УДК 517.9

Б. В. Базалий, Н. В. Краснощек
(Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ*

We formulate the problem of filtration with free boundary as a problem with discontinuous nonlinearity for a degenerate elliptic or parabolic system. We prove that a solution of the Dirichlet problem exists in both cases. We study qualitative properties of these solutions, in particular, the existence of a "dead core".

Задача фільтрації з вільною межею формулюється як задача з розривною нелінійністю для виродженої еліптичної або параболічної системи. Доведено, що розв'язок задачі Діріхле існує в обох випадках. Досліджуються деякі якісні властивості цих розв'язків, наприклад, існування „мертвих зон".

1. Введение. В последнее время к задачам со свободной границей получил распространение подход, основанный на формулировке их как задач с „разрывной нелинейностью" [1, 3]. В данной работе изучается система уравнений, возникающая при моделировании процессов фильтрации в трещиновато-пористой среде [4]. В этой модели область течения разбивается на две подобласти Ω_+ и Ω_-, которые характеризуются тем, что одна из искомых функций u_1 (давление в трещинах) положительна и равна нулю в Ω_+ и Ω_0 соответственно.

В Ω_+ неизвестные функции $u_1(x)$ и $u_2(x)$ (давление в блоках) удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} -g\Delta u_1^m &= u_2 - u_1; \\ -\varepsilon g\Delta u_2 &= u_1 - u_2; \end{aligned} \tag{1}$$

а в Ω_0 —

$$-\Delta u_2 = 0; \quad u_1 = 0. \tag{2}$$

Если Ω_0 — непустое множество, а его существование заранее не преполагается, то на неизвестной границе $\partial\Omega_0 \cap \partial\Omega_+$ выполнены условия

$$u_1 = \frac{\partial u_1^m}{\partial \nu} = 0; \quad [u_2] = \left[\frac{\partial u_2}{\partial \nu}\right] = 0. \tag{3}$$

Здесь g, ε, m — положительные константы, причем $m > 1$; ν — внешняя к Ω_+ нормаль, а $[\cdot]$ обозначает скачок функции на свободной границе $\partial\Omega_0 \cap \cap \partial\Omega_+$.

Легко видеть, что уравнения (1), (2) можно записать в виде

$$\begin{aligned} -g\Delta u_1^m &= h(u_1)u_2 - u_1, \quad x \in \Omega; \\ -\varepsilon g\Delta u_2 &= -h(u_1)u_2 + u_1, \quad x \in \Omega; \end{aligned} \tag{4}$$

где $h(u_1) = 1$ при $u_1 > 0$ и $h(u_1) = 0$ при $u_1 \le 0$.

В стационарном случае мы доказываем существование обобщенного решения системы (4) и выполнение условий (3) на свободной границе при определенной регулярности граничных значений

$$u_i(x) = \psi_i(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad i = 1, 2. \tag{5}$$

* Работа частично поддержана проектом 1.1.3 / 76 Фонда фундаментальных исследований при Государственном комитете Украины по вопросам науки и технологий.

© Б. В. БАЗАЛИЙ, Н. В. КРАСНОЩЕК, 1996

Причем полагаем, что $\psi_1 \geq 0$, а ψ_2 может принимать и отрицательные значения. Будут указаны достаточные условия существования и несуществования „мертвой зоны", т. е. множества $\Omega_0 = \{x \in \Omega: u_1(x) = 0\}$.

В параболическом случае исследуем разрешимость начально-краевой задачи Дирихле для системы

$$\begin{aligned} a u_{1t} - g\Delta u_1^m &= \chi u_2 - u_1; \\ u_{2t} - \varepsilon g \Delta u_2 &= -\chi u_2 + u_1; \end{aligned} \qquad (x,t) \in \Omega_T = \Omega \times (0,T), \tag{6}$$

$$\chi \in H(u_1), \tag{7}$$

где a — положительная постоянная, $H(u_1)$ — граф Хевисайда, т. е. (7) означает, что $\chi = 1$, если $u_1 > 0$, $\chi = 0$, если $u_1 < 0$ и $0 \leq \chi \leq 1$, если $u_1 = 0$. Приводится также конструктивный метод доказательства существования решения типа „бегущей волны".

