s,h}(x)$ в $W_p^1(\Omega)$ при $p < m$ следует из (63), (49) и неравенства Гельдера:

$$\left\| \frac{\partial r_{s,h}(x)}{\partial x} \right\|_{L_p(\Omega)} \leq \left\| \frac{\partial r_{s,h}(x)}{\partial x} \right\|_{L_m(\Omega)} \left\{ \sum_{i \in I_s} \operatorname{mes} S(\varphi_{i,h}^{(s)}) \right\}^{1/p - 1/m}.$$

Лемма доказана.

4. Поведение остаточного члена асимптотического разложения. Докажем следующую теорему.

Теорема 5. *Функции $w_{s,h}(x)$, определяемые равенством* (50), *принадлежат при каждом s пространству $\overset{\circ}{W}{}_1^m(\Omega^{(s)})$. При выполнении условий A_1, A_2, B_1, B_2 последовательность $w_{s,h}(x)$ сильно сходится к нулю в $W_m^1(\Omega)$, если вначале $s \to \infty$, а затем $h \to 0$.*

Доказательство. Первое утверждение теоремы непосредственно следует из равенства (50) и определения членов асимптотического разложения. Из лемм 8, 9, 10 и ограниченности последовательности $w_{s,h}(x)$ в $L_\infty(\Omega)$ следует слабая сходимость $w_{s,h}(x)$ к нулю в $W_m^1(\Omega)$ и сильная сходимость в $L_r(\Omega)$ при любом $r < \infty$.

Для доказательства второго утверждения теоремы запишем интегральное тождество для задачи (1), (2) при пробной функции $w_{s,h}(x)$. Имеем

$$\int_\Omega \sum_{j=1}^n a_j\left(x, u_s, \frac{\partial u_s}{\partial x}\right) \frac{\partial w_{s,h}(x)}{\partial x_j} dx + \int_\Omega a_0\left(x, u_s, \frac{\partial u_s}{\partial x}\right) w_{s,h}(x) dx = 0.$$

Отсюда, используя условие A_2, леммы 8, 9, 10 и отмеченную выше сходимость последовательности $w_{s,h}(x)$, получаем

$$\overline{\lim_{h \to 0}} \; \overline{\lim_{s \to \infty}} \int_\Omega \left| \frac{\partial w_{s,h}(x)}{\partial x} \right|^m dx \leq C_{24} \; \overline{\lim_{h \to 0}} \; \overline{\lim_{s \to \infty}} R_{1,h}^{(s)}, \tag{64}$$

где

$$R_{1,h}^{(s)} = \int_\Omega \sum_{j=1}^n a_j\left(x, u_s(x), \frac{\partial r_{s,h}(x)}{\partial x}\right) \frac{\partial w_{s,h}(x)}{\partial x_j} dx. \tag{65}$$

Более детально подобные рассуждения приведены в [3] при доказательстве теоремы 3.1 гл. 9.

Для преобразования $R_{1,h}^{(s)}$ введем функции $\chi_{i,h}^{(s)}(x)$ при $i \in I(s)$ с помощью равенства

$$\chi_{i,h}^{(s)}(x) = \frac{1}{\mu_i^{(s)}} \min\{\max[|v_i^{(s)}(x, k_{i,h}^{(s)})| - \mu_i^{(s)}, 0], \mu_i^{(s)}\}, \tag{66}$$

где использованы те же обозначения, что и в (47). Замечая, что на носителе $S(\chi_{i,h}^{(s)})$ функции $\chi_{i,h}^{(s)}(x)$ справедливо равенство $\varphi_{i,h}^{(s)}(x) = 1$, записываем $R_{1,h}^{(s)}$ в виде

$$R_{1,h}^{(s)} = \sum_{i\in I_s} \int_{D_i^{(s)}} \sum_{j=1}^{n} a_j\left(x, u_s, \frac{\partial v_{i,h}^{(s)}(x)}{\partial x}\right) \frac{\partial}{\partial x_j}\left[(w_{s,h}(x) - w_{i,h}^{(s)})\chi_{i,h}^{(s)}(x)\right]dx + R_{2,h}^{(s)}, \tag{67}$$

