УДК 517.54

В. И. Рязанов (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

О КРИТЕРИЯХ СХОДИМОСТИ ДЛЯ КВАЗИКОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ И ИХ ОБОБЩЕНИЙ*

Necessary and sufficient conditions for convergence of normalized homeomorphisms in the plane from the Sobolev class are found in terms of the Fourier transformation for complex dilatations under the condition of an exponential boundedness in measure of an upper boundary of the dilatations. On this basis, various metrics generating a locally uniform convergence of the mappings are constructed.

У термінах перетворення Фур'є комплексних характеристик знайдені необхідні та достатні умови збіжності нормованих гомеоморфізмів класу Соболєва при експоненціальній обмеженості за мірою верхньої межі дилатацій. На цій основі побудовані різні метрики, які породжують локально рівномірну збіжність відображень.

Настоящая статья является продолжением работ [1, 2], посвященных исследованию условий сходимости гомеоморфизмов плоскости с обобщенными производными. В [1] установлена полунепрерывность дилатации таких гомеоморфизмов, а в [2] получены обобщения и усиления известных теорем сходимости Штребеля и Берса–Боярского [3–5].

Исходным пунктом этих исследований послужила известная лемма Геринга–Лехто [6, 7] о дифференцируемости гомеоморфизмов плоскости, а также новая теорема существования Давида [8] для уравнения Бельтрами.

Вопросы сходимости и компактности для гомеоморфизмов Давида начал изучать Тукиа [9]. Ряд результатов по вопросам сходимости и компактности ранее анонсированы в работах [10, 11] и затем вошли в докторскую диссертацию [12].

1. Определения и предварительные замечания. Пусть D — некоторая область комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Топологическое отображение f области D класса ACL будем называть $Q(z)$-*квазиконформным отображением*, если f удовлетворяет уравнению Бельтрами

$$f_{\bar z} = \mu(z) f_z \tag{1}$$

с дилатацией

$$p(z) = \frac{1+|\mu(z)|}{1-|\mu(z)|} \le Q(z), \tag{2}$$

где $Q(z)\colon D \to I = [1, \infty]$ — произвольная функция (ср. [6, с. 28]). Коэффициент $\mu(z)$ принято называть комплексной характеристикой отображения f. При этом для определенности полагаем $\mu(z) = 0$ в случае, когда $f_z = f_{\bar z} = 0$.

В силу неравенства Шварца $f \in W^1_{1,\mathrm{loc}}$ при $Q(z) \in L^1_{\mathrm{loc}}$, поскольку

$$|f_z| + |f_{\bar z}| = p^{1/2}(z) J^{1/2}(z), \tag{3}$$

где

$$J(z) = |f_z|^2 - |f_{\bar z}|^2 \tag{4}$$

— якобиан отображения f [13, с. 131; 14, с, 42].

По-видимому, этот термин введен впервые Шиффером [15] при $Q(z) \in L^\infty$, т. е. для подкласса Q-квазиконформных отображений, где $Q = \| Q(z) \|_\infty$. Однако ранее (1939) Тейхмюллер и позже Волковиский Л. И. обратили внимание на экстремальные проблемы в классах подобного рода. Аналогичные классы также рассматривали Андриан-Казаку, Кюнау, Крушкаль, Ренельт, Мак Ливи, Летинен и др. (см. литературу в [16]).

* Работа частично поддержана Международным научным фондом, UB 96 000.

Обозначим через $H(Q(z))$ множество всех $Q(z)$-квазиконформных отображений $f\colon \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ с нормировками $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ и $f(\infty) = \infty$. Через $\mathfrak{M}(Q(z))$ обозначим множество всех измеримых функций $\mu(z)\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ с дилатацией $p(z)$, удовлетворяющей ограничению (2).

Будем говорить, что измеримая функция $Q(z)\colon \mathbb{C} \to I = [1, \infty]$ *экспоненциально ограничена по мере,* если существуют постоянные $T \geq 1$, $\gamma > 0$ и $c > 0$ такие, что для всех $t \geq T$

$$\operatorname{mes}\{z \in \mathbb{C} : Q(z) > t\} \leq c\, e^{-\gamma t}. \tag{5}$$

Согласно [8, с. 27, 55] при таком $Q(z)$ для любой функции $\mu \in \mathfrak{M}(Q(z))$ существует и единственно отображение f класса $H(Q(z))$ с комплексной характеристикой μ. При этом f и $f^{-1} \in H(Q(z))$ равностепенно непрерывны и абсолютно непрерывны на компактах.

