УДК 519.4; 513.88

Е. П. Белан (Симферопол. ун-т),
О. Б. Лыкова (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ТЕОРЕМА О ЦЕНТРАЛЬНОМ МНОГООБРАЗИИ НЕЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Under certain assumptions, we prove the existence of an m-parametric family of solutions that form the central invariant manifold of a nonlinear parabolic equation. For this purpose, we use an abstract scheme that corresponds to energetic methods for strongly parabolic equations of arbitrary order.

При деяких припущеннях доводиться існування m-параметричної сім'ї розв'язків, які складають центральний інваріантний многовид нелінійного параболічного рівняння. При цьому застосовано абстрактну схему, що відповідає енергетичним методам для сильно параболічних рівнянь довільного порядку.

1. Введение. Центральные инвариантные многообразия играют важную роль при исследовании динамических систем. Так, используя центральное многообразие, исходную бесконечномерную задачу качественного исследования динамической системы можно свести к соответствующей конечномерной задаче, а в случае конечномерной исходной задачи — к аналогичной задаче меньшей размерности. Первые результаты в этом направлении для конечномерных систем были получены в работах [1 – 8], а для бесконечномерных — в работах [9 – 12]. Отметим также монографии [13, 14], в которых центральные многообразия применены в теории бифуркаций.

Известные доказательства теоремы существования центрального многообразия опираются на предположение о гладкости по всем переменным при $t>0$ полупотока, определяемого исходным уравнением.

В настоящей работе решается задача о существовании и свойствах центрального многообразия абстрактного параболического уравнения в случае, когда гладкость полупотока, определяемого этим уравнением, вообще говоря, не имеет места. Используя метод Коппеля – Пальмера [15], нам удалось доказать для рассматриваемого нелинейного параболического уравнения существование m-параметрического семейства непрерывных решений, образующих центральное многообразие, без предположения о гладкости полупотока. Заметим также, что применяемая в работе абстрактная схема [16, 17] соответствует энергетическим методам для сильно параболических уравнений любого порядка. В дальнейшем используются обозначения из указанных работ.

Для заданного сепарабельного банахова пространства $\mathcal{B}$ обозначим через $C(\mathcal{B})$ банахово пространство непрерывных и ограниченных на вещественной оси R функций со значениями в $\mathcal{B}$ с нормой sup; через $M^p(\mathcal{B})$ пространство измеримых на вещественной оси функций со значениями в $\mathcal{B}$ с нормой

$$\sup_{t\in R}\left(\int_0^1 \|u(t+s)\|^p\,ds\right)^{1/p};$$

через $\operatorname{Hom}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ банахово пространство линейных ограниченных операторов: $\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_2$ с операторной нормой.

Пусть H — гильбертово пространство со скалярным произведением (x, y). Рефлексивное банахово пространство E с сопряженным E^* называется вложимым, если имеется непрерывное и плотное вложение $E\subset H\subset E^*$, причем билинейная форма $y(x)$, где $y^*\in E^*$, $x\in E$, совпадает со скалярным произведением (x, y) на H, если $x\in H$, $y\in H$. Линейный оператор $A\in\operatorname{Hom}(E, E^*)$ называется коэрцитивным или сильно эллиптическим, если для любого $u\in E$ выполняется неравенство $(Au, u)\ge c_1\|u\|_E^2 - c_2\|u\|^2$, где $c_i>0$, $i=1,\ 2.$

Оператор A можно считать также неограниченным оператором в H, если задать область определения в H равенством $D=\{u\in H, Au\in H\}$. Это всегда подразумевается, когда речь идет о спектре оператора [16].

Введем обозначения $X=M^2(E^*)$, $Y=M^2(E)$, $Z=C(H)$, $V=Z\bigcap Y$ с нормой $\|u\|_V=\|u\|_Z+\|u\|_Y$.

2. Постановка задачи. Рассмотрим нелинейное параболическое уравнение

$$Lu = \dot{u}+Au = h(u) \tag{1}$$

при следующих предположениях:

1) $\sigma(e^{At})=e^{\sigma(A)t}\bigcup\{0\}$ для всех $t>0$ и $\operatorname{Re}\sigma(A)\geq 0$, причем собственное подпространство оператора A, соответствующее спектральному множеству $\sigma_0(A)=\sigma(A)\bigcap\{\lambda\in\mathbb{C},\ \operatorname{Re}\lambda=0\}$, является m-мерным;

2) в точке 0 оператор $h\colon E\to E^*$ непрерывно дифференцируем (в смысле Фреше), при этом $h(0)=0$, $\partial h(0)/\partial u=0$;

3) оператор $h(u(t))$ действует из V в X и в некоторой окрестности нуля является непрерывно дифференцируемым;

4) существует $r_0>0$ такое, что для любой функции $v\in V$ выполняются условия:

$$\|v\|_V < r,\quad 0 < r < r_0,\quad h'_u(v(t))(A+I)^{-1}\in \operatorname{Hom}(V,X)$$

и существует положительная постоянная β такая, что справедливо неравенство

$$\|(A+I)\,h'_u(v(t))(A+I)^{-1}\|_{\operatorname{Hom}(V,X)}\leq \beta\,\|h'_u(v(t))\|_{\operatorname{Hom}(V,X)}.$$

Обозначим $\sigma_+(A)=\sigma(A)\bigcap\{\lambda\in\mathbb{C}:\ \operatorname{Re}\lambda>0\}$ и предположим, что спектральному разложению $\sigma(A)=\sigma_0(A)\bigcup\sigma_+(A)$ соответствует разложение $H=$ $=H_1+H_2$ пространства H на A-инвариантные подпространства.

Далее m-мерные нормированные пространства H отождествим с E_1. В связи с разложением пространства H отметим вложение $E_2\subset H_2\subset E_2^*$. Обозначим $\mathscr{X}=M^2(E_2^*)$, $\mathscr{Y}=M^2(E_2)$, $\mathscr{Z}=C(H_2)$, $\mathscr{V}=\mathscr{Y}\bigcap\mathscr{Z}$, $\mathscr{W}$ — пространство функций $u\in\mathscr{V}$ таких, что $\dot{u}\in\mathscr{X}$ и $\|u\|_{\mathscr{W}}=\|u\|_{\mathscr{V}}+\|\dot{u}\|_{\mathscr{X}}$.

Рассмотрим задачу

$$Lu = \varphi,\quad u(0) = u_0. \tag{2}$$

Из условия коэрцитивности оператора A и требования 1 следует существование решения задачи (2) на $(0,\infty)$. Справедлива априорная оценка [16]

$$\|u\|^2_{\mathscr{V}} \leq \|u\|^2_{\mathscr{W}} \leq c^*\left(\|u\|^2_{\mathscr{Z}} + \|\varphi\|^2_{\mathscr{X}}\right), \tag{3}$$

где постоянная c^* зависит лишь от постоянных c_1, c_2 в неравенстве коэрцитивности и от $\|A\|_{\operatorname{Hom}(E_2,E_2^*)}$.

Рассмотрим вопрос о существовании и свойствах локального инвариантного многообразия уравнения (1).

Определение. *Многообразие $\mathcal{M}_r\subset E$, представимое в виде*

$$\mathcal{M}_r = \{u=p+\Omega(p),\ p\in E_1,\ \|p\|<r\},$$

где r — положительная постоянная, а Ω — липшицево отображение из E_1 в E_2, называется локальным размерности m инвариантным многообразием уравнения (1), *если для любого решения $u(t,u_0)$ ($u(0,u_0)\equiv u_0$) уравнения* (1) *из условия* $u_0 \in \mathcal{M}_r$ *следует включение* $u(t, u_0) \in \mathcal{M}_r$ *до тех пор, пока* $\| p(t, u_0) \| < r$.