где

$$R_{2,h}^{(s)} = \sum_{i\in I_s} \int_{D_i^{(s)}} \sum_{j=1}^{n} a_j\left(x, u_s, \frac{\partial[v_{i,h}^{(s)}(x)\varphi_{i,h}^{(s)}(x)]}{\partial x}\right) \frac{\partial}{\partial x_j}\left[(w_{s,h}(x) - w_{i,h}^{(s)})(1 - \chi_{i,h}^{(s)}(x))\right]dx.$$

Здесь и далее для краткости будем писать $v_{i,h}^{(s)}(x)$ вместо $v_i^{(s)}(x, f_{i,h}^{(s)} - u_{i,h}^{(s)})$; $w_{i,h}^{(s)}$ — среднее значение функции $w_{s,h}(x)$ относительно шара $B(x_i^{(s)}, d_i^{(s)} + r_i^{(s)}/2)$.

Первый интеграл в правой части (67) равен нулю в силу интегрального тождества (22) для $v_i^{(s)}(x, f_{i,h}^{(s)} - u_{i,h}^{(s)})$. Оценим $R_{2,h}^{(s)}$, используя условие A_2 и обозначение

$$G_{i,h}^{(s)} = \{x \in D_i^{(s)} : \mu_i^{(s)}/2 \le |v_i^{(s)}(x, k_{i,h}^{(s)})| \le 2\mu_i^{(s)}\}.$$

Получаем

$$|R_{2,h}^{(s)}| \le C_{25} \sum_{i\in I_s} \left\{ \int_{G_i^{(s)}} \left| \frac{\partial}{\partial x}[v_{i,h}^{(s)}(x)\varphi_{i,h}^{(s)}(x)] \right|^m dx + \operatorname{mes} S(\varphi_{i,h}^{(s)}) \right\}^{(m-1)/m} \times$$

$$\times \left\{ \int_{G_i^{(s)}} \left| \frac{\partial}{\partial x}\left[(w_{s,h}(x) - w_{i,h}^{(s)})(1 - \chi_{i,h}^{(s)}(x))\right] \right|^m dx \right\}^{1/m}, \tag{68}$$

где $S(\varphi_{i,h}^{(s)})$ — носитель функции $\varphi_{i,h}^{(s)}(x)$.

Используя неравенства (25), (62), получаем оценки

$$\int_{G_{i,h}^{(s)}} \left| \frac{\partial}{\partial x}[v_{i,h}^{(s)}(x)\varphi_{i,h}^{(s)}(x)] \right|^m dx \le C_{26}[\mu_i^{(s)}]^{1/2} C_m(F_i^{(s)}),$$

$$\int_{G_{i,h}^{(s)}} \left| \frac{\partial}{\partial x}\left[(w_{s,h}(x) - w_{i,h}^{(s)})(1 - \chi_{i,h}^{(s)}(x))\right] \right|^m dx \le$$

$$\le C_{27} \left\{ \int_{G_{i,h}^{(s)}} \left| \frac{\partial w_{s,h}(x)}{\partial x} \right|^m dx + [\mu_i^{(s)}]^{-m} \int_{G_{i,h}^{(s)}} |w_{s,h}(x) - w_{i,h}^{(s)}|^m \left| \frac{\partial v_i^{(s)}(x, k_{i,h}^{(s)})}{\partial x} \right|^m dx \right\}. \tag{69}$$

Оценим второй интеграл правой части (69). Для этого введем функции $\psi_i^{(s)}(x)$, принадлежащие $C_0^\infty(B(x_i^{(s)}, 1))$, равные единице при $x \in B(x_i^{(s)}, d_i^{(s)} + r_i^{(s)}/4)$, нулю вне $B(x_i^{(s)}, d_i^{(s)} + r_i^{(s)}/2)$ и удовлетворяющие оценке

$$\left| \frac{\partial \psi_i^{(s)}(x)}{\partial x} \right| \le 8[r_i^{(s)}]^{-1}.$$