Если $Q(z)$ экспоненциально ограничена по мере, то $Q(z)$ локально интегрируема и потому к классу $H(Q(z))$ применима вся теория, развитая в [2]. В частности, в [2] установлена замкнутость класса $H(Q(z))$, $Q(z) \in L^1_{\text{loc}}$, в пространстве всех гомеоморфизмов H относительно топологии локально равномерной сходимости. Таким образом, в силу результатов Давида, а также теоремы Арцела–Асколи [17, с. 289] получаем секвенциальную компактность класса $H(Q(z))$. Отметим также, что указанная сходимость на $H(Q(z))$ порождается метрикой [18, с. 215]

$$\rho(f, g) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{\rho_j(f, g)}{1 + \rho_j(f, g)}, \tag{6}$$

где ρ_j, $j = 1, 2, \ldots$, — псевдометрики:

$$\rho_j(f, g) = \max_{|z| \leq j} |f(z) - g(z)|. \tag{7}$$

Изложенное выше подытожим в следующем предложении.

***Предложение* 1.** *Пусть функция $Q(z)\colon \mathbb{C} \to I = [1, \infty]$ экспоненциально ограничена по мере. Тогда класс гомеоморфизмов $H(Q(z))$ является метризуемым секвенциально компактным L^*-пространством относительно локально равномерной сходимости.*

Абстрактные пространства, в которых понятие предела играет роль исходного понятия, введены Фреше (1906). В [19] эта теория дополнена еще одной, наиболее важной, аксиомой. В секвенциально компактном пространстве аксиома Урысона приобретает особо простой вид: последовательность с единственной точкой накопления сходится к этой точке [18, с. 203, 215].

Другими словами, чтобы убедиться, что какая-либо последовательность f_n, $n = 1, 2, \ldots$, сходится к f, достаточно проверить, что любая ее сходящаяся подпоследовательность f_{n_k}, $k = 1, 2, \ldots$, сходится именно к f.

Далее, в силу локально абсолютной непрерывности прямых и обратных гомеоморфизмов Давида их якобиан $J(z) \neq 0$ почти всюду, т. е. почти все точки плоскости являются регулярными точками отображений класса $H(Q(z))$. Поэтому из предложения 1, аксиомы Урысона и теоремы 1 из [2] получаем такое следствие.

***Следствие* 1.** *Пусть f и $f_n \in H(Q(z))$, $n = 1, 2, \ldots$, с $Q(z)$, экспоненциально ограниченной по мере. Тогда для сходимости $f_n \to f$ локально равномерно достаточно выполнения любого из следующих условий:*

1. $\mu_n \to \mu$ *почти всюду*;
2. $\mu_n \to \mu$ *по мере*;
3. $\mu_n \to \mu$ *по норме в* L^1_{loc}, $1 \le p \le \infty$.

Подчеркнем, что ни одно из этих условий не является необходимым для сходимости $f_n \to f$ локально равномерно. Более того, необходимым условием не является даже слабая сходимость $\mu_n \to \mu$ ни в одном из пространств L^1_{loc}, $1 \le p \le \infty$ [20, с. 14].

2. О необходимых и достаточных условиях сходимости. Обозначим через $B^{\infty}(\mathbb{C})$ открытый единичный шар в пространстве $L^{\infty}(\mathbb{C})$ ограниченных измеримых функций $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Определим для любой $\mu \in B^{\infty}(\mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{C})$ нелинейное преобразование

$$F(\mu) = m\hat{\mu} + m(\hat{\mu} * (m\hat{\mu})) + \ldots, \tag{8}$$

где через $*$ обозначена свертка функций,

$$\hat{\mu}(z) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\mathbb{C}} \mu(\xi)\, e^{-i \operatorname{Re} z\bar{\xi}}\, d\xi\, d\eta \tag{9}$$

— преобразование Фурье и $m(z) = z/\bar{z} \in L^{\infty}(\mathbb{C})$ — мультипликатор.

Теорема 1. *Пусть функция* $Q(z)\colon \mathbb{C} \to I = [1, \infty]$ *экспоненциально ограничена по мере и* E_j, $j \in J$, *— некоторое покрытие плоскости* $\mathbb{C}$ *по мере ограниченными измеримыми множествами, на каждом из которых* $Q(z)$ *ограничена.*

Тогда для сходимости $f_n \to f$ *локально равномерно в* $H(Q(z))$ *необходимо и достаточно, чтобы* $F(\tilde{\mu}_n) \to F(\tilde{\mu})$ *слабо в* $L^2(\mathbb{C})$ *для срезок комплексных характеристик* μ *и* μ_n, $n = 1, 2, \ldots$, *на каждом множестве* E_j, $j \in J$.