***Замечание* 1.** Многообразие $\mathcal{M}_r$ называется инвариантным многообразием, если можно принять $r = \infty$.

Для заданного $u \in E^*$ воспользуемся представлением $u = Pu + Qu = p + q$, где P, Q — проекторы соответственно на E_1^*, E_2^*, и запишем уравнение (1) в виде

$$\begin{aligned} \dot{p} + Ap &= Ph(p+q), \\ \dot{q} + Aq &= Qh(p+q). \end{aligned} \tag{4}$$

Выберем гладкую функцию $\psi \colon E_1 \to [0, 1]$ такую, что $\psi(p) = 1$ при $\| p \|_{E_1} \le 1$; $\psi(p) = 0$ при $\| p \|_{E_1} \ge 2$ и для $\rho > 0$ положим

$$h_\rho(p, q) = h\left(p\psi\left(\frac{p}{\rho}\right) + q \right). \tag{5}$$

Введем теперь в рассмотрение функциональные пространства X_λ, V_λ, состоящие из элементов f, u, для которых конечны величины $\| e^{-\lambda|t|} f(t) \|_X$, $\| e^{-\lambda|t|} u(t) \|_V$, принимаемые за нормы соответственно в X_λ, V_λ. Аналогично для пространства функций F определяется функциональное пространство F_λ.

Пусть оператор h удовлетворяет условию Липшица

$$\| h(u_1) - h(u_2) \|_{X_\lambda} \le k(\rho) \| u_1 - u_2 \|_{V_\lambda}, \tag{6}$$

если $\| u_i \|_V \le \rho$, $i = 1, 2$. В неравенстве (6) $k(\rho)$ — неубывающая функция, определенная на $[0, \rho_0]$, $k(\rho) \ge 0$, $k(0) = 0$. Для $\lambda = 0$ это следует из тождества

$$h(u_1) - h(u_2) = \int_0^1 h_u'(u_2 + s(u_1 - u_2))(u_1 - u_2)\, ds,$$

так как $\| h_u'(\theta) \|_{\mathrm{Hom}(V, X)} \to 0$ при $\| \theta \|_V \to 0$.

Если $\lambda \ne 0$, то нужно умножить это тождество на $e^{-\lambda|t|}$ и воспользоваться тем, что производная h_u' коммутирует с умножением на скалярную функцию.

Из определения функции ψ, равенства (5) и неравенства (6) следует неравенство

$$\| h_\rho(p_1, q_1) - h_\rho(p_2, q_2) \|_{X_\lambda} \le k(2\rho)(\| p_1 - p_2 \|_{C_\lambda(E_1)} + \| q_1 - q_2 \|_{\mathcal{V}_\lambda}) \tag{7}$$

для всех $(p_i, q_i) \in C(E_1) \times \mathcal{V}$, $i = 1, 2$, таких, что $\| q_i \|_{\mathcal{V}} \le \rho$.

Кроме того,

$$\| h_\rho(p, q) \|_X \le \rho k(2\rho) \tag{8}$$

для всех $(p, q) \in E_1 \times \mathcal{V}$, $\| q \|_{\mathcal{V}} \le \rho$.

Так как $k(\rho) \to 0$ при $\rho \to 0$, то постоянные, которые являются сомножителями $k(\rho)$, не имеют существенного значения и их в неравенствах (7), (8) мы опустили.

Рассмотрим теперь систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{p} + Ap &= Ph_\rho(p, q), \\ \dot{q} + Aq &= Qh_\rho(p, q), \end{aligned} \tag{9}$$

которая является модификацией системы (4) в том смысле, что для нее можно установить существование инвариантного многообразия, сужение которого на окрестность нуля есть локальное инвариантное многообразие исходной системы (4).

3. Существование инвариантного многообразия системы (9). Покажем, что система (9) при малых ρ имеет m-мерное инвариантное многообразие, касательное к подпространству E_1 в нуле. Сужение этого многообразия на окрестность нуля является центральным многообразием системы (4).

Вначале докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть относительно системы уравнений* (9) *выполняются указанные выше условия.*

Тогда существует постоянная ρ_0 такая, что при $\rho < \rho_0$ для любого $\eta \in E_1$ существует единственное, определенное на вещественной оси R решение $p(t,\eta)$, $q(t,\eta)$ системы (9) *такое, что*

$$p(0,\eta) = \eta, \quad \| q(\cdot,\eta)\|_{\mathcal{V}} \leq \rho.$$

Функция $q(t,\eta)$ является непрерывной функцией t в пространстве E_2. Существуют такие α_0, c_3, что справедливо неравенство

$$\| q(\cdot,\eta_1) - q(\cdot,\eta_2)\|_{C_{\alpha_0}(E_2)} \leq c_3 k(2\rho)\|\eta_1 - \eta_2\|_{E_1}.$$

Прежде чем доказывать теорему, сформулируем и докажем несколько лемм. Заметим, что из условия $\operatorname{Re}\sigma_0(A) = 0$ следует неравенство

$$\| e^{-At}\eta \| \leq l_\varepsilon e^{\varepsilon|t|}\|\eta\|, \quad \eta \in E_1, \quad t \in R, \tag{10}$$

где постоянная l_ε зависит от $\varepsilon > 0$.

Лемма 1. *Пусть $\eta \in E_1$, $q \in \mathcal{V}$, $\|q\|_{\mathcal{V}} < \rho$.*

Тогда существует определенное на вещественной оси решение $p(t,\eta)$ задачи

$$\dot p + Ap = Ph_\rho(p, q(t)), \quad p(0,\eta) = \eta. \tag{11}$$

Это решение единственное. Кроме того, выполняется неравенство

$$\| p(t,\eta)\|_{C_\mu(E_1)} \leq 2l_\varepsilon \|\eta\|, \tag{12}$$

где $\mu \geq \varepsilon + 2l_\varepsilon k(2\rho)$, а также включение $\dot p(t,\eta) \in M_\mu^2(E_1)$.

Доказательство. Определим на пространстве $C_\mu = C_\mu(E_1)$ оператор G согласно равенству

$$(Gp)(t) = \int_0^t e^{-A(t-s)} P h_\rho(p(s), q(s))\, ds. \tag{13}$$

Из неравенств (8), (10) следует, что при $\mu > \varepsilon$ пространство C_μ для оператора G является инвариантным. Из неравенств (7), (10) и определения оператора G следует неравенство

$$\| G(p_1)(t) - G(p_2)(t)\| \leq \left| \int_0^t l_\varepsilon k(2\rho) e^{\varepsilon|t-s|} \| p_1(s) - p_2(s)\|\, ds \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_0^t l_\varepsilon k(2\rho) e^{\varepsilon|t-s|} e^{\mu|s|} \| p_1 - p_2\|_{C_\mu} ds \right| \leq \frac{l_\varepsilon k(2\rho)}{(\mu - \varepsilon)} \| p_1 - p_2\|_{C_\mu} e^{\mu|t|}.$$

Следовательно, оператор $G\colon C_\mu \to C_\mu$ является оператором сжатия с коэффициентом сжатия $\bar{k} \le 1/2$ при $\mu > \mu^* = \varepsilon + 2l_\varepsilon k(2\rho)$.

Рассмотрим теперь эквивалентное задаче (1) уравнение

$$p(t) = e^{-At}\eta + (Gp)(t). \tag{14}$$

Согласно принципу сжимающих отображений уравнение (14) в пространстве C_μ при $\mu \ge \mu^*$ имеет единственную неподвижную точку $p(t, \eta)$. Функция $p(t, \eta)$, очевидно, удовлетворяет неравенству (12). Из неравенств (8), (12) и равенства (11) следует, что $\dot{p}(t, \mu) \in M_\mu^2(E_1)$. Лемма доказана.