Подставим в интегральное тождество (22) для функции $v_i^{(s)}(x, k_{i,h}^{(s)})$ пробную функцию

$$\varphi(x) = \max\left\{2\mu_i^{(s)} - \left|v_i^{(s)}(x, k_{i,h}^{(s)})\right|, 0\right\} | w_{s,h}(x) - w_{i,h}^{(s)} |^m [\psi_i^{(s)}(x)]^m.$$

Применяя условие A_2, получаем оценку

$$\int\limits_{E(2\mu_i^{(s)},\, h)} | w_{s,h}(x) - w_{i,h}^{(s)} |^m \left| \frac{\partial v_i^{(s)}(x, k_{i,h}^{(s)})}{\partial x} \right|^m [\psi_i^{(s)}(x)]^m \, dx \le$$

$$\le C_{28} \mu_i^{(s)} \int\limits_{E(2\mu_i^{(s)},\, h)} \left[1 + \left| \frac{\partial v_i^{(s)}(x, k_{i,h}^{(s)})}{\partial x} \right| \right]^{m-1} \left\{ | w_{s,h}(x) - w_{i,h}^{(s)} |^{m-1} \times \right.$$

$$\left. \times \left| \frac{\partial w_{s,h}(x)}{\partial x} \right| [\psi_i^{(s)}(x)]^m + | w_{s,h}(x) - w_{i,h}^{(s)} |^m [\psi_i^{(s)}(x)]^{m-1} [r_i^{(s)}]^{-1} \right\} dx,$$

откуда в силу неравенства Юнга следует

$$\int\limits_{E(2\mu_i^{(s)},\, h)} | w_{s,h}(x) - w_{i,h}^{(s)} |^m \left| \frac{\partial v_i^{(s)}(x, k_{i,h}^{(s)})}{\partial x} \right|^m [\psi_i^{(s)}(x)]^m \, dx \le$$

$$\le C_{29} \int\limits_{B_i^{(s)}} \left\{ [\mu_i^{(s)}]^m \left| \frac{\partial w_{s,h}(x)}{\partial x} \right|^m + \left(\left[\frac{\mu_i^{(s)}}{r_i^{(s)}} \right]^m + 1 \right) | w_{s,h}(x) - w_{i,h}^{(s)} |^m \right\} dx,$$

где $B_i^{(s)} = B(x_i^{(s)}, d_i^{(s)} + r_i^{(s)}/2)$. Наконец, применяя неравенство Пуанкаре, имеем оценку

$$\int\limits_{G_i^{(s)}} | w_{s,h}(x) - w_{i,h}^{(s)} |^m \left| \frac{\partial v_i^{(s)}(x, k_{i,h}^{(s)})}{\partial x} \right|^m dx \le$$

$$\le C_{30}([\mu_i^{(s)}]^m + [r_i^{(s)}]^m) \int\limits_{B_i^{(s)}} \left| \frac{\partial w_{s,h}(x)}{\partial x} \right|^m dx. \tag{70}$$

Из (68), (69), (70) и неравенства Гельдера следует оценка

$$| R_{2,h}^{(s)} | \le C_{31} \left\{ \sum_{i \in I_s} [\mu_i^{(s)}]^{1/2} C_m(F_i^{(s)}) \left[1 + \left(\frac{r_i^{(s)}}{\mu_i^{(s)}} \right)^{m/(m-1)} \right] \right\}^{(m-1)/m} \times$$

$$\times \left\{ \int\limits_{\Omega} \left| \frac{\partial w_{s,h}(x)}{\partial x} \right|^m dx \right\}^{1/m}, \tag{71}$$

правая часть которой стремится к нулю в силу ограниченности последовательности $w_{s,h}(x)$ в $W_m^1(\Omega)$, неравенства (10) и выбора $\mu_i^{(s)}$. Утверждение теоремы 5 следует теперь из (64), (67), (71).

5. Построение усредненной граничной задачи. Здесь будет доказана теорема 3. Утверждение о сильной сходимости последовательности $u_s(x)$ к $u_0(x)$ в $W_p^1(\Omega)$ при $p < m$ является простым следствием асимптотического разложения (50), лемм 8, 9, 10 и теоремы 5. Докажем, что функция $u_0(x)$ является решением задачи (15), (16).