Здесь под срезкой функции $\mu : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ на множестве $E \subseteq \mathbb{C}$ понимается функция $\hat{\mu} = \mu \chi_E$, где через χ_E обозначена характеристическая функция множества E. Семейство множеств E_j, $j \in J$, называется покрытием плоскости $\mathbb{C}$ по мере, если

$$\operatorname{mes} \mathbb{C} \setminus \bigcup_{j \in J} E_j = 0. \tag{10}$$

При этом множество индексов J не предполагается, вообще говоря, счетным.

Замечание. Как будет видно из доказательства теоремы 1, из любого покрытия плоскости $\mathbb{C}$ по мере ограниченными измеримыми множествами E_j, $j \in J$, всегда можно выделить счетное подпокрытие по мере $\mathscr{E}_k = E_{j_k}$, $k = 1, 2, \ldots$.

Это позволяет строить различные метрики в пространстве $H(Q(z))$, генерирующие топологию локально равномерной сходимости. Действительно, пусть φ_l, $l = 1, 2, \ldots$, — произвольное счетное фундаментальное множество функций из пространства $L^2(\mathbb{C})$ [17, с. 63] и

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \iint\limits_{\mathbb{C}} \varphi(z)\, \overline{\psi(z)}\, dx\, dy \tag{11}$$

— скалярное произведение в $L^2(\mathbb{C})$. Тогда следующая метрика порождает на $H(Q(z))$ локально равномерную сходимость

$$d(f_\mu, f_\nu) = \sum_{k,l=1}^{\infty} 2^{-(k+l)} \frac{d_{kl}(\mu,\nu)}{1 + d_{kl}(\mu,\nu)}, \tag{12}$$

где

$$d_{kl}(\mu,\nu) = |\langle \varphi_l, F(\mu^{(k)}) - F(\nu^{(k)}) \rangle| \tag{13}$$

— псевдометрики; $\mu^{(k)}$, $\nu^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$, — срезки комплексных характеристик μ и ν на множествах $\mathscr{E}_k$, $k = 1, 2, \ldots$.

В частности, для любой измеримой почти всюду конечной функции $Q(z)$: $\mathbb{C} \to I = [1, \infty]$ последовательность

$$E^{(k)} = \{ z \in \mathbb{C} : |z| \le k,\ Q(z) \le k \}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{14}$$

является примером счетного покрытия плоскости $\mathbb{C}$ по мере ограниченными измеримыми множествами, на каждом из которых функция $Q(z)$ ограничена. Пусть $\{P_n,\ l = 1, 2, \ldots\}$ — семейство всех квадратов плоскости $\mathbb{C}$ со сторонами, параллельными осям координат, координаты центров и длины сторон которых являются рациональными числами. Выбирая в качестве фундаментального множества функций φ_l пространства $L^2(\mathbb{C})$ множество характеристических функций χ_l указанных квадратов P_l, получаем метрику (12) с

$$d_{kl} = \left| \iint_{P_l} \{ F(\mu^{(k)}) - F(\nu^{(k)}) \}\, dx\, dy \right|. \tag{15}$$

***Следствие* 2.** *В условиях теоремы* 1 *для сходимости* $f_n \to f$ *локально равномерно в* $H(Q(z))$ *необходимо и достаточно, чтобы* $d(f_n, f) \to 0$.

Наиболее просто теорема 1 формулируется для Q-квазиконформных отображений в случае компактных носителей.

***Следствие* 3.** *Пусть* f *и* $f_n \in H(Q)$, $n = 1, 2, \ldots$, — Q*-квазиконформные отображения с носителями комплексных характеристик* μ *и* μ_n, $n = 1, 2, \ldots$, *сосредоточенными в некотором компакте* $K \subseteq \mathbb{C}$. *Тогда для сходимости* $f_n \to f$ *локально равномерно необходимо и достаточно, чтобы* $F(\mu_n) \to F(\mu)$ *слабо в* $L^2(\mathbb{C})$.

3. О преобразованиях Гильберта и Фурье. Обозначим через T комплексное преобразование Гильберта: $T: L^p(\mathbb{C}) \to L^p(\mathbb{C})$,

$$T\varphi(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\varphi(\xi)}{(\xi - z)^2}\, d\xi\, d\eta, \tag{16}$$

а через c_p — его норму в пространстве $L^p(\mathbb{C})$, $1 < p < \infty$. Как известно, $c_2 = 1$ и согласно теореме Риса–Торина $\log c_p$ является выпуклой функцией от $1/p$ такой, что $c_p \to 1$ при $p \to 2$ [6, с. 102]. Следовательно, $q c_p < 1$ для p достаточно близких к 2 и $q \in [0, 1)$.

Зафиксируем некоторое $p > 2$. Оказывается, что для любой функции $\mu \in L^\infty(\mathbb{C})$ с компактным носителем и $|\mu(z)| \le q < 1$ существует и единственно решение f уравнения Бельтрами (1) такое, что $f(0) = 0$ и $f_z - 1 \in L^p(\mathbb{C})$. Такие f называются нормальными решениями. Всякое нормальное решение уравнения Бельтрами является Q-квазиконформным гомеоморфизмом, $Q = (1+q)/(1-q)$ [6, с. 84–89].