***Замечание* 2.** Так как правая часть равенства (14) является непрерывной функцией параметров $\eta \in E_1$, $q \in \mathcal{V}$, $\|q\|_{\mathcal{V}} \le \rho$, а оператор G в пространстве C_μ — оператором сжатия равномерно по $(\eta, q) \in E_1 \times \mathcal{V}$, то решение уравнения (14) есть непрерывная функция параметров η, q.

Лемма 2. *Пусть выполняются условия леммы* 1. *Тогда функция* $p(t, \eta, q)$, *определенная в лемме* 1, *является непрерывно дифференцируемой по* η, q.

Функция $\partial p/\partial\eta = v$ *является решением задачи*

$$\dot{v} + Av = P\,\frac{\partial h_\rho(p(t), q(t))}{\partial p}\,v, \quad v(0) = I,$$

где $p(t) = p(t, \eta, q(\cdot))$. *Кроме того, выполняется неравенство*

$$\left\| \frac{\partial p(t, \eta, q)}{\partial \eta}\zeta \right\|_{C_\mu} \le 2l_\varepsilon|\zeta|$$

для всех $\zeta \in E_1$, $\mu > \mu^*$.

Пусть $g \in \mathcal{V}$. *Тогда функция* $\dfrac{\partial p(t, \eta, q)}{\partial q}g(t) = z(t)$ *является решением задачи*

$$\dot{z} + Az = P\,\frac{\partial h_\rho(p(t), q(t))}{\partial p}\,z + P\,\frac{\partial h_\rho(p(t), q(t))}{\partial q}\,g, \quad z(0) = 0.$$

При этом выполняется неравенство

$$\left\| \frac{\partial p(\cdot, \eta, q)}{\partial q}g \right\|_{C_\mu} \le l_\varepsilon \sup_{t\in R} e^{-\mu|t|} \int_0^t e^{\nu|t-s|} \left\| P\,\frac{\partial h_\rho(p(s), q(s))}{\partial q}\,g(s) \right\|_{E_1} ds,$$

где $\mu \ge \mu^*$, $\nu = \varepsilon + l_\varepsilon k(2\rho)$.

Доказательство. Как следует из условий 3, 4 и определения оператора h_ρ, оператор G, определенный равенством (13), является непрерывным в банаховом пространстве $C_\mu(E_1)$. Из теоремы о дифференцируемости по параметру неподвижной точки оператора равномерного сжатия [12, с. 20] решение задачи (11) $p(t, \eta, q)$ есть непрерывно дифференцируемая функция параметров η, q. Дифференцируя левую и правую части равенства (14) по η, получаем равенство

$$v(t)\zeta = e^{-At}\zeta + \int_0^t e^{-A(t-s)}\,P\,\frac{\partial h_\rho(p(s), q(s))}{\partial q}\,v(s)\zeta\,ds,$$

где

$$v(t) = \frac{\partial p(t, \eta, q)}{\partial \eta}.$$

Из неравенств (7), (10), используя неравенство Гронуолла, получаем при малом ρ первое утверждение леммы. Аналогично доказывается второе утверждение леммы. Лемма доказана.

Пусть $g \in M_\gamma^2(R)$, $g \geq 0$, $\gamma > 0$, $\kappa > 0$, $\gamma > \kappa$. Обозначим через $[t]$ целую часть t. При $t > 0$ нетрудно убедиться в справедливости неравенства

$$\left\| \int_0^t e^{\kappa(t-s)} g(s)\,ds \right\| = \left\| \sum_{k=0}^{[t]-2} \int_k^{k+1} e^{\kappa(t-s)} g(s)\,ds + \int_{[t]-1}^t e^{\kappa(t-s)} g(s)\,ds \right\| \leq$$

$$\leq \left\| \sum_{k=0}^{[t]-2} \left(\int_k^{k+1} e^{2\kappa(t-s)} e^{2\gamma s}\,ds \right)^{1/2} \left(\int_k^{k+1} e^{-2\gamma s} g^2(s)\,ds \right)^{1/2} \right\| +$$

$$+ \left\| \left(\int_{[t]-1}^t e^{2\kappa(t-s)} e^{2\gamma s}\,ds \right)^{1/2} \left(\int_{[t]-1}^t e^{-2\gamma s} g^2(s)\,ds \right)^{1/2} \right\| \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{[t]-2} e^{\kappa t} \left[\left(\frac{1}{2(\gamma-\kappa)} \left(1 - e^{-2(\gamma-\kappa)}\right) \right)^{1/2} e^{(\gamma-\kappa)k} + \left(\frac{2}{\gamma-\kappa} \right)^{1/2} e^{\gamma t} \right] \| g \|_{M_\gamma^2(R)} \leq$$

$$\leq e^{\gamma t} \left[\left(\frac{1}{e^{\gamma-\kappa}} \left(\frac{1}{2(\gamma-\kappa)} \left(1 + e^{\gamma-\kappa}\right) \right) \right)^{1/2} + \left(\frac{2}{\gamma-\kappa} \right)^{1/2} \| g \|_{M_\gamma^2(R)}. \right.$$

При $t < 0$ соответствующая оценка получается заменой γ на $-\gamma$. Таким образом, выполняется неравенство

$$\left\| \int_0^t e^{\kappa(t-s)} g(s)\,ds \right\|_{C_\gamma(R)} \leq K(\gamma-\kappa) \| g \|_{M_\gamma^2(R)}, \tag{15}$$

где

$$K(\alpha) = \frac{1}{e^\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} (1 + e^\alpha)^{1/2} + \left(\frac{2}{\alpha} \right)^{1/2}.$$

Пусть $g \in \mathcal{V} \cap \mathcal{V}_\mu$ и $\mu > \nu$, где ν определено в лемме 2. Из леммы 2 и неравенства (15) следует неравенство

$$\left\| \frac{\partial p(t, \eta, q)}{\partial q} g \right\|_{C_\mu(E_1)} \leq l_\varepsilon k(2\rho) K(\mu - \nu) \| g \|_{\mathcal{V}_\mu}. \tag{16}$$

Из условия на спектр оператора A и неравенства (3) следует, что оператор $L^{-1}: \mathcal{X} \to \mathcal{V}$ является ограниченным оператором, где L определено согласно (1).

Лемма 3. *Найдется такое* $\alpha_0 > 0$, *что при* $\alpha \in [0, \alpha_0]$ *операторы* L^{-1}: $\mathcal{X}_\alpha \to \mathcal{V}_\alpha$ *существуют, а их нормы не превышают* $2 \| L^{-1} \|_{\mathrm{Hom}(\mathcal{X}, \mathcal{V})}$.

Доказательство. Пусть $\zeta \in \mathcal{X}_\alpha$, $\alpha > 0$. Обозначим через $\delta_n: R \to [0, 1]$ гладкую функцию, равную 1 при $|t| < n$ и 0 при $|t| > n + 1$, $|\delta_n'| \leq 2$. Определим функцию $r(t) = e^{-\alpha |t|}$. Обозначив $u_n = L^{-1}(\zeta, \delta_n)$, для функции $v_n = u_n r$

получим $Lv_n = r\delta_n\zeta + u_n r'_n$. Поэтому $\|v_n\|_{\mathcal{V}} \le \|L^{-1}\|_{\mathrm{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{V})}(\|r\delta_n\zeta\|_{\mathcal{X}} + \|u_n r'\|_{\mathcal{X}})$.

Так как $|r'| \le |r|\alpha$, а $\|u_n r\|_{\mathcal{X}} \le \|u_n r\|_{\mathcal{V}}$, то при $\|L^{-1}\|_{\mathrm{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{V})}\alpha < 1/2$ получим $\|u_n r\|_{\mathcal{V}} \le 2\|L^{-1}\|_{\mathrm{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{V})}\|r\delta_n\zeta\|_{\mathcal{X}}$.

Переходя к пределу при $n \to \infty$, убеждаемся в справедливости леммы.