Пусть $g(x)$ — произвольная функция класса $C_0^\infty(\Omega)$ такая, что $\| g(x)\|_{C^1(\Omega)} \le 1$. Определим последовательность

$$g_{s,h}(x) = g(x) + \rho_{s,h}(x) + \rho_{s,h}^{(1)}(x) + \rho_{s,h}^{(2)}(x), \tag{72}$$

где

$$\begin{aligned} \rho_{s,h}(x) &= -\sum_{i\in I_s} \frac{1}{k_{i,h}^{(s)}} v_i^{(s)}(x, k_{i,h}^{(s)})\varphi_{i,h}^{(s)}(x) g_i^{(s)}, \\ \rho_{s,h}^{(1)}(x) &= -\sum_{i\in J_s} \frac{1}{k_{i,h}^{(s)}} v_i^{(s)}(x, k_{i,h}^{(s)})\varphi_{i,h}^{(s)}(x) g_i^{(s)}, \\ \rho_{s,h}^{(2)}(x) &= \sum_{i=1}^{I(s)} [g_i^{(s)} - g(x)]\varphi_{i,h}^{(s)}(x). \end{aligned} \tag{73}$$

Здесь $g_i^{(s)}$ — среднее значение функции $g(x)$ относительно шара $B_{i,s}$, определяемое аналогично (43), $k_{i,h}^{(s)}$, $\varphi_{i,h}^{(s)}(x)$ введены соответственно равенствами (46), (47).

Лемма 11. *Существуют постоянная K_4, зависящая лишь от ν_1, ν_2, n, m, M и последовательность $\tau_s^{(2)}$, стремящаяся к нулю при $s \to \infty$, такие, что справедливы неравенства*

$$\begin{aligned} &\|\rho_{s,h}(x)\|_{W_m^1(\Omega)} \le K_4, \quad \|\rho_{s,h}(x)\|_{W_p^1(\Omega)} \le K_4[\tau_s^{(2)}]^{m-p}, \\ &\|\rho_{s,h}^{(1)}(x)\|_{W_m^1(\Omega)} \le K_4\tau_s^{(2)}, \quad \|\rho_{s,h}^{(2)}(x)\|_{W_m^1(\Omega)} \le K_4\tau_s^{(2)} \end{aligned} \tag{74}$$

при $1 < p < m$.

Доказательство. Оценку для $\rho_{s,h}^{(2)}(x)$ можно доказать аналогично доказательству леммы 8, используя дифференцируемость функции $g(x)$. Оценки для $\rho_{s,h}^{(1)}(x)$, $\rho_{s,h}(x)$ доказываются так же, как и в леммах 9, 10.

Определяемая равенством (72) функция $g_{s,h}(x)$ принадлежит пространству $\overset{\circ}{W}{}_m^1(\Omega^{(s)})$, и ее можно подставить в интегральное тождество, соответствующее задаче (1), (2). Используя леммы 8–11 и отмеченную выше сильную сходимость $u_s(x)$ в $W_p^1(\Omega)$ при $p < m$, получаем равенство

$$\int_\Omega \left\{ \sum_{j=1}^n a_j\left(x, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x}\right)\frac{\partial g(x)}{\partial x_j} + a_0\left(x, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x}\right) g(x)\right\} dx =$$

$$= -\int_\Omega \sum_{j=1}^n a_j\left(x, u_s(x), \frac{\partial r_{s,h}(x)}{\partial x}\right)\frac{\partial \rho_{s,h}(x)}{\partial x_j} dx + \tau_{s,h}^{(3)}, \tag{75}$$

где

$$\lim_{h \to 0} \lim_{s \to \infty} \tau_{s,h}^{(3)} = 0.$$

Доказательство равенства (75) аналогично соответствующему доказательству из ([3], § 4, гл. 9), и поэтому его опускаем.

