УДК 519.41 / 47

М. Ф. Кузенний, М. М. Семко (НДІ педагогіки АПН України, Київ)

ПРО ГРУПИ, БЛИЗЬКІ ДО МЕТАЦИКЛІЧНИХ

Groups, which are by construction are similar to metacyclic, are studied. These groups are important for studying groups with normal subgroups.

Вивчаються групи, за будовою близькі до метациклічних, які мають важливе значення при дослідженні груп з нормальними підгрупами.

Клас метациклічних груп добре відомий (див., наприклад, [1–15]). Група G називається метациклічною, якщо вона розкладається в добуток двох циклічних підгруп, одна з яких нормальна. Будова метациклічних груп наведена в [7–9]. Багато авторів вивчали ті чи інші узагальнення метациклічних груп, які були одержані звуженням системи метациклічних підгруп (див., наприклад, [2–6, 11–15]). У багатьох дослідженнях, присвячених вивченню будови груп з тими чи іншими системами підгруп, з'являються нові типи груп, які за своєю будовою близькі до метациклічних і відіграють важливу роль в теорії груп (див., наприклад, [16, 17]).

Дана робота також присвячена групам, будова яких близька до метациклічних. Ці групи з'явилися при досить різних обмеженнях на системи їх підгруп (див., наприклад, теорему 1, лему 3 і наслідок 7). В теоремі 1 описані локально ступінчасті групи, що не породжуються своїми власними немаксимальними підгрупами. Лема 3 описує метациклічні 2-групи з трьома інволюціями, а наслідок 7 уточнює будову скінченних 2-груп з трьома інволюціями і центральним комутантом, одержану в [4]. Теореми 2 та 3 мають самостійне значення і суттєво використовуються при доведенні інших результатів роботи. Відмітимо, що вивчені групи мають важливе значення при опису груп з нормальними підгрупами.

Означення 1. *Підгрупа A групи G називається максимальною підгрупою G, якщо в G не існує такої підгрупи B, що $A < B < G$.*

Група G називається своєю 0-максимальною підгрупою.

Максимальна підгрупа групи G називається 1-максимальною підгрупою групи G.

При $n > 0$ підгрупа A групи G називається n-максимальною в G, коли вона є максимальною підгрупою деякої $(n-1)$-максимальної підгрупи A групи G.

Скінченні неодиничні групи завжди мають власні максимальні підгрупи, а одиничні групи та деякі нескінченні групи, наприклад квазіциклічні, не мають власних максимальних підгруп.

Лема 1. *Нехай G — довільна група. Тоді справедливі наступні твердження:*

1) *група G тоді і тільки тоді не містить власних немаксимальних підгруп, коли $G \in \{1, p\}$, p — просте число;*

2) *$G = \langle g \rangle$ тоді і тільки тоді не породжується своїми максимальними підгрупами, тобто всі її максимальні підгрупи породжують власну підгрупу M групи G, коли $|g| = p^\alpha$, p — просте число, $\alpha \geq 0$, при $\alpha = 0$ підгрупа M не існує, при $\alpha > 0$ $M = \Phi(\langle g \rangle)$ — єдина максимальна підгрупа з G;*

3) *$G = \langle g \rangle$ тоді і тільки тоді не породжується своїми власними немаксимальними підгрупами, тобто всі власні немаксимальні підгрупи з G породжують власну підгрупу M із G, коли $|g| = p^\alpha q^\beta$, p, q — різні прості числа, $\alpha > 0$, $\beta \in \{0, 1\}$, при $\alpha + \beta < 2$ підгрупа M не існує, при $\alpha + \beta = 2$ $M =$*

$= E$ — *2-максимальна підгрупа з* G, *при* $\alpha + \beta > 2$ *і* $\beta = 0$ $M = \Phi(\Phi(G)) = G^{p^2}$ — *2-максимальна підгрупа з* G, *при* $\alpha + \beta > 2$ *і* $\beta = 1$ M — *максимальна підгрупа з* G *порядку* $p^{\alpha-1}q$.

Доведення. *Необхідність.* Твердження 1 леми очевидне. Покажемо, що при умовах 2 і 3 леми $|G| < \infty$. Дійсно, нехай це не так. Тоді $G = \langle g \rangle$, $|g| = \infty$ і $G = \langle g^2 \rangle \langle g^3 \rangle = \langle g^4 \rangle \langle g^9 \rangle$, що неможливо, і тому $|g| < \infty$. При $|g| \in \{1, p\}$ справедливе твердження 1 леми. Тому будемо вважати, що $|g| \notin \{1, p\}$. Звідси $G = \langle x \rangle \times \langle y \rangle$, де $|x| = p^{\alpha}$, $\alpha > 0$, $\langle x \rangle$ — силовська p-підгрупа з G, p — просте число, $\langle y \rangle$ — її холлівське доповнення. Якщо $|y| = 1$, то твердження 2 та 3 леми справедливі. Нехай $|y| \neq 1$. Тоді в G існують принаймні 2 максимальні підгрупи $M_1 = \Phi(\langle x \rangle) \times \langle y \rangle$ і $M_2 = \langle x \rangle \times \langle y_1 \rangle$, де $\langle y_1 \rangle$ — власна максимальна підгрупа з $\langle y \rangle$. Зрозуміло, що $G = M_1 M_2$ і тому умова 2 леми не виконується. Якщо тепер $y \in \{1, q\}$ (q — просте число), то необхідність твердження 3 доведена.