Лемма 4. *Пусть $p(t)$ является непрерывной на вещественной оси функцией, принимающей значения в E_1.*

Тогда существует такое ρ_1, что для любого $\rho < \rho_1$ уравнение

$$Lq = \dot{q} + Aq = Qh_\rho(p(t), q) \tag{17}$$

имеет в пространстве $\mathcal{V}$ единственное решение $q(t, p)$, которое удовлетворяет неравенству $\|q(\cdot, p)\|_{\mathcal{V}} \le b_1\rho k(2\rho) \le \rho$, где $b_1 = \|L^{-1}\|_{\mathrm{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{V})}$.

Если $p_1(t)$, $p_2(t)$ — непрерывные на вещественной оси функции, причем $q(t, p_1)$, $q(t, p_2)$ непрерывны по t как функции со значениями в пространстве E_2 и, кроме того, выполняется неравенство $\|p_1 - p_2\|_{C_\alpha} \le \zeta$, то при $0 \le \alpha \le \alpha_0$, где α_0 определено в лемме 3, а также при $0 < \rho < \rho_2 < \rho_1$, где ρ_2 — наименьший положительный корень уравнения $2bk(2\rho)\beta = 1/2$, справедливо неравенство $\|q(\cdot, p_1) - q(\cdot, p_2)\|_{C_\alpha(E_2)} \le 4b_1^2 k(2\rho)\beta b_2\zeta$, где $b_2 = \|A + I\|_{\mathrm{Hom}(E_1, E_1)}$.

Доказательство. Пусть $q \in \mathcal{V}$, $\|g\|_{\mathcal{V}} \le \rho$. Обозначим $S(q) = L^{-1}Qh_\rho(p(t), q)$. Из неравенства (8) и определения b_1 следует неравенство

$$\|S(q)\|_{\mathcal{V}} \le b_1\rho k(2\rho) < \rho,$$

справедливое для всех $\rho \le \rho_1$ таких, что $b_1 k(2\rho) \le 1/4$. Использование неравенства (7) приводит к неравенству

$$\|Sq_1 - Sq_2\|_{\mathcal{V}} \le b_1 k(2\rho)\|q_1 - q_2\|_{\mathcal{V}} \le \frac{1}{4}\|q_1 - q_2\|_{\mathcal{V}},$$

где $\|q_i\| \le \rho$, $i = 1, 2$; $\rho \le \rho_1$. Следовательно, уравнение $q = S(q)$ имеет в полном метрическом пространстве $\mathcal{V}(\rho) = \{q \in \mathcal{V} : \|q\| \le \rho < \rho_1\}$ единственную неподвижную точку $q = q(t, p)$, которая является ограниченным в $\mathcal{V}$ решением уравнения (17), удовлетворяющим условию $\|q(\cdot, p)\| \le \rho < \rho_1$. Для доказательства второго утверждения леммы обозначим

$$q(\cdot, p_i) = q_i, \quad i = 1, 2; \quad q_1 - q_2 = \hat{q},$$

$$F = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial q} h_\rho(p_1 + s(p_2 - p_1), q_1 + s(q_2 - q_1))\,ds,$$

$$G = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial p} h_\rho(p_1 + s(p_2 - p_1), q_1 + s(q_2 - q_1))\,ds,$$

$$F_1 = (A + I)F(A + I)^{-1}, \quad G_1 = (A + I)G(A + I)^{-1}$$

и рассмотрим уравнения

$$\hat{q} = L^{-1}Q(F\hat{q} + G(p_2 - p_1)), \tag{18}$$

$$\hat{q}_1 = L^{-1}Q(F_1\hat{q}_1 + G_1(A+I)(p_2-p_1)). \tag{19}$$

Из неравенства (7) и леммы 3 следует, что уравнение (18) разрешимо в пространстве $\mathcal{V}_\alpha$, $0<\alpha<\alpha_0$, а решение $\hat{q}$ удовлетворяет неравенству

$$\|\hat{q}\|_{\mathcal{V}_\alpha} \le 4b_1k(2\rho)\zeta.$$

Используя условие 3, приходим (по аналогии с рассмотрением уравнения (18)) к заключению, что уравнение (19) разрешимо в пространстве $\mathcal{V}_\alpha$, если выполнено условие $2b_1k(2\rho)\beta < 1/2$, причем его решение $\hat{q}_1$ удовлетворяет неравенству

$$\|\hat{q}_1\|_{\mathcal{V}_\alpha} \le 4b_1k(2\rho)\beta\|A+I\|_{\mathrm{Hom}(E_1,E_1)}\zeta.$$

Уравнение (19) получено применением к левой и правой частям уравнения (18) оператора $(A+I)$ и введением обозначения $\hat{q}_1 = (A+I)\hat{q}$.

Следовательно, выполняется неравенство

$$\|(A+I)\hat{q}\|_{\mathcal{V}_\alpha} \le 4b_1k(2\rho)\beta\|A+I\|_{\mathrm{Hom}(E_1,E_2)}\zeta.$$

Воспользовавшись полученной оценкой, приходим к неравенству

$$\|\hat{q}\|_{C_\alpha(E_2)} \le \|(A+I)^{-1}(A+I)\hat{q}\|_{C_\alpha(E_2)} \le$$

$$\le \|(A+I)^{-1}\|_{\mathrm{Hom}(H_2,E_2)}\|(A+I)\hat{q}\|_{C_\alpha(H_2)} \le$$

$$\le \|(A+I)^{-1}\|_{\mathrm{Hom}(H_2,E_2)}\|(A+I)\hat{q}\|_{\mathcal{V}_\alpha} \le$$

$$\le 4b_1k(2\rho)\beta\|A+I\|_{\mathrm{Hom}(E_1,E_1)}\|(A+I)^{-1}\|_{\mathrm{Hom}(H_2,E_2)}\zeta.$$

Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть $p(\cdot)$ — дифференцируемая на вещественной оси функция со значениями в E_1 такая, что $\dot{p} \in M^2_\alpha(E_1)$.*

Тогда существует такое $\alpha_1 \le \alpha_0$, что при $0 \le \alpha < \alpha_1$ функция $q(t,p)$, определенная в лемме 4, является дифференцируемой по t, причем $\frac{d}{dt}q(t,p) = q'(t) \in \mathcal{V}_\alpha$ и

$$\frac{d}{dt}q' + Aq' = Q\frac{\partial h_\mathrm{p}(p(t),q(t))}{\partial q}q' + Q\frac{\partial h_\mathrm{p}(p(t),q(t))}{\partial p}\dot{p}(t), \tag{20}$$

где $q(t) = q(t,p)$, кроме того, справедливо неравенство $\|q'\|_{\mathcal{V}_\alpha} \le$ $\le 4b_1k(2\rho)\|\dot{p}\|_{M^2_\alpha(E_1)}$.

Доказательство. Пусть $g \in \mathcal{X}$, $g' \in \mathcal{X}$. Установим справедливость равенства

$$\frac{d}{dt}L^{-1}g = L^{-1}g'. \tag{21}$$

Для этого воспользуемся представлением L^{-1}:

$$(L^{-1}g)(t) = q(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-A(t-s)}g(s)\,ds,$$

где $\{e^{-At}\}_{t\ge0}$ — сильно непрерывная полугруппа в пространстве H_2 с инфинитезимальным генератором $-A$. Из условия 1 на спектр оператора A следует, что существуют такие положительные постоянные b_3, γ, что справедливо неравенство

$$\| e^{-At} q_0\|_{H_2} \le b_3 e^{-\gamma t} \| q_0 \|_{H_2}, \quad t \ge 0, \tag{22}$$

для любого $q_0 \in H_2$. Из неравенства (22), воспользовавшись коэрцитивностью оператора A, получим оценку

$$\int_t^{t+1} \left\| e^{-As} q_0 \right\|_E^2 ds \le \frac{1}{2} c_1^{-1} b_3^2 e^{-2\gamma t} \| q_0 \|_{H_2}.$$

Аналогичные оценки получим, заменив A на A^*. Без ограничения общности можно считать, что при такой замене постоянные в неравенствах сохраняются.