Пусть $P: L^p(\mathbb{C}) \to C_\alpha$, $\alpha = 1 - 2/p$, — линейный ограниченный оператор, определяемый равенством

$$P\varphi(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathbb{C}} \varphi(\xi)\left(\frac{1}{\xi - z} - \frac{1}{\xi}\right) d\xi\, d\eta. \tag{17}$$

Тогда нормальное решение запишется в виде

$$f(z) = z + P(\mu) + P(\mu N(\mu)), \tag{18}$$

где

$$N(\mu) = T\mu + T(\mu T\mu) + \ldots \tag{19}$$

— нелинейное преобразование характеристики. Отметим, что ряд (19) сходится по норме любого из пространств $L^p(\mathbb{C})$, $1 < p < \infty$, для которого $qc_p < 1$. В частности, это имеет место в $L^2(\mathbb{C})$.

Пусть $E \subseteq \mathbb{C}$ — ограниченное измеримое множество. Обозначим через $\mathfrak{N}_q(E)$ класс всех нормальных решений уравнения Бельтрами с комплексными характеристиками $\mu(z)$ такими, что:

$$|\mu(z)| \le q < 1, \quad z \in E, \tag{20}$$

$$\mu(z) = 0, \quad z \in \mathbb{C}\setminus E. \tag{21}$$

В [21] показано, что для любого ограниченного измеримого множества $E \subseteq \subseteq \mathbb{C}$ и $q < 1$ класс $\mathfrak{N}_q(E)$ секвенциально компактен относительно локально равномерной сходимости. При тех же условиях показано, что для локально равномерной сходимости $f_n \to f$ в классе $\mathfrak{N}_q(E)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$N(\mu_n) \to N(\mu) \tag{22}$$

слабо в $L^2(\mathbb{C})$. На основе этого можно также получить описание сходимости нормальных решений уравнения Бельтрами в терминах преобразования Фурье.

Лемма 1. *Пусть $E \subseteq \mathbb{C}$ — произвольное ограниченное измеримое множество, $0 < q < 1$, и f, $f_n \in \mathfrak{N}_q(E)$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда для локально равномерной сходимости $f_n \to f$ необходимо и достаточно, чтобы*

$$F(\mu_n) \to F(\mu) \tag{23}$$

слабо в $L^2(\mathbb{C})$.

К сингулярным интегралам преобразование Фурье впервые применил Кальдерон и Зигмунд [22]. Интегральный оператор типа свертки в $\mathbb{R}^n$

$$S\varphi(x) = k * \varphi = \int\limits_{\mathbb{R}^n} k(x-y)\,\varphi(y)\,dy \tag{24}$$

корректно определен и ограничен в $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p \le \infty$, если $k \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Однако часто и в случае несуммируемого ядра k интеграл (24) можно корректно определить в смысле главного значения по Коши как предел по норме $L^p(\mathbb{R}^n)$ или п. в.

$$S\varphi(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{|x-y| > \varepsilon} k(x-y)\,\varphi(y)\,dy. \tag{25}$$

Типичным примером является двумерное преобразование Гильберта (16). Операторы такого типа принято называть сингулярными интегральными операторами или сингулярными интегралами.

Основная проблема, рассматриваемая в работах Кальдерона–Зигмунда, — это проблема ограниченности многомерных сингулярных интегральных операторов в пространствах $L^p(\mathbb{R}^n)$, $p>1$. В [22] рассмотрены интегралы вида (24) с ядрами

$$k(x) = \frac{\Psi(x/|x|)}{|x|^n}. \tag{26}$$

Для их исследования и было применено преобразование Фурье $\widehat{\ }$. Установлено, что сингулярный интеграл ограничен в $L^2(\mathbb{R}^n)$, если ограничено преобразование Фурье его ядра и

$$\widehat{S\varphi} = \hat{k}\hat{\varphi} \tag{27}$$

(см. также [23, с. 99–103]). Михлин [24] установил, что преобразование Фурье $\widehat{\ }$ ядра k совпадает с так называемым символом Φ сингулярного интегрального оператора (см. также [23, с. 106]). Символ оператора (16) весьма прост: $\Phi(\theta) = e^{2i\theta} = \hat{k}(z)$, где $\theta = \arg z$ [23, с. 76–78]. Таким образом,

$$\widehat{T\varphi}(z) = m(z)\,\hat{\varphi}(z), \tag{28}$$

где мультипликатор имеет вид

$$m(z) = z/\bar{z}. \tag{29}$$

По теореме Планшереля (см., например, [25, с. 255–256]) для каждой функции $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ существует ее преобразование Фурье $\hat{\varphi}$ и $\tilde{\varphi} \in L^2(\mathbb{R}^n)$:

$$\hat{\varphi}(v) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\Delta_n} \varphi(u)\, e^{-ivu} du, \tag{30}$$

$$\tilde{\varphi}(v) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\Delta_n} \varphi(u)\, e^{ivu} du, \tag{31}$$