Представим первое слагаемое правой части (75) в виде

$$-\int_{\Omega} \sum_{j=1}^{n} a_j\left(x, u_s(x), \frac{\partial r_{s,h}(x)}{\partial x}\right) \frac{\partial \rho_{s,h}(x)}{\partial x_j} dx =$$

$$= R_{s,h}^{(3)} - \sum_{i \in I_s} \sum_{j=1}^{n} \frac{g_i^{(s)}}{k_{i,h}^{(s)}} \int_{B_i^{(s)}} a_j\left(x, u_s(x), \frac{\partial v_i^{(s)}(x, k_{i,h}^{(s)})}{\partial x}\right) \frac{\partial v_i^{(s)}(x, k_{i,h}^{(s)})}{\partial x_j} dx, \tag{76}$$

где

$$R_{s,h}^{(3)} = \sum_{i \in I_s} \sum_{j=1}^{n} \frac{g_i^{(s)}}{k_{i,h}^{(s)}} \int_{B_i^{(s)}} \left\{ a_j\left(x, u_s(x), \frac{\partial v_i^{(s)}(x, k_{i,h}^{(s)})}{\partial x}\right) \frac{\partial v_i^{(s)}(x, k_{i,h}^{(s)})}{\partial x_j} - \right.$$

$$\left. - a_j\left(x, u_s(x), \frac{\partial}{\partial x}[v_i^{(s)}(x, f_{i,h}^{(s)} - u_{i,h}^{(s)})\varphi_{i,h}^{(s)}(x)]\right) \frac{\partial}{\partial x_j}[v_i^{(s)}(x, k_{i,h}^{(s)})\varphi_{i,h}^{(s)}(x)] \right\} dx.$$

Докажем, что справедливо равномерное по h равенство

$$\lim_{s \to \infty} R_{s,h}^{(3)} = 0. \tag{77}$$

Предварительно учтем оценки

$$\int_{B_i^{(s)}} \left| \frac{\partial}{\partial x} \{ v_i^{(s)}(x, k_{i,h}^{(s)})[1 - \varphi_{i,h}^{(s)}(x)] \} \right|^m dx \le C_{32} \mu_i^{(s)} [k_{i,h}^{(s)}]^{m-1} C_m(F_i^{(s)}),$$

$$\int_{B_i^{(s)}} \left| \frac{\partial}{\partial x} \{ v_i^{(s)}(x, f_{i,h}^{(s)} - u_{i,h}^{(s)})[1 - \varphi_{i,h}^{(s)}(x)] \} \right|^m dx \le C_{32} [\mu_i^{(s)}]^{(2m-1)/2m} C_m(F_i^{(s)}), \tag{78}$$

следующие из лемм 1, 2, и определения $\mu_i^{(s)}$, $\varphi_{i,h}^{(s)}(x)$. Используя (61), (78) и леммы 1, 2, получаем

$$\left| R_{s,h}^{(3)} \right| \le C_{33} \sum_{i \in I_s} \{ \operatorname{mes} B_i^{(s)} + C_m(F_i^{(s)}) \}^{(m-1)/m} \{ \mu_i^{(s)} [k_{i,h}^{(s)}]^{-1} C_m(F_i^{(s)}) \}^{1/m} +$$

$$+ C_{33} \sum_{i \in I_s} \{ \operatorname{mes} B_i^{(s)} + C_m(F_i^{(s)}) \}^{(m-m_2)/m} \{ [\mu_i^{(s)}]^{(2m-1)/2m} C_m(F_i^{(s)}) \}^{m_2/m}.$$

Оба слагаемых правой части последнего неравенства стремятся к нулю в силу условия B_2, (45), (46). Тем самым установлено равенство (77).

Наконец, используя условие C, можно установить оценку

$$\left| \sum_{i \in I_s} \sum_{j=1}^{n} \frac{g_i^{(s)}}{k_{i,h}^{(s)}} \int_{B_i^{(s)}} a_j\left(x, u_s(x), \frac{\partial v_i^{(s)}(x, k_{i,h}^{(s)})}{\partial x}\right) \frac{\partial v_i^{(s)}(x, k_{i,h}^{(s)})}{\partial x_j} dx - \right.$$

$$\left. - \int_{\Omega} c(x, f_h(x) - u_h^{(0)}(x)) g(x) dx \right| \le \tau_{s,h}^{(4)}, \tag{79}$$

и для $\tau_{s,h}^{(4)}$ справедливо равенство

$$\lim_{h\to 0}\lim_{s\to\infty}\tau_{s,h}^{(4)} = 0.$$

Доказательство (79) проводится аналогично рассуждениям из ([3], § 4 гл. 9), и поэтому его опускаем.