Пусть $\xi \in H_2$. Нетрудно убедиться, что из неравенства

$$|(q(t), \xi)| = \left| \int_{-\infty}^{t} (e^{-A(t-s)} g(s), \xi) ds \right| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} \int_k^{k+1} (g(t-\tau), e^{-A^*\tau}\xi) d\tau \right| \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_k^{k+1} \| g(t-\tau) \|_{E_2^*}^2 d\tau \right)^{1/2} \left(\int_k^{k+1} \left\| e^{-A^*\tau}\xi \right\|_{E_2}^2 \right)^{1/2} \le$$

$$\le \| g \|_{\mathscr{X}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2} c_1^{-1/2} b_3 e^{-\gamma_k} \| \xi \|_{H_2} = \frac{c_1^{-1/2} b_3/2}{1-e^{-\gamma}} \| g \|_{\mathscr{X}} \| \xi \|$$

следует неравенство

$$\left\| \int_{-\infty}^{t} e^{-A(t-s)} g(s) ds \right\|_{H_2} = \| q(t) \|_{H_2} \le b_4 \| g \|_{\mathscr{X}},$$

где

$$b_4 = \frac{c_1^{-1/2} b_3/2}{1-e^{-\gamma}}.$$

Используя априорную оценку (3), получаем неравенство

$$\| q(t) \|_{\mathscr{V}} = \| (L^{-1} g) \|_{\mathscr{V}} \le \frac{1}{2} c_1^{-1/2} b_4 \| g \|_{\mathscr{X}}.$$

Для функции $q_1 = L^{-1} g'$ справедливы аналогичные оценки. Используя теорему Фубини, записываем

$$\int_{t_0}^{t} q_1(\sigma) d\sigma = \int_{t_0}^{t} d\sigma \int_{-\infty}^{\sigma} e^{-A(s-\sigma)} g'(s) ds = \int_{t_0}^{t} d\sigma \int_0^{\infty} e^{-As} g'(\sigma - s) ds =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-As} ds \int_{t_0}^{t} g'(\sigma - s) ds = \int_0^{\infty} e^{-As} (g(t-s) - g(t_0 - s)) ds = q(t) - q(t_0),$$

откуда следует справедливость равенства (21). Заметим, что равенство (21) остается справедливым и в случае $g \in \mathscr{X}_\alpha$, $g' \in \mathscr{X}_\alpha$, $0 < \alpha < \alpha_0$, где α_0 определено в лемме 3.

Рассмотрим следующие уравнения:

$$
Lq = \frac{d}{dt} q + Aq = Q h_\rho(p(t), q_k(t)),
$$
$$
L\hat{q} = \frac{d}{dt}\hat{q} + A\hat{q} = Q \frac{\partial h_\rho(p(t), q_k(t))}{\partial q} q_k'(t) + Q \frac{\partial h_\rho(p(t), q_k(t))}{\partial p} \dot{p}(t). \tag{23}
$$

Обозначим

$$
q_{k+1} = L^{-1} Q h_\rho(p(\cdot), q_k(\cdot)), \quad k = 0, 1, 2, \ldots
$$
$$
\hat{q}_{k+1} = L^{-1} Q \left(\frac{\partial h_\rho(p(\cdot), q_k(\cdot))}{\partial q} q_k' + \frac{\partial h_\rho(p(\cdot), q_k(\cdot))}{\partial p} \dot{p} \right), \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{24}
$$
$$
q_0(\cdot) = 0.
$$

Согласно равенству (21) имеем $q_k' = \hat{q}_k$. Из леммы 4 следует, что последовательность q_k сходится сильно в пространстве $\mathcal{V}$ к функции q, которая является ограниченным в $\mathcal{V}$ решением уравнения (17). Из неравенства (7) и леммы 5 следует, что последовательность $\hat{q}_k$ в пространстве $\mathcal{V}_\alpha$ является ограниченной:

$$
\| \hat{q}_k \|_{\mathcal{V}_\alpha} \le 4 b_1 k(2\rho) \| \dot{p} \|_{M_\alpha^2(E_1)}.
$$

Более того, используя условие 4, получаем оценку

$$
\| (A + I) \hat{q}_k \|_{\mathcal{V}_\alpha} \le 4 b_1 k(2\rho) \beta b_2 \| \dot{p} \|_{M_\alpha^2(E_1)}.
$$

Отсюда в соответствии с равенствами (24) следует ограниченность последовательности $\frac{d}{dt}\hat{q}_k$ в пространстве $\mathcal{V}_\alpha$. Таким образом, для любого $T > 0$ последовательности $\{\hat{q}_k\}$, $\left\{\frac{d}{dt}\hat{q}_k\right\}$ ограничены в пространстве $\mathcal{L}^2([-T, T], E_2)$. Согласно теореме 5.1 [18] из последовательности $\hat{q}_k$ можно выделить сходящуюся в этом пространстве подпоследовательность. Можно считать, что $\hat{q}_k \to \hat{q}$. При этом имеет место слабая сходимость $\frac{d}{dt}\hat{q}_k \to \frac{d}{dt}\hat{q}$ в пространстве $\mathcal{L}^2([-T, T], E_2)$. Отсюда следует, что в равенствах

$$
\left(\frac{d}{dt}\hat{q}_{k+1}, \xi \right) + (A\hat{q}_{k+1}, \xi) = \left(Q \frac{\partial h_\rho(p(t), q_k(t))}{\partial q} \hat{q}_k + Q \frac{\partial h_\rho(p(t), q_k(t))}{\partial p} \dot{p}(t), \xi \right),
$$

где ξ — финитная в E_2 функция, можно перейти к пределу при $k \to \infty$. В результате получаем равенство

$$
\left(\frac{d}{dt}\hat{q}, \xi \right) + (A\hat{q}, \xi) = \left(Q \frac{\partial h_\rho(p(t), q(t))}{\partial q} \hat{q} + Q \frac{\partial h_\rho(p(t), q(t))}{\partial p} \dot{p}, \xi \right).
$$

Следовательно, $\hat{q}$ удовлетворяет уравнению (20). Из равенства

$$
q_k(t) - q_k(t_0) = \int_{t_0}^{t} \hat{q}_k(s)\, ds
$$

с помощью предельного перехода получаем равенство

$$
q(t) - q(t_0) = \int_{t_0}^{t} \hat{q}(s)\, ds,
$$

что и завершает доказательство леммы.

Перейдем к доказательству теоремы 1. Выберем $\rho_0 < \rho_1$, где постоянная ρ_1 определена в лемме 4. Дальнейшие ограничения на ρ_0 будут получены в ходе доказательства теоремы. Выберем $(\eta, q) \in E_1 \times \mathcal{V}$, $\|q\|_{\mathcal{V}} \le \rho < \rho_0$. Определим согласно лемме 1 функцию $p(t) = p(t, \eta, q)$, а согласно лемме 4 функцию $q(t, p(\cdot)) = \hat{q}(t, p(\eta, q))$, для которой выполняется неравенство

$$\| \hat{q}(t, p(\eta, q)) \|_{\mathcal{V}} \le b_1 \rho k(2\rho) < \rho.$$

Определим оператор Φ равенством

$$\Phi(\eta, q)(t) = \hat{q}(t, p(\eta, q)). \tag{25}$$

Положим $\varepsilon = \alpha_0 / 4$, где постоянная α_0 определена в лемме 3, и пусть при $\rho \le$ $\le \rho_0$ выполняется неравенство $4 l_\varepsilon k(2\rho) \le \alpha_0$, где l_ε — постоянная в неравенстве (10). Пусть $(\eta_i, q_i) \in E_1 \times \mathcal{V}$, $\|q_i\|_{\mathcal{V}} \le \rho$, $i = 1, 2$. Из леммы 2 и неравенства (16) следует неравенство

$$\| p(\cdot, \eta_1, q_1) - p(\cdot, \eta_2, q_2) \|_{C_{\alpha_0}(E_1)} \le$$

$$\le l_{\alpha_0/4} \left(2\|\eta_1 - \eta_2\|_{E_1} + k(2\rho) K\left(\frac{\alpha_0}{2}\right) \| q_1 - q_2 \|_{\mathcal{V}_{\alpha_0}} \right).$$