2. Существование решения в стационарном случае. Пусть Ω — ограниченная область в R^n, $n = \overline{1,3}$, с гладкой границей.

Систему (4) можно „расщепить", поскольку сумма правых частей равна нулю. Для функции $w = u_1^m + u_2$ из соотношений (4), (5) получаем

$$\begin{gathered} -\Delta w(x) = 0, \quad x \in \Omega; \\ w(x) = \psi_1^m(x) + \varepsilon \psi_2(x), \quad x \in \partial\Omega. \end{gathered} \tag{8}$$

Обозначим $v = u_1^m$, $\nu = 1/m$, тогда первое уравнение в (4) и краевые условия для v принимают вид

$$\begin{gathered} \mathcal{L} v \equiv -g\Delta v + \frac{v}{\varepsilon} + |v|^\nu \operatorname{sign} v = \frac{w}{\varepsilon} h(v), \\ v(x) = \psi_1^m(x), \quad x \in \partial\Omega. \end{gathered} \tag{9}$$

Пусть выполнены условия

$$\psi_1^m \in W_2^1(\Omega), \quad \psi_2 \in W_2^1(\Omega); \quad \exists\, \mu, M: \mu \cdot M > 0, \quad 0 \leq \mu, \quad M < +\infty;$$

$$-\mu = \min\left\{0, \min_{\partial\Omega} \psi_2\right\}; \tag{10}$$

$$M = \max\left\{\left(\max_{\partial\Omega} \psi_1^m\right)^\nu, \max_{\partial\Omega} \psi_2\right\}; \quad \min_{\partial\Omega}\left(\psi_1^m\right) \geq 0;$$

где выражение вида $\min\limits_{\partial\Omega}\left(\psi_1^m\right) \geq 0$ понимается в смысле $W_2^1(\Omega)$, тогда существует [5] единственное решение задачи (8) $w \in W_2^1(\Omega)$ и

$$-\varepsilon\mu \leq w(x) \leq M^m + \varepsilon M \quad \text{п. в.} \quad x \in \Omega. \tag{11}$$

Пусть $h_l(v)$ — гладкая неубывающая функция такая, что $h_l(v) = 0$ при $v \leq 0$, $h_l(v) = 1$ при $v \geq 1/l$, и $0 \leq h_l(v) \leq 1$ при $0 \leq v \leq 1/l$. Обозначим $f_+ = \max\{f, 0\}$, $f_- = f - f_+$, $V(\Omega) = \left\{v: (v - \psi_1^m) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\right\}$ и для (9) рассмотрим регуляризованную задачу вида

$$\mathscr{L}v = \frac{1}{\varepsilon}(w_+ + w_- h_l(v));$$
$$v \in V(\Omega). \tag{12}$$

***Замечание* 1.** Можно рассматривать более простую регуляризацию $\mathscr{L}v = w h_l(v)/\varepsilon$, однако задача (12) имеет то преимущество, что решение предельной при $l \to \infty$ задачи единственно.

Введем обозначение $L^{(l)}v = \mathscr{L}v - (w_+ + w_- h_l(v))/\varepsilon$. Легко видеть, что оператор $L^{(l)}v$ является строго монотонным и коэрцитивным в пространстве $V(\Omega)$. Следовательно (см., например, [6]), существует единственное решение задачи

$$\int\limits_\Omega \left(\nabla v^{(l)} \nabla \eta + \left(\frac{v^{(l)}}{\varepsilon} + |v^{(l)}|^\nu \operatorname{sign} v^{(l)}\right)\eta\right) dx =$$
$$= \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_\Omega \left(w_+ + w_- h_l(v^{(l)})\right)\eta\, dx \quad \forall\, \eta \in \mathring{W}_2^1(\Omega), \quad v^{(l)} \in V(\Omega). \tag{13}$$

Докажем, что для $v^{(l)}(x)$ п. в. в Ω выполнены неравенства

$$0 \le v^{(l)}(x) \le M^m. \tag{14}$$

Подставим в интегральное тождество (13) функцию $\eta = v_-^{(l)}$. Тогда, поскольку $h_l(v) = 0$ при $v \le 0$, получаем

$$\int\limits_\Omega \left(|\nabla v_-^{(l)}|^2 + \frac{1}{\varepsilon}|v_-^{(l)}|^2\right) dx \le 0,$$

и следовательно, левое неравенство в (14) доказано.