Нехай $|y| \notin \{1, q\}$. Тоді $\langle y \rangle = \langle g_1 \rangle \times \langle g_2 \rangle$, $|g_1| = q^{\beta}$, q — просте число, $q \neq p$, $\beta > 0$ і $|\Phi(\langle g_1 \rangle) \langle g_2 \rangle| > 1$. Звідси $\langle x \rangle$, $\langle g_1 \rangle$ і $\langle g_2 \rangle$ — власні немаксимальні підгрупи з G, що породжують всю групу G. А це неможливо за умовою леми. Отже, $|g_2| = 1$, $|g_1| = q$ в умовах твердження 3 леми.

При $|g| = p^{\alpha}$ маємо, що $\alpha > 1$ і всі власні немаксимальні підгрупи з G породжують $\Phi(\Phi(G))$. При $|g_1| = q$ $\Phi(\langle x \rangle)$ та $\langle g_1 \rangle$ — власні немаксимальні підгрупи з G і тому вони породжують максимальну підгрупу $M = \Phi(\langle x \rangle) \times \langle g_1 \rangle$ із G. Звідси $|M| = p^{\alpha-1}g$. Необхідність доведена.

Достатність. Достатність для твердження 1 леми очевидна. Нехай G — група типу 2 леми. Тоді $\Phi(G)$ — єдина власна максимальна підгрупа з G. Звідси $M = \Phi(G)$ і достатність доведена. Нехай G — група типу 3 леми. В цьому випадку $G = \langle x \rangle \times \langle y \rangle$, $|x| = p^{\alpha}$, $\alpha > 0$, $|y| = q^{\beta}$, $\beta \in \{0, 1\}$. При $\alpha = 1$ $|G| = pq$ і всі власні немаксимальні підгрупи з G співпадають з одиничною підгрупою E. Тому $M = E$. Нехай тепер $\alpha > 1$. Тоді $\Phi(\langle x \rangle)$ та $\langle y \rangle$ — власні немаксимальні підгрупи з G, які породжують підгрупу $M = \Phi(\langle x \rangle) \times \langle y \rangle$, $[G : M] = p$. Звідси M — максимальна підгрупа з G. Достатність для груп типу 3 леми доведена. Лема доведена.

Наслідок 1. *Група* G *тоді і тільки тоді не містить власних немаксимальних підгруп, коли* $|G| \in \{1, p\}$, p — *просте число.*

Доведення випливає з леми 1.

Лема 2. *Нехай* G — *довільна група, що має власні немаксимальні підгрупи, які всі породжують власну підгрупу* M *групи* G. *Тоді* $M \triangle G$, *для будь-якого примарного елемента* x *із* $G \setminus M$ $\langle x \rangle$ — *максимальна підгрупа з* G, $G = \langle g, x \rangle$, *де* g — *будь-який елемент із* $G \setminus \langle x \rangle$, $|G| \notin \{1, r\}$, r — *просте число, і виконується тільки одне з тверджень*:

1) M — *2-максимальна підгрупа з* G *і* G *або циклічна група порядку* p^{α}, $\alpha > 1$, *або* $G = pq$, p, q — *необов'язково різні прості числа*;

2) $M = \Phi(\langle x \rangle)$, G — *періодична група*;

3) M — *максимальна підгрупа циклічної групи* G, $|G| = p^{\alpha}q$, p *і* q — *різні прості числа,* $\alpha > 1$, $|M| = p^{\alpha-1}q$;

4) *M — максимальна підгрупа нециклічної групи G, $G = M\langle x\rangle$, $M \bigcap \langle x\rangle = \Phi(\langle x\rangle)$, для будь-якого примарного елемента g з $G\setminus M$ $\langle g\rangle$ — максимальна підгрупа з G, $\pi(\langle x\rangle) = \pi(\langle g\rangle)$.*

Доведення. Нехай G і M задовольняють умови леми. Покажемо спочатку, що $M \Delta G$. При $|M| = 1$ це очевидно. Тому будемо вважати, що $|M| > 1$. Якщо $M = \langle a\rangle$, $|a| = r^{\gamma}$, r — просте число, $\gamma > 0$, то за твердженням 2 леми 1 всі власні підгрупи з M породжують $\Phi(M)$. Але M містить елемент c такий, що $c \notin \Phi(M)$ і $\langle c\rangle$ — власна немаксимальна підгрупа з G. Звідси $M = \langle c\rangle$ і тому для будь-якого z із G підгрупа $z^{-1}\langle c\rangle z$ — власна немаксимальна з G. Таким чином, $z^{-1} c z \in M$ і, значить, $M \Delta G$.

Нехай тепер M — нециклічна група. Тоді $M = \langle x_i\rangle$, i — елемент множини індексів I, $\langle x_i\rangle < M$. Звідси $\langle x_i\rangle$ — власна немаксимальна підгрупа з G і тому для будь-якого z із G $z^{-1} x_i z \in M$ і, значить, $M \Delta G$.