Согласно лемме 4 из этого неравенства следует неравенство

$$\| \Phi(\eta_1, q_1) - \Phi(\eta_2, q_2) \|_{\mathcal{V}_{\alpha_0}} \le 2 \| \Phi(\eta_1, q_1) - \Phi(\eta_2, q_2) \|_{C_{\alpha_0}(E_2)} \le$$

$$\le 2 \cdot 4 \cdot b_1^2 b_2 \beta k(2\rho) l_{\alpha_0/4} \left(2\|\eta_1 - \eta_2\|_{E_1} + k(2\rho) K\left(\frac{\alpha_0}{2}\right) \| q_1 - q_2 \|_{\mathcal{V}_{\alpha_0}} \right). \tag{26}$$

Пусть при $\rho < \rho_0$ выполняется неравенство

$$8 b_1^2 b_2 \beta k^2(2\rho) l_{\alpha_0/4} K\left(\frac{\alpha_0}{2}\right) \le \frac{1}{2}.$$

Введем в пространстве $\mathcal{V}(\rho) = \{ v \in \mathcal{V} : \|v\|_{\mathcal{V}} \le \rho \}$, где $\rho < \rho_0$, а ρ_0 удовлетворяет сформулированным выше требованиям, расстояние согласно равенству $\||q_1 - q_2\|| = \| q_1 - q_2 \|_{\mathcal{V}_{\alpha_0}}$. Неравенство (26) согласно введенной метрике и ограничению на выбор ρ_0 принимает вид

$$\||\Phi(\eta_1, q_1) - \Phi(\eta_2, q_2)\|| \le 2 \| \Phi(\eta_1, q_1) - \Phi(\eta_2, q_2) \|_{C_{\alpha_0}(E_2)} \le$$

$$\le c_3 k(2\rho) \| \eta_1 - \eta_2 \|_{E_1} + \frac{1}{2} \||q_1 - q_2\||, \tag{27}$$

где $c_3 = 16 b_1^2 b_2 \beta l_{\alpha_0/4}$. Применяя принцип сжимающих отображений, убеждаемся, что уравнение

$$q = \Phi(\eta, q)$$

имеет в пространстве $\mathcal{V}(\rho)$ единственное решение $q = q(t, \eta)$. Определим функцию $p(t, \eta)$ формулой $p(t, \eta) = p(t, \eta, q(\cdot, \eta))$. Тогда $p(t, \eta)$, $q(t, \eta)$ — единственное решение системы (9) такое, что $p(0, \eta) = \eta$, $\| q(t, \eta) \|_{\mathcal{V}} \le \rho$. Из определения $q(t, \eta)$ и леммы 5 следует, что $\dfrac{d}{dt} q(t, \eta) \in \mathcal{V}_{\alpha_1}$. Согласно лемме 1.2 [18] функция $q(t, \eta)$ является непрерывной функцией t со значениями в пространстве E_2.

Теперь докажем теорему о существовании инвариантного многообразия системы (9).

Теорема 2. *Пусть система уравнений* (9) *удовлетворяет сформулированным выше условиям.*

Тогда существует такое ρ_0, *что при* $\rho < \rho_0$ *система* (9) *имеет инвариантное многообразие*

$$\mathcal{M} = \{(p, q) : q = \Omega(p),\ p \in E_1\},$$

где $\Omega(p)$ *принимает значения в пространстве* E_2, $\Omega(0) = 0$ *и, кроме того,* $\Omega(p)$ *удовлетворяет условию Липшица* $\|\Omega(p_1) - \Omega(p_2)\|_{E_2} \le c_3 k(2\rho) \|p_1 - p_2\|_{E_1}$, *где* c_3 — *постоянная, определенная в теореме* 1.

Доказательство. Пусть $p(t, \eta)$, $q(t, \eta)$ — решение системы (9), определенное согласно теореме 1. Для $\eta \in E_1$ положим $\Omega(\eta) = q(0, \eta)$. Липшицевость функции Ω следует из теоремы 1 и определения Ω. Если $p(t)$, $q(t)$ — решение системы (9), определенное при всех t и $\|q(t)\|_{\mathcal{V}} \le \rho$, то из теоремы 1 о единственности решений следует, что

$$p(t) = p(t - \tau, p(\tau)), \quad q(t) = q(t - \tau, p(\tau))$$

при всех t, τ и, в частности, $q(\tau) = \Omega(p(\tau))$.

Обратно, если $q(\tau) = \Omega(p(\tau))$ при некотором τ, то решение с таким начальным условием существует в любой момент времени и $q(t) = \Omega(p(t))$.

Таким образом, $\mathcal{M}$ — инвариантное многообразие системы (9).

4. Задача Коши для системы (9). Обозначим через $C^+(E_1)$ пространство непрерывных и ограниченных на положительной полуоси функций со значениями в пространстве E_1. Соответственно введем пространства $\mathcal{X}^+$, $\mathcal{V}^+$, а также пространства $C^+_\lambda(E_1)$, $\mathcal{X}^+_\lambda$, $\mathcal{V}^+_\lambda$. Произвольно взятый элемент $f \in \mathcal{X}^+$ продолжим нулем на всю ось. Тогда $L^{-1} f \in \mathcal{V}$. Положим по определению

$$(T_+ f)(t) = (L^{-1} f)(t) - e^{-At}(L^{-1} f)(0), \quad t \ge 0.$$

Как следует из неравенства (22) и априорной оценки (3), оператор $T_+ : \mathcal{X}^+ \to \mathcal{V}^+$ является ограниченным. Таким образом,

$$\|T_+ f\|_{\mathcal{V}^+} \le b_3 \|f\|_{\mathcal{X}^+}. \tag{28}$$

Применяя лемму 3, приходим к заключению, что найдется такое $\alpha'_0 < \alpha_0$, что $T_+ \in \operatorname{Hom}(\mathcal{X}^+_\lambda, \mathcal{V}^+_\lambda)$ для всех $\alpha \in [0, \alpha'_0]$, причем

$$\|T_+ f\|_{\mathcal{V}_\alpha} \le 2 b_3 \|f\|_{\mathcal{X}^+_\alpha}. \tag{29}$$

Докажем теперь следующую теорему о существовании решения задачи Коши для уравнений (9).

Теорема 3. *Пусть система* (9) *удовлетворяет сформулированным выше условиям и* $\alpha \in [0, \alpha'_0]$.

Тогда существуют такие $\rho' > 0$, $0 < \delta < 1/2$, *что для каждого* $(p_0, q_0) \in E_1 \times H_2$, $\|q_0\|_{H_2} \le \delta\rho$ $(\rho < \rho')$ *существует определенное на положительной полуоси решение* (p, q) *системы* (9), *в которой* $\rho < \rho'$, *удовлетворяющее условиям* $p(0) = p_0$, $q(0) = q_0$, *причем* $p \in C^+_\alpha(E_1)$, $\|q\|_{\mathcal{V}^+} \le \rho$.