где

$$u = (u_1, \ldots, u_n), \quad v = (v_1, \ldots, v_n), \quad uv = \sum_{j=1}^{n} u_j v_j,$$

$$\Delta_n = \{u \in \mathbb{R}^n\colon\ |u_j| \le N,\ j = 1, \ldots, n\}, \tag{32}$$

и сходимость понимается в смысле $L^2(\mathbb{R}^n)$. При этом преобразования Фурье $\widehat{\ }$ и $\widetilde{\ }$ отображают $L^2(\mathbb{R}^n)$ на себя взаимнооднозначно, преобразования $\widehat{\ }$ и $\widetilde{\ }$ взаимно обратны, $\tilde{\hat{\varphi}} = \hat{\tilde{\varphi}} = \varphi$ на $L^2(\mathbb{R}^n)$, сохраняют скалярное произведение $(\varphi, \psi) = (\hat{\varphi}, \hat{\psi}) = (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})$, φ, $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$, и, таким образом, изометричны $\|\hat{\varphi}\| = \|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$. Другими словами, $\widehat{\ }$ является унитарным оператором, а $\widetilde{\ }$ — обратный к нему оператор в пространстве $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Покажем, что для $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ и $b \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ справедливо соотношение

$$\widehat{b\varphi} = \hat{b} * \hat{\varphi}. \tag{33}$$

Действительно, пусть C_0^∞ — совокупность всех бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем в $\mathbb{R}^n$ и $B: C_0^\infty \to L^2(\mathbb{R}^n)$ — оператор, определяемый равенством $B\varphi = \tilde{b} * \varphi$. Тогда норма оператора B равна $\|b\|_\infty$ и

$$\widehat{B\varphi} = (\tilde{b} * \varphi)^\wedge = b\hat{\varphi} \tag{34}$$

[26, с. 38]. Таким образом, оператор B и формула (34) могут быть распространены на все $L^2(\mathbb{R}^n)$. Полагая $\varphi \in \tilde{\psi}$, $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$, будем иметь

$$(\tilde{b} * \tilde{\psi})^\wedge = b\psi \tag{35}$$

или, применяя к обеим частям (35) обратное преобразование Фурье $\sim$, получаем

$$\widetilde{b\psi} = \tilde{b} * \tilde{\psi}. \tag{36}$$

Поскольку для любого $\kappa \in L^2(\mathbb{R}^n)$

$$\hat{\kappa}(x) = \hat{\kappa}(-x), \tag{37}$$

то получаем (33).

Обозначим через $\mathfrak{M}_q(E)$ множество всех комплексных характеристик отображений f класса $\mathfrak{R}_q(E)$. Тогда $\mathfrak{M}_q(E) \subseteq L^\infty(\mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{C})$ и из унитарности преобразования Фурье в $L^2(\mathbb{C})$ в соответствии с формулами (8), (9), (19), (28), (29) и (33) имеем равенство

$$\widehat{N(\mu)} = F(\mu) \tag{38}$$

для любого $\mu \in \mathfrak{M}_q(E)$. Еще раз используя унитарность оператора Фурье $\wedge$, из (22) получаем утверждение леммы 1.

4. Лемма сравнения. Для доказательства теоремы 1 необходима следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть $Q(z)\colon \mathbb{C} \to I = [1, \infty]$ экспоненциально ограничена по мере, а h и h_n, g и g_n, $n = 1, 2, \ldots$, являются $Q(z)$-квазиконформными отображениями с комплексными характеристиками μ и μ_n, ν и ν_n, $n = 1, 2, \ldots$, соответственно. Если $h_n \to h$ и $g_n \to g$ локально равномерно и при этом $\mu_n(z) - \nu_n(z) \to 0$ по мере на некотором измеримом множестве E, то $\mu(z) = \nu(z)$ почти всюду на E.*

В свою очередь, для доказательства леммы 2 используем следующую лемму.