Для доказательства правого неравенства возьмем η, равную $(v^{(l)} - M^m)_+$. Очевидно, при достаточно больших l выполнено неравенство $M^m \ge 1/l$. После несложных преобразований с учетом (11) получим неравенство

$$\int\limits_\Omega \left(\left|\nabla\left(v^{(l)} - M^m\right)_+\right|^2 + \frac{1}{\varepsilon}\left|\left(v^{(l)} - M^m\right)_+\right|^2\right) dx \le$$
$$\le \int\limits_\Omega \left(\left|\nabla\left(v^{(l)} - M^m\right)_+\right|^2 + \left(\frac{v^{(l)}}{\varepsilon} + |v^{(l)}|^\nu - \frac{M^m}{\varepsilon} - M\right)\left(v^{(l)} - M^m\right)_+ +\right.$$
$$\left. + \left(\frac{M^m}{\varepsilon} + M - \frac{w}{\varepsilon}\right)\left(v^{(l)} - M^m\right)_+\right) dx \le 0,$$

откуда следует требуемый результат.

Теперь из (13) легко получить оценку

$$\|v^{(l)} - \psi_1^m\|_{\mathring{W}_2^1(\Omega)} \le c_1,$$

где c_1 не зависит от l. Следовательно, существует подпоследовательность $\{v^{(l)}\}$ и функция v такие, что $v^{(l)} \to v$ слабо в $W_2^1(\Omega)$, сильно в $L_2(\Omega)$ и п. в. в Ω, кроме того, $(v - \psi_1^m) \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$, $v \ge 0$ п. в. в Ω.

С точностью до подпоследовательности $\{h_l(v^{(l)})\}$ слабо в $L_2(\Omega)$ сходится к некоторой функции $\chi(x)$. Очевидно, $0 \le \chi(x) \le 1$ п. в. в Ω. По определению функция h_l неубывающая, следовательно,

$$\left(h_l(v^{(l)}) + h_l\left(\frac{1}{l}\right)\right)\left(v^{(l)} - \frac{1}{l}\right) \ge 0.$$

Переходя к пределу в этом неравенстве, получаем $(\chi - 1)v \ge 0$ п. в. в Ω и $\chi(x) = 1$ при $v(x) > 0$, а значит, $\chi(x) \in H(v(x))$ п. в. в Ω. Следуя стандартной методике [6] можно совершить предельный переход в (13) и доказать, что пара (v, χ) является решением задачи

$$(v, \chi) \in V(\Omega) \times L_\infty(\Omega); \quad \mathcal{L}v = \frac{1}{\varepsilon}(w_+ + w_-\chi); \tag{15}$$
$$\chi \in H(v) \quad \text{п. в. в} \quad \Omega.$$

Пусть ψ_1^m, $\psi_2 \in W_p^2(\Omega)$, $p \ge 1$. Введем функцию $\tilde{v} = v - \psi_1^m$. Тогда $\tilde{v} \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и $-\Delta\tilde{v} = F$, где $F = -v/\varepsilon - v^\nu + (1/\varepsilon)(w_+ + w_-\chi) + \Delta\psi_1^m$. Из (11) и (14) имеем, что v, $w \in L_\infty(\Omega)$, и значит, $F \in L_p(\Omega)$. Из неравенства Кальдерона–Зигмунда [5] следует, что $\tilde{v} \in W_p^2(\Omega)$. Следовательно, v принадлежит $W_p^2(\Omega)$ и п. в. в Ω удовлетворяет уравнению

$$\mathcal{L}v = \frac{1}{\varepsilon}(w_+ + w_-\chi), \quad \chi \in \Omega. \tag{16}$$

Если Ω_0 — непустое множество, то, последовательно применяя лемму А4 из [5], заключаем, что $\Delta v = 0$ п. в. в Ω. Тогда из уравнения (16) следует

$$\frac{1}{\varepsilon}(w_+ + w_-\chi) = -\Delta v + \frac{v}{\varepsilon} + v^\nu = 0 \quad \text{п. в. в} \quad \Omega_0,$$

и, таким образом, $w_+ = 0$ и $w_-\chi = 0$ п. в. в Ω_0.