Нехай G — циклічна група. Якщо G — примарна група, то для G справедливе твердження 3 леми 1 і твердження 3 розглядуваної леми.

Нехай тепер G — нециклічна група і $x \in G\setminus M$. Тоді $G > \langle x\rangle$. Зрозуміло, що $x \notin M$ і тому $\langle x\rangle$ не породжується своїми власними підгрупами. За лемою 1 $\langle x\rangle$ — примарна максимальна підгрупа з G. Для будь-якого елемента g із $G/\langle x\rangle$ $\langle g, x\rangle$ не може бути власною підгрупою з G і, таким чином, $G = \langle g, x\rangle$. Якщо M — немаксимальна підгрупа з G, то $\Phi(\langle x\rangle) = M \bigcap \langle x\rangle$, $|M\langle x\rangle| = |M| r$, r — просте число. З умови $G > M\langle x\rangle$ і максимальності $\langle x\rangle$ в G випливає, що $M > \langle x\rangle$ і тому $M = \Phi(\langle x\rangle)$. Оскільки x — довільний елемент із $G\setminus M$, то G — періодична група і для G виконується твердження 2 леми. Якщо ж M — максимальна підгрупа з G, то для G виконується твердження 4 леми. Лема доведена.

Означення 2 [17]. *Група G називається локально ступінчастою, коли будь-яка її неодинична скінченно породжена підгрупа має власну підгрупу скінченного індексу.*

Наслідок 2. *Локально ступінчасті групи G з леми 2 є скінченними розв'язними групами.*

Доведення. Нехай G і M задовольняють умови леми 2. Якщо G — циклічна група, то твердження наслідку очевидне. Нехай G — нециклічна група. Тоді можна вважати, що для G справедливе твердження 2 чи 4 леми 2. Покажемо, що $|G| < \infty$. Дійсно, нехай $|G| = \infty$. Тоді за лемою 2 G містить такий елемент x, що $|x| = p^{\alpha}$, $\alpha > 0$, p — просте число, $\langle x\rangle$ — максимальна підгрупа з $G = \langle g, x\rangle$. Із означення 2 легко випливає, що G має нескінченний ланцюжок нормальних підгруп G_i, $G_i > G_{i+1}$. Зрозуміло, що знайдеться таке i, для якого $[G : G_i] > p^{\alpha}$. Звідси $G_i\langle x\rangle < G$, що суперечить максимальності підгрупи $\langle x\rangle$ в групі G. Таким чином, $|G| < \infty$ і G має циклічну максимальну підгрупу $\langle x\rangle$. За основною теоремою з [18] G — розв'язна група. Наслідок доведений.

Теорема 1. *Локально ступінчасті групи G, що не породжуються своїми власними немаксимальними підгрупами, вичерпуються групами порядку 1 та p (p — просте число) і скінченними розв'язними 2-породженими групами, у яких всі власні немаксимальні підгрупи породжують власну нормальну підгрупу M і G ізоморфна групі одного з таких типів*:

1) G — *циклічна група порядку* p^{α}, p — *просте число*, $\alpha > 0$, $M = \Phi(\Phi(G))$ — 2-*максимальна підгрупа з* G;

2) $G = pq$, p *і* q — *необов'язково різні прості числа*, $M = E$ — 2-*максимальна підгрупа з* G;

3) G — *група кватерніонів*, $M = \Phi(G)$ — 2-*максимальна підгрупа з* G;

4) G — *циклічна група порядку* $p^{\alpha}q$, p *і* q — *різні прості числа*, $\alpha > 1$, M — *максимальна підгрупа з* G, $|M| = p^{\alpha-1}q$;

5) $G = \langle x \rangle \leftthreetimes \langle z \rangle$, $|x| = p^{\alpha}$, $|z| = p$, $\alpha > 1$, $[x, z] \in \langle x^{p^{\alpha-1}} \rangle$, $[G : G'] > 4$, $M = \langle x^p \rangle \times \langle z \rangle$ — *максимальна підгрупа з* G;

6) $G = R \leftthreetimes \langle x \rangle$, $|R| = r^{\alpha} > 2$, $|x| = q^{\beta}$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta > 2$, r *і* q — *різні прості числа*, $\langle x \rangle$ — *максимальна підгрупа з* G, $M = R \leftthreetimes \langle x^q \rangle$ — *максимальна підгрупа з* G.

Доведення. *Необхідність.* Якщо $|G| \in \{1, p\}$ (p — просте число), то твердження теореми очевидне. Нехай $|G| \notin \{1, p\}$. За наслідком 1 G має власні немаксимальні підгрупи і задовольняє умову леми 2, за твердженням якої всі власні немаксимальні підгрупи з G породжують власну нормальну підгрупу M і вірне одне з чотирьох тверджень згаданої леми. За наслідком 2 G — скінченна розв'язна 2-породжена група. Якщо $|G| = pq$, де p і q — необов'язково різні прості числа, то $M = E$ — 2-максимальна підгрупа з G і, значить, G — група типу 1 чи 2 теореми.