Теперь, используя (76), (79), замечание 2, сходимость $f_h(x)$, $u_h^0(x)$ к $f(x)$, $u_0(x)$ и переходя к пределу в (75) вначале при $s\to\infty$, а затем при $h\to 0$, получаем равенство

$$\int_\Omega \left\{ \sum_{j=1}^n a_j\left(x, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x}\right)\frac{\partial g(x)}{\partial x_j} + a_0\left(x, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x}\right)g(x) - \right.$$

$$\left. - c(x, f(x)-u_0(x))g(x)\right\} dx = 0, \tag{80}$$

доказанное для $g(x)\in C_0^\infty(\Omega)$, $\|g(x)\|_{C^1(\overline{\Omega})}\le 1$. Непосредственно из определения пространства $\overset{\circ}{W}{}_m^1(\Omega)$ следует справедливость (80) для произвольной функции $g(x)\in \overset{\circ}{W}{}_m^1(\Omega)$, т. е. $u_0(x)$ — решение уравнения (15). Принадлежность $u_0(x)$ множеству $f(x)+\overset{\circ}{W}{}_m^1(\Omega)$ следует из того, что при каждом s этому множеству принадлежит $u_s(x)$. Теорема 3 доказана.

1. *Скрыпник И. В.* Квазилинейная задача Дирихле в областях с мелкозернистой границей // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1982. – № 2. – С. 21–25.
2. *Skrypnik I. V.* Nonlinear elliptic boundary value problems. – Leipzig: Teubner Verlag, 1986. – 232 p.
3. *Скрыпник И. В.* Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. – М.: Наука, 1990. – 442 с.
4. *Скрыпник И. В.* Усреднение нелинейных задач Дирихле в областях с каналами // Докл. АН СССР. – 1991. – **315**, № 4. – С. 793–797.
5. *Скрыпник И. В.* Асимптотическое поведение решений нелинейных эллиптических задач в перфорированных областях // Мат. сб. – 1993. – **184**, № 10. – С. 67–90.
6. *Skrypnik I. V.* Homogenization of nonlinear Dirichlet problems in perforated domains of general structure. – Trieste, 1994. – (Preprint SISSA). – 47 p.
7. *Dal Maso G., Garroni A.* A new approach to the study of limits of Dirichlet problems in perforated domains. – Trieste, 1993. – (Preprint SISSA). – 39 p.
8. *Марченко В. А., Хруслов Е. Я.* Граничные задачи в областях с мелкозернистой границей. – Киев: Наук. думка, 1974. – 279 с.
9. *Dal Maso G., Defranceschi A.* Limits of nonlinear Dirichlet problems in varying domains // Manuscripta Math. – 1988. – **61**. – P. 251–278.
10. *Dal Maso G., Murat F.* Dirichlet problems in perforated domains for homogeneous monotone operators in H_1^0. – Trieste, 1994. – (Preprint SISSA). – 38 p.
11. *Dal Maso G., Murat F.* Asymptotic behaviour and correctors for Dirichlet problems in perforated domains with homogeneous monotone operators. – Trieste, 1994. – (Preprint SISSA). – 49 p.
12. *Dal Maso G., Skrypnik I. V.* Asymptotic behaviour of nonlinear Dirichlet problems in perforated domains. – Trieste, 1994. – (Preprint SISSA). – 45 p.
13. *Ковалевский А. А.* О G-сходимости операторов задачи Дирихле в переменных областях // Докл. АН Украины. Сер. А. – 1993. – № 5. – С. 13–17.
14. *Панкратов Л. С.* О сходимости решений вариационных проблем в слабо связных областях. – Харьков, 1988. – 25 с. – (Препринт / АН УССР. Физ.-техн. ин-т низ. температур; 53.88).

Получено 10.04.95