Пусть $p > n$ и граница $\partial\Omega$ принадлежит классу $C^{2+\lambda}$, $\lambda = 1 - n/p$, тогда из теорем вложения следует, что ψ_1^m, ψ_2 принадлежат $C^{1+\lambda}(\overline{\Omega})$. По определению функция w является решением задачи (8), а значит, w — гармоническая функция и $w \in C^{2+\lambda}(\overline{\Omega})$. В силу последнего условия в (10) w не может быть равна нулю на множестве ненулевой меры, следовательно, $\chi = 0$ п. в. в Ω_0, и поэтому $\chi(x) = h(v(x))$ п. в. в Ω.

Итак, функция v в действительности является решением задачи

$$\mathcal{L}v = \frac{1}{\varepsilon}(w_+ + w_-h(u)), \quad v \in V(\Omega). \tag{17}$$

Заметим, что поскольку $w_+ = 0$ в Ω_0, v также удовлетворяет уравнению (9).

Предположим, что существуют v_1, v_2 — два различных решения задачи (17). Легко показать, что

$$\int\limits_\Omega \left(|\nabla(v_1 - v_2)|^2 + |v_1 - v_2|^2\right) dx \le 0,$$

и следовательно, $v_1 = v_2$.

Таким образом, доказаны следующие утверждения.

Лемма 1. *Пусть* ψ_1, ψ_2 *удовлетворяют предположениям* (10) *и, дополнительно,* ψ_1^m, $\psi_2 \in W_p^2(\Omega)$, $p > n$, *граница* $\partial\Omega$ *принадлежит* $C^{2+\lambda}$, $\lambda = 1 - n/p$. *Тогда существует единственное решение* w, v *системы* (8), (17), *причем* w *и* v *принадлежат* $W_p^2(\Omega) \cap C^{1+\lambda}(\overline{\Omega})$.

***Следствие* 1.** *В предположениях леммы* 1 *функция* $v(x)$ *п. в. в* Ω *удовлетворяет уравнению* (9).

Очевидно, если (v, w) — решение системы (8), (9), то $(u_1 = v^{\nu}, u_2 = (w - v)/\varepsilon)$ — решение системы (4), (5).

Теорема 1. *Пусть* ψ_1, ψ_2, Ω *удовлетворяют предположениям леммы* 1. *Тогда существует по крайней мере одна пара функций* u_1, u_2 *таких, что* $\left(u_1^m - \psi_1^m\right)$, $(u_1 - \psi_2) \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$, u_1^m, $u_2 \in W_p^2(\Omega) \cap C^{1+\lambda}(\overline{\Omega})$ *и* u_1, u_2 *п. в. в* Ω *удовлетворяют системе* (4), (5) *и, по непрерывности, условиям* (3).

3. О существовании „мертвой зоны". Рассмотрим вопрос существования „мертвой зоны", т. е. множества Ω_0. При этом существенно используется метод, предложенный в [7] (см. также [2]).

Для простоты рассмотрим одномерный случай. Пусть $\Omega = (0, L)$, $\psi_1(0) = 0$, $\psi_2(0) = -\mu$, $\psi_1(L) = \psi_2(L) = M$; L, μ, M — положительные константы. Будем рассматривать задачу определения функций v, w.