Нехай G — циклічна група. Тоді за твердженням 3 леми 1 $|G| = p^{\alpha}q$ (p і q — різні прості числа, $\alpha > 1$), M — максимальна підгрупа з G, $|M| = p^{\alpha-1}q$ і G — група типу 4.

Нехай G — нециклічна група. Тоді для G справедливе твердження 2 чи 4 леми 2, за яким G містить елемент x такий, що $|x| = q^{\beta}$, $\beta > 0$, q — просте число, $\langle x \rangle$ — максимальна підгрупа з G. Розглянемо два можливі випадки: 1) G — нільпотентна група; 2) G — ненільпотентна група.

Випадок 1. У цьому випадку $G = Q \times D$, де Q — силовська q-підгрупа з G, D — її холлівське доповнення в G. Зрозуміло, що $Q \geq \langle x \rangle$. Оскільки підгрупа $\langle x \rangle$ максимальна в G, то $[G : \langle x \rangle]$ — просте число і тому $|D| \in \{1, r\}$, r — просте число. При $|D| = r$ і $Q = \langle x \rangle$ G — циклічна група, що суперечить вибору G. Звідси $|D| = 1$, $G' = Q$, $[G : \langle x \rangle] = q = r$ і, значить, G — примарна група, що має циклічну максимальну підгрупу $\langle x \rangle$. За теоремою 12.5.1 із [10] G або група типу 5 розглядуваної теореми, у якої $[G : G'] > 4$, або $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$, $|a| = 2^{\alpha}$, $|b| \in \{2, 4\}$, $\alpha > 1$, $G' \neq 1$. При $\alpha = 2$ G — неабелева група порядку 8, що не породжується своїми власними немаксимальними підгрупами, ізоморфна групі кватерніонов і тому G є групою типу 3 теореми, $M = \Phi(G)$ — 2-максимальна підгрупа з G.

Нехай $\alpha > 2$ і G не є групою типу 5 розглядуваної теореми. Тоді за теоремою 12.5.1 із [10] G має власні циклічні підгрупи порядку 2 та 4, які немаксимальні в G і породжують групу G, що неможливо. Випадок 1 розглянуто повністю.

Випадок 2. Розглянемо знову два можливих випадки: 2.1) $\langle x \rangle \Delta G$; 2.2) $\langle x \rangle \not\!\Delta\, G$.

Випадок 2.1. У цьому випадку $[G : \langle x \rangle] = r$, r — просте число, $r \neq q$. При $|x| = q$, $M = E$ і G — група типу 2. Нехай $|x| > q$. Тоді $G = \langle x \rangle \leftthreetimes \langle y \rangle$, $|y| =$

$= r$, $\langle y \rangle$ — ненормальна силовська r-підгрупа з G, $\langle y \rangle$ — немаксимальна підгрупа з G. Позначимо через N підгрупу з G, породжену всіма силовськими r-підгрупами з G. Тоді $N \Delta G$. Покажемо, що $G = N$. Дійсно, нехай $G \neq N$. Тоді за лемою Фраттіні (див., наприклад, [10]) $G = ND$, де $D = N_G(\langle y \rangle)$. Звідси $D = T \times \langle y \rangle$, де $T = D \bigcap \langle x \rangle$. Відомо, що $\langle x \rangle = TT_1$, де T_1 — силовська q-підгрупа з N. Але тоді $T = \langle x \rangle$ і G — нільпотентна група, що не так. Таким чином, $G = N$, а це суперечить умові теореми. Випадок 2.1 розглянуто.

Випадок 2.2. У цьому випадку $N_G(\langle x \rangle) = \langle x \rangle$ — максимальна підгрупа з G. Звідси $\langle x \rangle$ — силовська q-підгрупа з G, що належить центру свого нормалізатора. За теоремою 14.3.1 із [10] $G = R \leftthreetimes \langle x \rangle$, де R — холлівське доповнення $\langle x \rangle$ в G. Оскільки $\langle x \rangle$ — максимальна підгрупа з G, то R — мінімальна нормальна підгрупа з G. Відомо, що $|R| = r^{\alpha} > 2$, r — просте число. При $\alpha + \beta = 2$ група G є групою типу 2 теореми. Тому будемо вважати, що $\alpha + \beta > 2$. Ясно, що R — елементарна абелева група, всі власні циклічні підгрупи якої є власними немаксимальними підгрупами з G. Зрозуміло також, що підгрупа $\langle x^q \rangle$ немаксимальна в G і тому $x^q \in M$. Покажемо, що $M \geq R$. Дійсно, при $\beta > 1$ R — власна немаксимальна підгрупа з G і тому R належить M. При $\beta = 1$ $\alpha > 1$ і R породжується своїми власними циклічними підгрупами, які за попереднім зауваженням належать M. Звідси $M \geq R$. За умовою теореми $G > M$, $M = R \leftthreetimes \langle x^q \rangle$ — максимальна підгрупа з G, і, таким чином, G — група типу 6 теореми. Випадок 2.2 повністю розглянуто. Необхідність доведена.