Лемма 3. *Пусть $E \subseteq \mathbb{C}$ — произвольное измеримое множество, f и f_n, $n = 1, 2, \ldots$, — Q-квазиконформные отображения и $f_n \to f$ локально равномерно. Тогда на множестве $\mathscr{E} = f(E)$ имеет место сходимость по мере характеристических функций $\chi_{\mathscr{E}_n}(w) \to 1$ множеств $\mathscr{E}_n = f_n(E)$. Другими словами, мера множества тех точек $u \in \mathscr{E}$, для которых $u \notin \mathscr{E}_n$, стремится к нулю при $n \to \infty$.*

Лемму 3 можно рассматривать как обобщение известной теоремы о сходимости к ядру [4, с. 79–80].

***Доказательство** леммы* **3.** 1) Пусть сначала E — область. Тогда согласно теореме о сходимости к ядру область $\mathscr{E} = f(E)$ является связной компонентой ядра последовательности областей

$$\bigcup_{m=1}^{\infty}\left[\left(\bigcap_{n=m}^{\infty}\mathscr{E}_n\right)\right]^0, \quad \mathscr{E}_n = f_n(E). \tag{39}$$

и, в частности, любая точка $w \in \mathscr{E}$ принадлежит $\mathscr{E}_n$ для всех достаточно больших n, т. е. $\chi_{\mathscr{E}_n}(w) \to 1$ поточечно на $\mathscr{E}$

2) Если E — произвольное открытое множество, то E распадается на не более чем счетное число связных компонент и, следовательно, $\chi_{\mathscr{E}_n}(w) \to 1$ поточечно на $\mathscr{E}$ ввиду изложенного в п. 1 доказательства.

3) Пусть теперь $E \subseteq \mathbb{C}$ — произвольное измеримое множество с $\operatorname{mes} f(E) < \infty$. Тогда в силу регулярности меры Лебега [27, с. 108] $\mathscr{E} = f(E)$ можно погрузить в открытое множество $\mathscr{E}_0 \subseteq \mathbb{C}$ с $\operatorname{mes} \mathscr{E}_0 \setminus \mathscr{E} < \varepsilon$. Отсюда, в частности, имеем $\operatorname{mes} \mathscr{E}_0 < \infty$.

Введем сокращения записи $\chi_n(w) = \chi_{f_n(E)}(w)$, $\chi_n^0(w) = \chi_{f_n(E_0)}(w)$, где $E_0 = f^{-1}(\mathscr{E}_0)$. Ясно, что $\chi_n \le \chi_n^0$ всюду. Из неравенства треугольника для нормы $L^1(\mathscr{E})$ получаем

$$\| \chi_n - 1 \| \le \| \chi_n - \chi_n^0 \| + \| \chi_n^0 - 1 \|. \tag{40}$$

Далее,

$$\| \chi_n^0 - \chi_n \| = \iint\limits_{\mathscr{E}} (\chi_n^0(w) - \chi_n(w))\, du\,dv =$$

$$= \operatorname{mes} \{ [f_n(E_0 \setminus E)] \cap \mathscr{E} \} \le \operatorname{mes} f_n(E_0 \setminus E). \tag{41}$$

В силу известного результата о слабой сходимости якобианов Q-квазиконформных отображений [28, с. 15 ; 29, с. 38], а также их абсолютной непрерывности [6, с. 36] имеем

$$\operatorname{mes} f_n(E_0 \setminus E) \to \operatorname{mes} f(E_0 \setminus E) = \operatorname{mes} \mathscr{E}_0 \setminus \mathscr{E} < \varepsilon.$$

Таким образом, из (41) заключаем, что

$$\limsup_{n \to \infty} \| \chi_n^0 - \chi_n \| < \varepsilon. \tag{42}$$

С другой стороны, $\| \chi_n^0 - 1 \| \le \| \chi_n^0 - 1 \|_0$, где через $\| \;\|_0$ обозначена норма $L^1(\mathscr{E}_0)$. В силу изложенного в п. 2 доказательства и по теореме Лебега о почленном интегрировании [27, с. 50–51] $\| \chi_n^0 - 1 \|_0 \to 0$. Тем более $\| \chi_n^0 - 1 \| \to 0$. Отсюда и из неравенств (40) и (42) получаем

$$\limsup_{n \to \infty} \| \chi_n - 1 \| < \varepsilon \tag{43}$$

и ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ $\| \chi_n - 1 \| \to 0$. Поэтому $\chi_n \to 1$ по мере на $\mathscr{E}$.

4) Случай, когда $\operatorname{mes} \mathscr{E} = \infty$, сводится к предыдущему случаю [30, с. 57–58].

***Доказательство** леммы* **2.** Не умаляя общности, можно считать, что

$$\operatorname*{ess\,sup}_{z \in E} Q(z) = Q_0 < \infty \tag{44}$$

и E — ограниченное множество. Действительно, утверждение леммы достаточно проверить на множествах

$$E_m = \{ z \in E : |z| \le m,\ Q(z) \le m \}, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

поскольку $\operatorname{mes} E \setminus \bigcup E_m = 0$ [30, с. 63–64].