Утверждение 1. *Пусть выполнены соотношения*

$$L > 4\left(M^m + \varepsilon(M + \mu)\right)\left(\frac{M^m g}{\mu^3}\right)^{1/2},$$

$$\gamma = \frac{L\varepsilon\mu}{2(M^m + \varepsilon(M + \mu))} - \left(\frac{4M^m g}{\mu}\right)^{1/2};$$

тогда $\Omega_0 = \varnothing$, *причем* Ω_0 *содержит отрезок* $[0, \gamma]$.

Доказательство. Легко видеть. что в данном случае

$$w = \frac{1}{L}\left(M^m + \varepsilon(M + \mu)\right)x - \varepsilon\mu.$$

Рассмотрим δ: $0 < \delta < \mu$ и определим L_δ из условия $w(x) \le -\delta\varepsilon$ при $x \in [0, L_\delta]$. Из представления для $w(x)$ получим

$$L_\delta = \frac{L\varepsilon(\mu - \delta)}{M^m + \varepsilon(M + \mu)}.$$

Заметим, что для наших целей параметр L_δ можно оценить, не находя w в явном виде, а располагая только оценкой вида

$$|w(x) - w(y)| \le K|x - y|^{\alpha} \quad \forall\, x,\ y \in \overline{\Omega}; \quad K,\ \alpha > 0.$$

Далее, используя подход, предложенный в [7], докажем, что функция v_δ, определяемая как решение задачи

$$\begin{gathered} -g\,\Delta v_\delta = -h(v_\delta)\,\delta, \quad x \in Q_\delta = (0, L_\delta); \\ v_\delta(0) = 0, \quad v_\delta(L_\delta) = M^m \end{gathered} \tag{19}$$

является мажорантой для v в области Q_δ.

Напомним, что для v имеем

$$-g\,\Delta v = h(v)\,\frac{w}{\varepsilon} - \frac{v}{\varepsilon} - v^{\nu}.$$

Отсюда вытекают равенства

$$0 = -g\,\Delta(v - v_{\delta}) - h(v)\,\frac{w}{\varepsilon} + \frac{v}{\varepsilon} + v^{\nu} - h(v_{\delta})\delta =$$

$$= -g\,\Delta(v - v_{\delta}) + \delta(h(v) - h(v_{\delta})) + \frac{v}{\varepsilon} + v^{\nu} - \left(\frac{w}{\varepsilon} + \delta\right)h(v).$$

Так как $v \geq 0$ и $(w/\varepsilon + \delta) \leq 0$, получим $-g\,\Delta(v - v_{\delta}) + \delta(h(v) - h(v_{\delta}) \leq \leq 0$. Заметим, что $(v - v_{\delta}) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(Q_{\delta})$, поскольку $v \leq M^m$ в Ω. Умножая последнее неравенство на $(v - v_{\delta})_+$, после стандартных преобразований имеем $(v - v_{\delta})_+ = 0$ в Q_{δ}.

Будем искать решение задачи в виде

$$v_{\delta} = \frac{\delta}{2g}\left[(x - \gamma_{\delta})_+\right]^2,$$

где γ_{δ} находится из условия $v_{\delta}(L_{\delta}) = M^m$. Отсюда следует, что область, где $v_{\delta} = 0$ (т. е. $v_{\delta} > 0$), будет непустым множеством, если $L_{\delta} > (2M^m g/\delta)^{1/2}$. Используя представление для L_{δ}, приведем это неравенство к виду

$$(\mu - \delta)\,\delta^{1/2} > \frac{(2M^m g)^{1/2}(M^m + \varepsilon(M + \mu))}{L\varepsilon}.$$

Легко видеть, что на интервале $(0, \mu)$ функция $(\mu - \delta)\,\delta^{1/2}$ принимает максимальное значение в точке $\delta = \mu/2$ и последнее условие приводится к виду (18), т. е. при

$$L_{\mu/2} > \frac{L\varepsilon\mu}{2(M^m + \varepsilon(M + \mu))}$$

имеем

$$\gamma_{\mu/2} = L_{\mu/2} - \left(\frac{4M^m g}{\mu}\right)^{1/2} > 0.$$

Ввиду доказанного выше $v \leq v_{\mu/2}$ на отрезке $[0, \gamma]$, поэтому Ω_0 — непустое множество и $[0, \gamma] \subseteq \Omega_0$.