Достатність. Зрозуміло, що в групах G порядку 1 чи r (r — просте число) взагалі немає власних немаксимальних підгруп і тому G не породжується такими підгрупами. Будемо вважати, що $|G| \notin \{1, r\}$ і, таким чином, G — група типу 1–6 розглядуваної теореми. За твердженням леми 1 група G типу 1 чи 4 не породжується своїми власними підгрупами і тому для груп цих типів достатність доведена.

В групі G типу 2 всі власні немаксимальні підгрупи співпадають з одиничною підгрупою E, а в групі G типу 3 — з $\Phi(G)$. Звідси достатність для цих типів груп доведена.

Нехай G — група типу 5 і M_1 — підгрупа з G, породжена всіма власними немаксимальними підгрупами з G. Зрозуміло, що $x^p \in M_1$, $z \in M_1$. Звідси $M_1 \geq \langle x^p \rangle \times \langle z \rangle = M$ — максимальна підгрупа з G. Покажемо, що $M_1 = M$. Нехай $M_1 \neq M$. Тоді існує власна немаксимальна підгрупа X із G така, що $MX = G$. Значить, X містить елемент y, а M — елемент a такий, що $x = ay$. Ясно, що $a = x^{ip}z^{j}$. Звідси $x = x^{ip}z^{j}y$ і тому $x^{-ip}x = z^{j}y$. Зрозуміло, що $|x^{-ip}x| = |x| = p^{\alpha}$, $\alpha > 1$. Оскільки $|z^{j}| \in \{1, p\}$, то з умови $[G : G'] > 4$ маємо $|y| = |x|$. Але тоді $\langle y \rangle$ — максимальна підгрупа з G, що суперечить вибору X. Це означає, що $M_1 = M$ і достатність для груп типу 5 доведена.

Нехай G — група типу 6. Оскільки $\alpha + \beta > 2$, то всі власні підгрупи з R є власними немаксимальними підгрупами з G і $\langle x^q \rangle$ — теж власна немаксимальна підгрупа з G. Тому $N \geq M$ — максимальна підгрупа з G, породжена всіма власними немаксимальними підгрупами з G. Покажемо, що $N = M$. Справді, якщо це не так, то $N = G = M\langle y \rangle$, де y — q-елемент. Легко бачити, що $\langle x^q \rangle \langle y \rangle$ — силовська q-підгрупа з G. Не порушуючи загальності можна вважати, що $\langle y \rangle$ — власна немаксимальна підгрупа з G. Будь-яка силовська q-підгрупа з G циклічна і тому $[x^q, y] = 1$, $|x^q y| = |x|$. Звідси $|y| > |x^q|$ і, значить, $|y| = |x|$. Таким чином, $\langle y \rangle$ — силовська q-підгрупа з G, яка максимальна в G, що не так, і тому $N = M$. Достатність для груп типу 6 доведена. Достатність повністю доведена. Теорема доведена.

Означення 3 [10]. *Група G, у якої всі підгрупи нормальні, називається дедекіндовою групою.*

Твердження 1 [10]. *Дедекіндові неабелеві групи G вичерпуються гамільтоновими групами, тобто групами типу $G = Q \times D \times A$, де Q — група кватерніонів, D — елементарна абелева 2-група, A — періодична абелева група без інволюцій.*

Для дедекіндових груп справедливі твердження:

1) якщо G містить елемент нескінченного порядку чи порядку 8, то $G' = 1$;

2) циклічні 2-підгрупи G порядку більше двох містять G'.

Теорема 2. *Нехай G — група, що містить нормальні підгрупи N_1 і N_2, для яких $N_1 \bigcap N_2 = 1$ і G/N_1 та G/N_2 — дедекіндові групи. Тоді G — дедекіндова група, коли в ній виконується хоча б одна з умов:*

1) N_1 — періодична група без інволюцій, N_2 — група без інволюцій, або група, що містить елемент порядку 8;

2) N_1 — неперіодична група без інволюцій або з елементами порядку 8, N_2 — група без інволюцій або група, що містить елемент порядку 8.

Доведення. Нехай G, N_1 і N_2 задовольняють умови теореми. Якщо $G' = 1$, то твердження теореми очевидне. Нехай $G' \neq 1$. Оскільки $N_1 \bigcap N_2 = 1$, то можливі випадки: 1) $N_1 \ngtr G'$; 2) $N_1 > G'$.

Випадок 1. У цьому випадку G/N_1 — неабелева група, а тому періодична гамільтонова група, яка за твердженням 1 не містить елементів порядку 8. Звідси за умовою теореми N_2 — періодична група, що не містить інволюцій. Зрозуміло, що $N_2 \bigcap G' = 1$. Звідси $N_2 \leq Z(G)$. Тепер G/N_2 — неабелева група, а значить, періодична нільпотентна гамільтонова група. Таким чином, маємо і G — періодична нільпотентна група. Нехай D — силовська 2-підгрупа з G. Тоді $D \bigcap N_2 = 1$, D — гамільтонова 2-група і $G = D \times A$, де A — періодична нільпотентна група без інволюцій. Оскільки G/N_1 і G/N_2 — гамільтонові групи, $N_1 \bigcap N_2 = 1$, то G' — 2-група. Звідси $A' = 1$. За твердженням 1 G — гамільтонова група. Лема у випадку 1 доведена.