Доказательство. В пространстве $C^+_\alpha(E_1) \times \mathcal{V}^+$ введем расстояние по формуле $d((p_1, q_1), (p_2, q_2)) = \|p_1 - p_2\|_{C^+_\alpha(E_1)} + \|q_1 - q_2\|_{\mathcal{V}^+_\alpha}$. В полном метрическом пространстве

$$C_\alpha^+\mathcal{V}^+(\rho) = \{ (p, q) \in C_\alpha^+(E_1) \times \mathcal{V}^+ : \|q\|_{\mathcal{V}^+} \le \rho \}$$

рассмотрим оператор $\mathfrak{F}$, определяемый равенством

$$\mathfrak{F}(p, q)(t) = \begin{cases} \int_0^t e^{-A(t-s)} Ph_\rho(p(s), q(s))\, ds, \\ T_+ Qh_\rho(p, q)(t). \end{cases}$$

Из неравенств (8), (10) и (28) следует, что существует такое ρ', что $\mathfrak{F}$: $C_\alpha^+ \times \mathcal{V}^+(\rho) \to C_\alpha^+ \times \mathcal{V}^+(\rho/2)$. Из неравенств (7), (10) и (28) следует, что оператор $\mathfrak{F}$ является оператором сжатия для $\rho < \rho'$ при соответствующем выборе ρ'.

Рассмотрим уравнение

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}(t) = e^{-At} \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix} + \mathfrak{F}(p, q)(t), \tag{30}$$

эквивалентное задаче Коши для уравнений (9). Выберем $\delta \le 1/2$ из условия $\| e^{-At} q_0 \|_{\mathcal{V}_\alpha^+} \le \rho/2$ при $\| q_0 \| \le \delta\rho$. В этом случае к уравнению (30) применим принцип сжимающих отображений. Последнее завершает доказательство теоремы.

5. Применение центрального многообразия для исследования устойчивости нулевого решения исходного уравнения (принцип сведения). Система уравнений (9) на многообразии $\mathcal{M}$, определенном в теореме 2, принимает вид

$$\dot{p} + Ap = Ph_\rho(p, \Omega(p)). \tag{31}$$

Докажем теорему, формулирующую условия, при которых свойство устойчивости, асимптотической устойчивости, неустойчивости нулевого решения системы (9) обусловливается аналогичными свойствами нулевого решения уравнения (31). Для доказательства применим схему, изложенную, в частности, в [8, 10, 19]. Выберем достаточно малую величину δ и пусть $p_0 \in E_1$, $q_0 \in H_2$, причем $\| p_0 \| + \| q_0 \| < \delta\rho$. Обозначим через $\hat{p}(\cdot)$ решение уравнения (31), удовлетворяющее условию $\hat{p}(0) = p_0$.

Пусть нулевое решение уравнения (31) устойчиво. Тогда при соответствующем выборе δ величина $\| \hat{p}(\cdot) \|_{C^+}$ может быть сделана сколь угодно малой. Покажем, что существует решение $(p(\cdot), q(\cdot))$ системы (9) такое, что $q(0) - \Omega(p_0) = q_0$, причем $p(t) - \hat{p}(t)$, $q(t) - \Omega(\hat{p}(t))$ экспоненциально малы при $t \to \infty$. Обозначим $p - \hat{p}(t) = v$, $q - \Omega(\hat{p}(t)) = w$.

В новых переменных система (9) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{v} + Av &= Pf_\rho(v, w, t), \\ \dot{w} + Aw &= Qf_\rho(v, w, t), \end{aligned} \tag{32}$$

где $f_\rho(v, w, t) = h_\rho(v + \hat{p}(t), w + \Omega(\hat{p}(t))) - h_\rho(\hat{p}(t), \Omega(\hat{p}(t)))$.

Из определения f_ρ и неравенств (7), (8) следуют неравенства

$$\| f_\rho(v, w, t) \|_{\mathcal{X}^+} \le 2\rho\, k(2\rho), \tag{33}$$

где $(v, w) \in C^+ \times \mathcal{V}^+$, $\| w \|_{\mathcal{V}^+} \le \rho/2$, и

$$\| f_\rho(v_1, w_1, t) - f_\rho(v_2, w_2, t) \|_{\mathcal{X}_\lambda^+} \le k(2\rho) \left(\| v_1 - v_2 \|_{C_\lambda^+} + \| w_1 - w_2 \|_{\mathcal{V}_\lambda^+} \right), \tag{34}$$

где $(v_i, w_i) \in C^+ \times \mathcal{V}^+$, $\| w_i \|_{\mathcal{V}^+} \le \rho/2$, $i = 1, 2$.

Рассмотрим определенный в п. 4 оператор T_+. Согласно [16, с. 1401] имеем $T_+ \in \operatorname{Hom}(\mathscr{X}^+_{-\beta}, \mathscr{V}^+_{-\beta})$, где $\beta \in [0, \beta_0]$, при этом

$$\| T_+ f \|_{\mathscr{V}^+_{-\beta}} \leq 2b_3 \| f \|_{\mathscr{X}^+_{-\beta}}. \tag{35}$$

Выберем $\beta > 0$ из промежутка $[0, \beta_0]$, а также выберем $v(\cdot) \in C^+_{-\beta}$ и рассмотрим задачу

$$\dot{w} + Aw = Qf_\rho(v(t), w, t), \quad w(0) = q_0. \tag{36}$$

Докажем, что решение $w(\cdot)$ задачи (35) принадлежит пространству $\mathscr{V}^+_{-\beta}$. С этой целью рассмотрим уравнение

$$w(t) = e^{-At} q_0 + T_+ Q f_\rho(v(\cdot), w, \cdot)(t) = D(w)(t).$$

Из неравенств (34), (35), а также включения $e^{-At} q_0 \in \mathscr{V}^+_{-\beta}$ следует, что с помощью метода последовательных приближений, примененного к уравнению

$$w = D(w)$$

с $w^0(t) = e^{-At} q_0$, получаем последовательность приближенных решений, сходящуюся к решению $\tilde{w} \in \mathscr{V}^+_{-\beta}$, причем выполняется неравенство

$$\| \tilde{w} \|_{\mathscr{V}^+_{-\beta}} \leq 2 \| e^{-At} q_0 \|_{\mathscr{V}^+_{-\beta}}. \tag{37}$$

Из определения D следует, что w — решение задачи (36). Так как оператор $D(w) = D(v, q_0, w)$ является оператором сжатия равномерно по параметрам $v \in C^+_{\beta}$, $q_0 \in H_2$, то ввиду непрерывной зависимости $D(v, q_0, w)$ от v, q_0 неподвижная точка $\tilde{w}$ оператора D является непрерывной функцией v, q_0. Из непрерывной зависимости f_ρ от $\hat{p}(\cdot)$ следует также, что $\tilde{w}$ является непрерывной функцией параметра p_0.

Используя неравенства (34), нетрудно получить неравенство

$$\| \tilde{w}(v_1) - \tilde{w}(v_2) \|_{\mathscr{V}^+_{-\beta}} \leq 2k(2\rho) \| v_1 - v_2 \|_{C^+_{-\beta}}. \tag{38}$$

Рассмотрим в пространстве $C^+_{-\beta}$ уравнение

$$\tilde{v} = \mathscr{P}(\tilde{v}, v),$$

где

$$\mathscr{P}(\tilde{v}, v)(t) = \int_t^\infty e^{-A(t-s)} P f_\rho(\tilde{v}(s), \tilde{w}(s, v), s)\, ds. \tag{39}$$

Отсюда, учитывая оценку (10), а также неравенство (34), получаем

$$\| \mathscr{P}(\tilde{v}_1, v) - \mathscr{P}(\tilde{v}_2, v) \|_{C^+_{-\beta}} \leq D_{\beta/2} \frac{2}{\beta} k(2\rho) \| \tilde{v}_1 - \tilde{v}_2 \|_{C^+_{-\beta}}. \tag{40}$$