Данный подход можно обобщить на многомерный случай, см. [7, 2]. Теперь приведем два утверждения, касающиеся несуществования множества Ω_0.

Утверждение 2. *Пусть* $\Omega = (0, L)$ *и краевые условия те же, что и в утверждении* 1. *Пусть также*

$$L^2 \leq \frac{2M^m g\varepsilon}{M^m + \varepsilon(M + \mu)}. \tag{20}$$

Тогда Ω_0 *— пустое множество.*

Доказательство. Пусть функция φ определяется как решение задачи

$$-g\,\varphi_{xx} = -\mu - M + \frac{M^m}{\varepsilon}, \quad x \in (0, L);$$

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(L) = M^m.$$

Тогда

$$-g\,(\varphi - v)_{xx} = \mu\,(h(v) - 1) + \frac{v}{\varepsilon} - \frac{M^m}{\varepsilon} + v^\nu - M - \frac{h(v)}{\varepsilon}(w + \varepsilon\mu).$$

В силу изложенного выше $-(w + \varepsilon\mu) \le 0$, $v - M^m \le 0$, $v^\nu - M \le 0$, следовательно, $-g\,(\varphi - v)_{xx} \le 0$, и значит, $\varphi \le v$ в Ω.

Будем искать φ в виде

$$\varphi(x) = \frac{M^m + \varepsilon(M + \mu)}{2g\varepsilon}\,x\,(x - d).$$

Если $d \le 0$, то $\varphi(x) > 0$ при $x \in (0, L)$. Определяя d из условия $\varphi(L) = M^m$, получаем неравенства (20). Поскольку $\varphi \le v$ в Ω, утверждение 2 доказано.

Замечание 2. Если „мертвая зона" — непустое множество и условие (20) не выполнено, то $\Omega_0 \subseteq [0, \gamma]$, где γ определяется из условия $\varphi(x) \le 0$ при $x \in [0, \gamma]$.

Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} -g\Delta v &= \frac{w - v}{\varepsilon} - v^\nu, \\ -\Delta w &= 0, \end{aligned} \qquad x \in \Omega;$$

$$\begin{aligned} v &= \psi_1^m, \\ w &= \psi_1^m + \varepsilon\psi_2, \end{aligned} \qquad x \in \partial\Omega. \tag{21}$$

Утверждение 3. *Пусть* $\Omega \subseteq R^n$, $n = \overline{1,3}$, *— ограниченная область, граница принадлежит классу* $C^{2+\alpha}$, ψ_1^m, $\psi_2 \in C^\alpha(\overline{\Omega})$. *Если* $\left(\psi_1^m(x) + \varepsilon\psi_2(x)\right) \ge 0$, $\left(\psi_1^m(x) + \varepsilon\psi_2(x)\right) \not\equiv 0$ *при* $x \in \partial\Omega$, *то* Ω_0 *— пустое множество и решение задачи* (21) *является решением системы* (8), (9).

Доказательство. В силу сделанных на Ω, ψ_1, ψ_2 предположений функция w принадлежит классу $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ и из сильного принципа максимума следует, что $w(x) > 0$ при $x \in \Omega$.

Предположим, что $v(x) = 0$ в некотором шаре $B_\rho(x^*)$, $x^* \in \Omega$. Из первого уравнения в (21) вытекает $w = v + \varepsilon v^\nu - \varepsilon g\,\Delta v = 0$. Получаем противоречие. Заметим, что если $v > 0$ в Ω, то $h(v) \equiv 1$.

Замечание 3. Если $(\overline{v}, \overline{w})$ являются решением системы (8), (17), а $(\overline{\overline{v}}, \overline{\overline{w}})$ — решением системы (21) с одинаковыми краевыми условиями, то можно доказать, что $\overline{\overline{v}} \le \overline{v}$.