Випадок 2. У цьому випадку G/N_2 — неабелева група, а тому вона гамільтонова нільпотентна періодична група, у якої $N_1 \times N_2/N_2$ — періодична абелева група без інволюцій. Звідси $N_1 \times N_2/N_2$ не може містити комутант групи G/N_2. Таким чином, $G' \nleq N_1$. Суперечність. Лема доведена.

Наслідок 3. *Якщо група G містить нормальні підгрупи N_1 і N_2 такі, що $N_1 \bigcap N_2 = 1$ і G/N_i — дедекіндова група, $i \in \{1, 2\}$, N_i — локально циклічна група з силовською 2-підгрупою D, для якої $|D| \notin \{2, 4\}$, то G — дедекіндова група.*

Наслідок випливає з теореми 2.

Теорема 3. *Нехай G — група, N — її нормальна підгрупа і G індукує на N групу внутрішніх автоморфізмів, тобто для будь-якого елемента g з G і всіх елементів x із N в N існує елемент a такий, що $g^{-1}xg = a^{-1}xa$. Тоді $G = NC_G(N)$. Зокрема, при $Z(N) = 1$ $G = N \times C_G(N)$.*

Доведення. Нехай G задовольняє умову теореми. Тоді для елемента g з G та будь-якого x із N маємо $g^{-1}xg = a^{-1}xa$, де $a \in N$. Звідси $ag^{-1}xga =$

$= x = u^{-1}xu$, де $u = ga^{-1}$, $u \in C_G(N)$, і тому $g = ua$ і g належить добутку $NC_G(N)$ і $G = NC_G(N)$. Зрозуміло, що $N \cap C_G(N) \le Z(N)$. Якщо $Z(N) = 1$, то $G = N \times C_G(N)$. Теорема доведена.

Наслідок 4. *Нехай G — група, N — така її 2-породжена нормальна підгрупа, що $G' \cap N = N' < Z(N)$. Тоді $G = NC_G(N)$.*

Доведення. Нехай G, $N = \langle a, b\rangle$ задовольняють умови леми. Тоді $G' \cap \cap N = \langle c \rangle \angle Z(N)$, $c = [a, b]$. Нехай g — елемент із G, тоді $g^{-1}ag = ac^i$, $g^{-1}bg = bc^j$. Звідси $g^{-1}cg = (g^{-1}ag)^{-1}(g^{-1}bg)^{-1}(g^{-1}ag)(g^{-1}bg) = a^{-1}c^{-i}b^{-i}c^{-j}ac^ibc^j = c$, а значить, $[c, g] = 1$.

Нехай $d = a^{-i}b^ja^{-j}b^i$. Оскільки $\langle c \rangle < Z(N\langle g \rangle)$, то за відомими комутаторними співвідношеннями (див., наприклад, [10]) $[d^{-1}g, a] = [dg, b]^{-1} = 1$. Значить, $d^{-1}g \in C_G(N)$, тому група G індукує на N групу внутрішніх автоморфізмів. За теоремою 3 $G = NC_G(N)$. Лема доведена.

Наслідок 5. *Нехай G — група з центральним циклічним комутантом G'. Тоді для будь-якої 2-породженої підгрупи N з умовою $G' = N'$ маємо $G = NC_G(N)$.*

Наслідок 6. *Нехай G — група з комутантом порядку p і N — будь-яка її 2-породжена неабелева p-підгрупа, то $G = NC_G(N)$.*

Означення 4 [16]. *Підгрупа $w(G)$ групи G, породжена всіма елементами з G, що мають порядком просте число, називається нижнім шаром групи G.*

Твердження 2 [16]. *Нижній шар групи G є характеристичною і тому нормальною підгрупою групи G.*

Твердження 3 (теорема Б з [4]). *В скінченній 2-групі G, клас нільпотентності якої не більше 2, кількість інволюцій тоді і тільки тоді рівна 3, коли G — група одного з наступних класів:*

1) *G — нециклічна метациклічна група, яка відмінна від групи кватерніонів і групи діедра порядку 8;*

2) *$G = A \leftthreetimes B$, де кожна з підгруп A і B або циклічна, або ізоморфна групі кватерніонів порядку 8, причому інволюція з B лежить в $Z(G)$;*

3) $G = \langle a, b, c\rangle$, $|a| = |b| = 4$, $c^2 = a^2$, $[a, c] = b^2$, $[b, c] = c^2$, $[a, b] = 1$;

4) $G = \langle a, b, c, d\rangle$, $|a| = |b| = 4$, $c^2 = b^2$, $d^2 = a^2b^2$, $[a, b] = [c, d] = 1$, $[a, c] = a^2$, $[a, b] = [a, d] = [b, c] = a^2b^2$, $[b, d] = b^2$.