Пусть f_n, $n = 1, 2, \ldots$, — гомеоморфизмы класса $H(Q(z))$ с комплексными характеристиками $\kappa_n(z) = \mu_n(z) \chi_E(z)$, $n = 1, 2, \ldots$, где χ_E — характеристическая функция множества E. В силу секвенциальной компактности класса $H(Q(z))$ можно считать, что $f_n \to f$ сходится локально равномерно к некоторому гомеоморфизму f того же класса. Обозначим через $\kappa(z)$ комплексную характеристику отображения f и покажем, что $\nu(z) = \kappa(z) = \mu(z)$ п. в. на E.

Для определенности докажем первое равенство. Второе доказывается аналогично. Прежде всего отметим, что в силу (44) f и $f_n \in H(Q_0)$, т. е. f и f_n являются Q_0-квазиконформными отображениями, к которым применима лемма 3.

По лемме 3 без ограничения общности можно считать, что $\chi_{\mathscr{E}_n}(w) \to 0$ п. в. на $\mathscr{E} = f(E)$, $\mathscr{E}_n = f_n(E)$, и $\mu_n(z) - \nu_n(z) \to 0$ п. в. на E [30, с. 58]. Первое утверждение означает, что для почти всех $w \in \mathscr{E}$, начиная с некоторого $N = N(w)$, $\chi_{\mathscr{E}_n}(w) \to 1$, т. е. $f_n^{-1}(w) \in E$ при $n \geq N$. Далее, ввиду счетной аддитивности меры и теоремы Егорова [27, с. 35] можно считать, что $\mu_n(z) - \nu_n(z) \to 0$ равномерно на E.

Рассмотрим последовательность отображений $\varphi_n = g_n \circ f_n^{-1} \to g \circ f^{-1} = \varphi$. По теореме Давида g и $g_n \in W^1_{\alpha,\mathrm{loc}}$, $\alpha < 2$, а f^{-1} и $f_n^{-1} \in W^1_{\beta,\mathrm{loc}}$ для некоторого $\beta = \beta(Q) > 2$ [4, с. 226]. Следовательно, φ и $\varphi_n \in W^1_{1,\mathrm{loc}}$ [4, с. 159] и, таким образом, φ и φ_n являются $K(z)$-квазиконформными отображениями с локально суммируемой $K(z) = Q_0 Q(z)$. Их комплексные характеристики имеют вид

$$\omega_n(w) = \left\{ \frac{\nu_n(z) - \kappa_n(z)}{1 - \nu_n(z)\overline{\kappa_n(z)}} \frac{(f_n)_z}{\overline{(f_n)_z}} \right\} \circ f_n^{-1}(w),$$

$$\omega(w) = \left\{ \frac{\nu(z) - \kappa(z)}{1 - \nu(z)\overline{\kappa(z)}} \frac{f_z}{\overline{f_z}} \right\} \circ f^{-1}(w).$$

Таким образом, $\omega_n(w) \to 0$ п. в. на $\mathscr{E}$. Но тогда в силу следствия 5 из [1] $\omega(w) = 0$ п. в. на $\mathscr{E}$, т. е.

$$\{\nu(z) - \kappa(z)\} \circ f^{-1}(w) = 0 \tag{45}$$

п. в. на $f(E)$. Следовательно, $\nu(z) = \kappa(z)$ п. в. на E в силу абсолютной непрерывности квазиконформных гомеоморфизмов [6, с. 36].

5. Доказательство теоремы 1. 1) *Необходимость.* Итак, пусть $f_n \to f$ локально равномерно, а $\tilde{\mu}$ и $\tilde{\mu}_n$ — срезки комплексных характеристик μ и μ_n, $n = 1, 2, \ldots$, соответственно на некотором множестве E из покрытия E_j, $j \in J$. Тогда в силу лемм 1 и 2, используя аксиому Урысона в секвенциально компактном пространстве $\mathfrak{N}_q(E)$ из п. 3, получаем, что $F(\tilde{\mu}_n) \to F(\tilde{\mu})$ слабо в $L^2(\mathbb{C})$.

2) *Достаточность.* Пусть $F(\tilde{\mu}_n) \to F(\tilde{\mu})$ слабо в $L^2(\mathbb{C})$ на каждом из множеств E_j, $j \in J$.

Отметим одно важное обстоятельство. Обозначим через M L^*-пространство всех измеримых и п. в. конечных функций $\varphi: \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, наделенное сходимостью по мере (Лебега). Это пространство метризуемо и сепарабельно [30, с. 63–67]. Но тогда и его подпространство $X \subseteq M$, состоящее из характеристических функций χ_j множеств E_j, $j \in J$, также сепарабельно [18, с. 215].