4. О разрешимости нестационарной системы. В параболическом случае разрешимость системы (6), (7) с краевыми и начальными условиями

$$u_i(x,t) = \psi_i(x), \quad (x,t)\in \partial\Omega_T = \partial\Omega\times(0,T);$$
$$u_i(x,0) = u_{i0}(x), \quad x\in\Omega, \quad i=1,2, \tag{22}$$

доказывается классическими методами (см. [8] и приведенную там литературу).

Предположим, что ψ_1^m, $\psi_2 \in W_2^1(\Omega)\cap C^\alpha(\overline{\Omega})$, $u_{i0}\in L^\infty(\Omega)$, $i=1,2$, u_{10}, $\psi_1 \geq 0$.

Пусть $\varphi^{(l)}(u)$ — гладкая функция такая, что $\varphi^{(l)}(u) = u^m$ при $u \geq 1/l$, $\varphi^{(l)}(u) \geq 1/2l$ для всех u, $h_l(u)$ — такая же, как в эллиптическом случае. Тогда регуляризованная задача имеет вид

$$a u_{1t} - g\Delta\varphi^{(l)}(u_1) = h_l\left(u_1 - \frac{1}{l}\right)\left(u_2 - \frac{1}{l}\right) - \left(u_1 - \frac{1}{l}\right)_+; \quad (x,t)\in\Omega_T;$$

$$u_{2t} - \varepsilon g\Delta u_2 = -h_l\left(u_1 - \frac{1}{l}\right)\left(u_2 - \frac{1}{l}\right) + \left(u_1 - \frac{1}{l}\right)_+; \quad (x,t)\in\Omega_T;$$

$$u_i(x,t) = \psi_i^{(l)}(x) + \frac{1}{l}, \quad (x,t)\in\partial\Omega_T;$$

$$u_i(x,0) = u_{0i}^{(l)}(x) + \frac{1}{l}, \quad x\in\Omega,$$

функции $u_{0i}^{(l)}(x)$, $\psi_i^{(l)}(x)$, $i=1,2$, такие, что $u_{0i}^{(l)}$, $\psi_i^{(l)} \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $i=1,2$,

$$\lim_{l\to\infty} \left\| u_{0i}^{(l)} - u_{0i} \right\|_{L_1(\Omega)} = 0;$$

$$\lim_{l\to\infty} \left\| \left(\psi_1^{(l)}\right)^m - \psi_1^m \right\|_{W_2^1(\Omega)} = 0;$$

$$\lim_{l\to\infty} \left\| \psi_2^{(l)} - \psi_2 \right\|_{W_2^1(\Omega)} = 0; \quad u_{01}^{(l)}, \ \psi_1^{(l)} \geq 0,$$

$$\max_{\overline{\Omega}} \left\{ |u_i^{(l)}|, |\psi_i^{(l)}| \right\} \leq K < +\infty,$$

и выполнены условия согласования. Поскольку

$$\left(h_l\left(u_1 - \frac{1}{l}\right)\left(u_2 - \frac{1}{l}\right) + \left(u_1 - \frac{1}{l}\right)_+ \right)(u_1 - u_2) \geq -c_2|u|^2 - c_2;$$

при $c_2 = 3$, $|u|^2 = u_1^2 + u_2^2$, для решения регуляризованной задачи справедлива оценка (см. теорему 7.1 гл. 7 из [9])

$$\max_{\overline{\Omega}_T} |u^{(l)}(x,t)| \leq$$

$$\leq \min_{c>c_2} e^{cT}\left[\left\{ \max_{\overline{\Omega}} \left| u_0^{(l)} + \frac{1}{l} \right|, \max_{\partial\Omega} \left| \psi^{(l)} + \frac{1}{l} \right| \right\} + \sqrt{\frac{c_2}{c - c_2}} \right].$$

Эта оценка является существенной для доказательства разрешимости. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Существует по крайней мере одно обобщенное решение системы* (6), (7), (22), *т. е.* $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$, $\chi(x,t)$ *такие, что*:

а) $u_1(x,t) \geq 0$ *п. в. в* Ω_T;