Лема 3. *Метациклічна 2-група G тоді і тільки тоді має три інволюції, коли вона нециклічна і не має підгрупи кватерніонов та групи діедра порядку 8.*

Доведення. *Необхідність.* Нехай G — досліджувана група. Зрозуміло, що G — нециклічна група. В групі діедра порядку 8 п'ять інволюцій і тому G не містить групи діедра порядку 8. Припустимо, що G містить підгрупу кватерніонів Q. Зрозуміло, що $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$, $|a| = 2^\alpha$, $|b| = 2^\beta$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $b^{-1}ab = a^r$, r — ціле непарне число. Оскільки Q — неабелева група, то $G' \ne 1$ і $\alpha > 1$. Нехай $\langle x \rangle = \langle a \rangle \cap Q$. За теоремою про ізоморфізм груп $Q / \langle x \rangle$ — циклічна група. Звідси $|x| = 4$, $Q = \langle x, y\rangle$. Таким чином, існує підгрупа $A = \langle a \rangle Q = \langle a \rangle \langle y \rangle$, $|y| = 4$, $y^2 = x^2 = a^{2^{\alpha-1}}$. Зрозуміло, що $A = \langle a \rangle \langle z \rangle$, де $\langle z \rangle = A \cap \langle b \rangle$. $[A : \langle a \rangle] = 2$, $\langle a \rangle$ — максимальна підгрупа з A. За теоремою

12.5.1 із [10] G не може бути групою кватерніонів порядку 8, чи узагальненою групою кватерніонів. Звідси $|G| > 8$. Знову за теоремою 12.5.1 із [10] A — група кватерніонів порядку 8, або узагальнена група кватерніонів. Звідси $|w(A)| = 2$ і тому G містить v, $|v| = 2$, $\langle v\rangle \cap A = 1$. Значить, існує підгрупа $B = A \leftthreetimes \langle v\rangle$. Оскільки $B/\langle a\rangle$ — елементарна абелева група порядку 4 і $G/\langle a\rangle$ — циклічна, то маємо суперечність. Звідси G не містить групи кватерніонів порядку 8. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай $G = \langle a\rangle\langle b\rangle$ — нециклічна метациклічна 2-група, що не містить підгруп кватерніонів та групи діедра порядку 8. Тоді $|a| = 2^{\alpha}$, $|b| = 2^{\beta}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\langle a\rangle \vartriangle G$. Нехай $\langle a\rangle$ — максимальна циклічна підгрупа з G. Тоді G містить $A > \langle a\rangle$ і $[A:\langle a\rangle] = 2$. Значить, A — нециклічна група з максимальною циклічною підгрупою $\langle a\rangle$. За теоремою 12.5.1 із [10] $A = \langle a\rangle \leftthreetimes \langle y\rangle$, $|y| = 2$, $[A:A'] > 4$, $w(A) = w(\langle a\rangle) \times \langle y\rangle$, $|w(A)| = 4$. Покажемо, що $w(A) = w(G)$. Дійсно, нехай це не так. Тоді $G \setminus A$ містить v, $|v| = 2$, і G містить підгрупу $A \leftthreetimes \langle v\rangle$. Звідси маємо, що $B/\langle a\rangle$ — елементарна абелева група порядку 4, яка міститься в циклічній групі $G/\langle a\rangle$. Суперечність. Тому $w(A) = w(G)$ і, значить, в G три інволюції. Достатність доведена. Лема доведена.

Наслідок 7. *Всі скінченні 2-групи з трьома інволюціями і центральним комутантом вичерпуються групами таких типів:*

1) G — *нециклічна метациклічна 2-група, що не містить груп кватерніонів та групи діедра порядку* 8, $G' < Z(G)$;

2) $G = U \leftthreetimes X$, *де кожна з підгруп U та X є циклічною 2-групою, чи групою кватерніонів*, $|U| > 1$, $|X| > 1$, $w(X) \le Z(G)$, $[U, X] \le w(U)$;

3) $G = (\langle a\rangle \times \langle b\rangle)\langle x\rangle$, $|a| = |b| = 4$, $a^2 = x^2$, $[a, x] = a^2 b^2$, $[b, x] = b^2$;

4) $G = (\langle a\rangle \times \langle b\rangle)(\langle x\rangle \times \langle y\rangle)$, $|a| = |b| = 4$, $a^2 = x^2 = [a, y]$, $a^2 b^2 = [a, x] = [b, y]$, $b^2 = y^2 = [b, x]$.

Доведення. *Необхідність.* Нехай G — досліджувана група. Тоді вона задовольняє умови твердження 3, за якими G — група типу 1–4 згаданого твердження. Нехай G — група типу 1 твердження 3. За лемою 3 G не містить підгруп кватерніонів та групи діедра порядку 8 і тому G — група типу 1 наслідку. Нехай G — група типу 2 твердження 3. Тоді $G = U \leftthreetimes X$, де U, X — неодиничні циклічні 2-групи, чи групи кватерніонів. Оскільки $G' \le Z(G)$, то $w(X) \le Z(G)$. Підгрупа $X = \langle x, y\rangle$ — циклічна, чи група кватерніонів. Якщо $|X| = 2$, то $G = U \times X$ — група типу 2. Нехай $|X| > 2$. Якщо U та X одночасно циклічні, то G — група типу 1 наслідку. Нехай X — циклічна група. Звідси U — нециклічна група і, значить, група кватерніонів. Із умови $G' \le Z(G)$ випливає, що $[U, X] \le U \cap Z(G) = w(U)$ і, знову, G — група типу 2 наслідку.