Следовательно, можно выделить счетное подпокрытие $\mathscr{E}_m = E_{j_m}$, $m = 1, 2, \ldots$, плоскости $\mathbb{C}$ по мере.

Таким образом, в силу лемм 1 и 2, используя аксиому Урысона в секвенциально компактном пространстве $H(Q(z))$, заключаем, что $f_n \to f$ локально равномерно.

1. *Рязанов В. И.* О квазиконформных отображениях с ограничениями по мере // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 7. – С. 1009–1019.
2. *Рязанов В. И.* О теоремах сходимости для гомеоморфизмов класса Соболева // Там же. – 1995. – **47**, № 2. – С. 249–259.
3. *Strebel K.* Ein Konvergenzsatz für Folgen quasikonformer Abbildungen // Comment. Math. Helv. – 1969. – **44**, № 4. – S. 469–475.
4. *Lehto O., Virtanen K. J.* Quasikonforme Abbildungen. – Berlin etc.: Springer-Verlag, 1965. – 263 p.
5. *Боярский Б. В.* Обобщенные решения системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами // Мат. сб. – 1957. – **43** (85). – С. 451–503.
6. *Альфорс Л.* Лекции по квазиконформным отображениям. – М.: Мир, 1969. – 133 с.
7. *Gehring F. W., Lehto O.* On total differentiability of functions of a complex variable // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math. – 1959. – **272**. – P. 1–9.
8. *David G.* Solutions de l'équation de Beltrami avec $\|\mu\|_\infty = 1$ // Ibid. – 1988. – **13**. – P. 25–70.
9. *Tukia P.* Compactness properties of μ-homeomorphisms // Ibid. – 1991. – **16**. – P. 47–69.
10. *Рязанов В. И.* О квазиконформных отображениях с локально суммируемой границей деформаций // Докл. АН России. – 1993. – **332**, № 6. – С. 693–695.
11. *Рязанов В. И.* О гомеоморфизмах класса Соболева и отображениях, квазиконформных в среднем // Там же. – 1994. – **335**, № 3. – С. 297–299.
12. *Рязанов В. И.* Топологические аспекты теории квазиконформных отображений и их обобщений: Дис. … д-ра физ.-мат. наук. – Донецк: Ин-т прикл. математики и механики АН Украины, 1994. – 281 с.
13. *Михлин С. Г.* Линейные уравнения в частных производных. – М.: Высш. шк., 1977. – 432 с.
14. *Харди Г. Г., Литтлвуд Дж. Е., Полиа Г.* Неравенства. – М.: Изд-во иностр. лит., 1948. – 456 с.
15. *Schiffer M., Schober G.* Representation of fundamental solutions for generalized Cauchy–Riemann equations by quasiconformal mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math. – 1976. – **2**. – P. 501–531.
16. *Крушкаль С. Л., Кюнау Р.* Квазиконформные отображения — новые методы и приложения. – Новосибирск: Наука, 1984. – 216 с.
17. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 895 с.
18. *Куратовский К.* Топология: В 2-х т. – М.: Мир, 1966. – Т. 1. – 594 с.
19. *Uryson P. S.* Sur les classes $(\mathcal{L}^*)$ de M. Frechet // Ens. Math. – 1926. – **25**. – P. 77–83.
20. *Ryazanov V. I.* Some questions of convergence and compactness for quasiconformal mappings // Amer. Math. Soc. Transl. – 1986. – **131** (2). – P. 7–19.
21. *Рязанов В. И.* О сходимости характеристик квазиконформных отображений // Укр. мат. журн. – 1986. – **38**, № 2. – С. 200–204.
22. *Calderon A. P., Zygmund A.* On the existence of certain singular integrals // Acta Math. – 1952. – **88**. – P. 85–139.
23. *Михлин С. Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. – М.: Физматгиз, 1962. – 254 с.
24. *Михлин С. Г.* К теории многомерных сингулярных уравнений // Вестн. Ленингр. ун-та. – 1956. – № 1. – С. 3–24.
25. *Никольский С. М.* Курс математического анализа. – М.: Наука, 1975. – Т. 2. – 408 с.
26. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. – М.: Мир, 1974. – 333 с.
27. *Сакс С.* Теория интеграла. – М.: Изд-во иностр. лит., 1949. – 494 с.
28. *Leschinger K.* Untersuchungen über Jacobi – Determinanten von Zweidimensionalen quasikonformen Abbildungen // Bonn. math. Schriften. – 1974. – **72**. – S. 1–58.
29. *Renelt H.* Quasikonforme Abbildungen and elliptische Systeme erster Ordnung in der Ebene // Teubner Texte Math. – 1982. – **46**. – 140 s.
30. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1984. – 752 с.

Получено 10.04.95