Из полученного неравенства следует, что естественно принять $\beta = \beta_0$ и выбрать ρ_0 из условия

$$D_{\beta/2} \frac{2}{\beta} k(2\rho_0) \leq \frac{1}{2}.$$

В этом случае при $0 < \rho \leq \rho_0$ оператор $\mathscr{P}$ в пространстве $C^+_{-\beta}$ имеет неподвижную точку, если $\tilde{v}_1 = \mathscr{P}(0, v) \in C^+_{-\beta}$. Из неравенств (10), (34), (37) и равенства $f_\rho(0, 0, t) = 0$ следует, что $v_1 \in C^+_{-\beta}$ и справедливо неравенство

$$\|\tilde{v}_1\|_{C^+_{-\beta}} \le \|e^{-At}q_0\|_{\mathcal{V}^+_{-\beta}}.$$

Таким образом, последовательность приближенных решений уравнения (39) сходится к неподвижной точке $\tilde{v} = \tilde{v}(q_0, v)$ отображения $\mathcal{P}$, удовлетворяющей неравенству

$$\|\tilde{v}(q_0, v)\|_{C^+_{-\beta}} \le 2\|e^{-At}q_0\|_{\mathcal{V}^+_{-\beta}}. \tag{41}$$

Принимая во внимание (34) и (38), получаем неравенство

$$\|\tilde{v}(q_0, v_1) - \tilde{v}(q_0, v_2)\|_{C^+_{-\beta}} \le 4k(2\rho)\|v_1 - v_2\|_{C^+_{-\beta}}.$$

Следовательно, уравнение

$$v = \tilde{v}(q_0, v)$$

в пространстве $C^+_{-\beta}$ имеет неподвижную точку, удовлетворяющую условию (41). Очевидно, что неподвижная точка v отображения $\tilde{v}$ является непрерывной функцией (p_0, q_0). Обозначим $v = v(p_0, q_0)$, $w = w(v(p_0, q_0))$.

Из приведенных выше рассуждений следует, что v, w является решением системы (32) таким, что $w(0) = q_0$, $v \in C^+_{-\beta}$, $w \in \mathcal{V}^+_{-\beta}$, где $\beta = \beta_0$.

Таким образом, доказано существование решения системы (9) вида

$$p = \hat{p} + v, \quad q = \Omega(\hat{p}) + w. \tag{42}$$

Докажем, что любое решение системы (9) с начальными условиями из окрестности нуля в пространстве $E_1 \times H_2$ представимо в виде (42).

С этой целью определим отображение T формулой

$$\mathrm{T}(p_0, q_0) = (p_0 + v(0), \Omega(p_0) + q_0).$$

Из непрерывности $\Omega(p_0)$, $v(0) = v(p_0, q_0)(0)$ следует, что T — непрерывное в окрестности нуля отображение. Из единственности решения задачи Коши для системы (32) и асимптотического поведения $v(t)$ следует, что отображение T является взаимно однозначным. Отсюда следует, что T — открытое отображение. Так как $\mathrm{T}(0, 0) = (0, 0)$, то это доказывает, что образ T содержит окрестность нуля в $E_1 \times H_2$.

Итак, любое решение системы (9) с начальными условиями из достаточно малой окрестности нуля представимо в виде

$$\hat{p}(t) + v(t), \quad \Omega(\hat{p}(t)) + w(t),$$

где $(v(\cdot), w(\cdot)) \in C^+_{-\beta} \times \mathcal{V}^+_{-\beta}$.

Таким образом, устойчивость, асимптотическая устойчивость, неустойчивость нулевого решения уравнения (31) обусловливают соответственно устойчивость, асимптотическую устойчивость, неустойчивость нулевого решения системы (9).

Анализ проведенных выше рассуждений приводит к заключению, что вместо нулевого решения уравнения (31) можно рассматривать любое инвариантное множество этого уравнения. С точки зрения исследования исходного уравнения (1) интерес представляют инвариантные множества уравнения (31), лежащие в ρ-окрестности нуля пространства E_2.

В итоге можем сформулировать следующую основную теорему.

Теорема 3. *Пусть рефлексивное банахово пространство E является вложимым. Предположим, что $A \in \mathrm{Hom}(E, E^*)$ — коэрцитивный оператор, спектр которого удовлетворяет условию 1, а оператор $h: E \to E^*$ удовлетворяет условиям 2 – 4.*

Тогда уравнение $\dot{u} + Au = h(u)$ *имеет* m*-мерное центральное многообразие вида*

$$\mathcal{M} = \{ (u, p) \colon u = p + \Omega(p), \ \| p \|_{E_1} < \rho \} \subset E,$$

где ρ *— некоторое положительное число. Функция* Ω *удовлетворяет условию Липшица* $\| \Omega(p_1) - \Omega(p_2) \|_{E_2} \le k(2\rho) \| p_1 - p_2 \|_{E_1}$.

Множество $\mathcal{M}$ *является максимальным инвариантным подмножеством множества* $\{ u = p + q, \ \| p \|_{E_1} < \rho, \ \| q \|_{E_2} \le k(2\rho) \}$.

Пусть множество Σ *является инвариантным множеством уравнения* (1) *и* $\Sigma \subset \mathcal{M}$. *Если* Σ *устойчиво, асимптотически устойчиво, неустойчиво относительно потока, определяемого уравнением* (1) *на* $\mathcal{M}$, *т о* Σ *— с о о т в е т с т в е н н о устойчивое, асимптотически устойчивое, неустойчивое инвариантное множество уравнения* (1).

1. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. – М.; Л.: Наука, 1950. – 383 с.
2. *Боголюбов Н. Н.* О некоторых статистических методах в математической физике. – Львов: Изд-во АН СССР, 1945. – 137 с.
3. *Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике. – М.: Наука, 1973. – 513 с.
4. *Лыкова О. Б., Барис Я. С.* Приближенные интегральные многообразия. – Киев: Наук. думка, 1993. – 314 с.
5. *Лыкова О. Б.* О поведении решений системы нелинейных дифференциальных уравнений в окрестности изолированного статистического решения // Докл. АН СССР. – 1957. – **115**, № 3. – С. 447–449.
6. *Лыкова О. Б.* Исследование решений нелинейных систем, близких к интегрирующимся, с помощью метода интегральных многообразий // Междунар. симп. по нелинейн. колебаниям. 1. – Киев: Изд-во АН УССР, 1963. – С. 315–327.
7. *Плисс В. А.* Нелокальные проблемы теории колебаний. – М.: Наука, 1964. – 368 с.
8. *Kelly Al.* The stable, center-stable, unstable manifolds // J. Math. Anal. and Appl. – 1967. – **18**, № 2. – P. 330–344.
9. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 534 с.
10. *Лыкова О. Б.* Принцип сведения в банаховом пространстве // Укр. мат. журн. – 1971. – **23**, № 4. – С. 464–471.
11. *Лыкова О. Б.* О принципе сведения для дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами // Там же. – 1975. – **17**, № 2. – С. 240–243.
12. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. – М.: Мир, 1985. – 376 с.
13. *Марсден Дж., Мак-Кракен М.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения. – М.: Мир, 1980. – 368 с.
14. *Хэссард Б., Козаринов Н., Вэн И.* Теория и приложения бифуркации рождения цикла. – М.: Мир, 1985. – 280 с.
15. *Coppel W. A., Palmer K. J.* Averaging and integral manifolds // Bull. Matn. Soc. – 1970. – P. 197–222.
16. *Жиков В. В.* Некоторые вопросы допустимости и дихотомии. Принцип усреднения // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1976. – **40**, № 6. – С. 1380–1408.
17. *Белан Е. П., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия и экспоненциальное расщепление параболических уравнений с быстро меняющимися коэффициентами // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 12. – С. 1593–1608.
18. *Лионс Ж.-П.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 588 с.
19. *Carr J.* Aplication of center manifolds theory. – New York: Springer, 1981. – 142 p.

Получено 16.02.96