Нехай тепер X — нециклічна група. При нециклічності U, як і раніше, $[U, X] \le w(U)$ і знову G — група типу 2 наслідку. Нехай $U = \langle u\rangle$ — циклічна група, $|u| = 2^{\Delta}$. При $\Delta = 1$ $G = U \times X$ і G — група типу 2. Нехай $\Delta > 1$. Тоді G містить підгрупи $\langle u\rangle \leftthreetimes \langle x\rangle$, $\langle u\rangle \leftthreetimes \langle y\rangle$ з центральним комутантом. Оскільки $w(X) = \langle x^2\rangle = \langle y^2\rangle \le Z(G)$, то $\langle x\rangle$ та $\langle y\rangle$ індукують на $\langle u\rangle$ автоморфізм порядку 2. За відомими комутаторними співвідношеннями [10]

$[u, x]^2 = [u, x^2] = 1$, $[u, y]^2 = [u, y^2] = 1$. Звідси $[\langle u \rangle, X] \leq w(\langle u \rangle)$ і знову G — група типу 2 наслідку.

І нарешті нехай G — група типу 3 чи 4 твердження 3. Можна вважати, що G — неметациклічна група. Легко показати, що в групах типу 3 згаданого твердження $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = 1$ і тому G — група типу 3 наслідку.

Аналогічно в групах G типу 4 твердження 3 $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = 1$ і $G = \langle a, b, c, d \rangle$. Покладемо $x = ad$, $y = bc$ і одержимо, що G — група типу 4 наслідку. Необхідність доведена.

Достатність. Зрозуміло, що G — скінченна нециклічна 2-група і $G' \leq Z(G)$. Покажемо, що G містить три інволюції. За лемою 3 в групах G типу 1 точно три інволюції. Групи G типів 2–4 наслідку є групами відповідно кожного з типів твердження 3. За цим твердженням в G точно три інволюції. Достатність доведена. Наслідок доведений.

1. *Huppert B.* Endliche gruppen I. – Berlin etc.: Springer -Verlag, 1967. – 793 p.
2. *Blackburn N.* Generalization of certain elementary theorems on p-groups // Proc. London Math. Soc. – 1961. – **11**, № 41. – P. 1–22.
3. *Blackburn N.* On a special class of p-groups // Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1957. – **53**. – P. 19–57.
4. *Устюжанинов А. Д.* Конечные 2-группы с тремя инволюциями // Сиб. мат. журн. – 1972. – **13**, № 1. – С. 182–197.
5. *Karsten J.* Uber 2-Gruppen, in denen jede abelsche Untergruppe von hochstens 2 Elementen erzeugt wirt // J. Algebra. – 1974. – **30**. – S. 31–36.
6. *Curcio M.* Classification on finite minimal non-metacyclic groups // Acta Soc. Math. – 1984. – **47**, № 3. – 4. – P. 289–295.
7. *Семко Н. Н., Кузенный Н. Ф.* Строение метациклических метагамильтоновых групп. – Киев: Киев. пед. ин-т, 1983. – 22 с.
8. *Кузенный Н. Ф., Семко Н. Н.* Строение разрешимых метагамильтоновых групп // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1985. – № 2. – С. 6–8.
9. *Семко Н. Н., Кузенный Н. Ф.* Строение метациклических метагамильтоновых групп // Современный анализ и его приложения. – Киев: Наук. думка, 1989. – С. 173–183.
10. *Холл М.* Теория групп. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 468 с.
11. *Левищенко С. С., Кузенный Н. Ф., Семко Н. Н.* Конструктивное описание конечных минимальных неметациклических групп. – Киев, 1986. – 41 с. – Деп. в УкрНИИНТИ, № 33-Ук 87.
12. *Семко Н. Н.* Строение локально метациклических групп // Строение групп и свойства их подгрупп. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1986. – С. 83–93.
13. *Левищенко С. С., Семко Н. Н.* Конструктивное описание конечных несверхразрешимых групп, у которых все 2-максимальные подгруппы метациклические // Исследования групп с ограничениями для подгрупп. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1988. – С. 42–51.
14. *Семко Н. Н., Левищенко С. С., Кузенный Н. Ф.* Конечные несверхразрешимые группы, у которых всякая 2-максимальная подгруппа метациклическая // X Всесоюз. симп. по теории групп: Тез. докл. – Минск: Ин-т математики АН БССР, 1986. – С. 208.
15. *Левищенко С. С., Кузенный Н. Ф., Семко Н. Н., Томанек Л.* Строение конечных минимальных неметациклических групп // Prirodne vedy. Matematika. Zbornik pedagogickej fakulty v presove univerzity P. I. Safarika. – Kosice, 1990. – Proc. XXIV, Zvazok I. – S. 49–97.
16. *Курош А. Г.* Теория групп. – М.: Наука, 1967. – 648 с.
17. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
18. *Herstein N.* Aremark on finite groups // Proc. Amer. Math. Soc. – 1958. – **9**, № 2.– P. 255–257.

Одержано 15.06.95