б) существуют обобщенные производные $\partial u_1^m/\partial x_\alpha$, $\partial u_2^m/\partial x_\alpha$ *и*

$$\int_{\Omega_T} \left\{ |u_1|^{2m} + \left|\nabla u_1^m\right|^2 + |u_2|^2 + |\nabla u_2|^2 \right\} dx\,dt < +\infty;$$

в) u_1, u_2, χ *удовлетворяют интегральным тождествам*

$$\int_{\Omega} \eta_i(x,T)\, u_i(x,T)\, dx + \int_{\Omega_T} \nabla\eta_i(x,t)\, \nabla\varphi_i(u_i(x,t))\, dx\,dt =$$

$$= -\int_{\Omega_T} \eta_i(x,t)(-1)^i [\chi(x,t)\, u_2(x,t) - u_1(x,t)]\, dx\,dt +$$

$$+ \int_{\Omega_T} (\eta_i)_t(x,t)\, u_i(x,t)\, dx\,dt + \int_{\Omega} \eta_i(x,0)\, u_{0i}(x)\, dx, \quad i = 1,2;$$

для любых $\eta_i \in C^1(\overline{\Omega}_T)$ *таких, что* $\eta_i(x,t) = 0$ *на границе* $\partial\Omega_T$, $\varphi_1(u_1) = u_1^m$, $\varphi_2(u_2) = u_2$;

г) $u_1^m(x,t) = \psi_1^m(x)$, $u_2(x,t) = \varphi_2(x)$ *при* $(x,t) \in \partial\Omega_T$ *в смысле следов*;

д) $\chi \in L_\infty(\Omega)$ *и* $\chi(x,t) \in H(u_1(x,t))$ *при п. в.* $(x,t) \in \Omega_T$.

Единственность, как и в параболическом случае, остается открытым вопросом.

5. Существование автомодельного решения. Рассмотрим систему (6), (7) в одномерном случае, на прямой. Пусть $\chi = h(u)$, $m > 1$ и на границе $\partial\Omega_0 \cap \partial\Omega_+$ выполнены условия (3). Предположим, что свободная граница движется с постоянной скоростью c в сторону убывания переменной x. Нас будет интересовать вопрос о построении решения в данном случае.

Большое количество примеров решений автомодельного типа для однородного уравнения пористой среды может быть найдено в [10].

Введем переменную $y = x + ct$. Получим систему

$$a\,c(u_1)_y - g(u_1^m)_{yy} = -u_1 + u_2, \quad y > y_*; \tag{23}$$

$$c(u_2)_y - \varepsilon g(u_2)_{yy} = -u_2 + u_1, \quad y > y_*; \tag{24}$$

$$c(u_2)_y - \varepsilon g(u_2)_{yy} = 0, \quad y < y_*. \tag{25}$$

На свободной границе $y = y_*$ имеем

$$u_1 = 0, \quad (u_1^m)_y = 0, \quad [u_2]3[(u_2)_y] = 0. \tag{26}$$

Можем считать, что $y_* = 0$ и c — произвольная положительная постоянная.

Обозначим $A_1 = \partial u_2(0)/\partial y$, $A_2 = u_2(0)$. Интегрируя уравнение (25), получаем

$$u_2(y) = A_1 \frac{\varepsilon g}{c}\left(\exp\left(\frac{cy}{\varepsilon g}\right) - 1\right) + A_2 \quad \text{при} \quad y < 0. \tag{27}$$

Аналогично из уравнения (24) имеем

$$u_2(y) = -\frac{1}{\gamma_1 \varepsilon g}\int_0^y \exp(\lambda(y-s))\,\mathrm{sh}(\gamma_1(y-s))\, u_1(s)\, ds +$$

$$+\ \exp(\lambda y)\left(A_2 \operatorname{ch}(\gamma_1 y) + \frac{A_1 - \lambda A_2}{\gamma_1} \operatorname{sh}(\gamma_1 y)\right) \quad \text{при} \quad y > 0, \tag{28}$$

где $\lambda = c/2\varepsilon g$, $\gamma_1^2 = \lambda^2 + 1/\varepsilon g$.

Проинтегрируем уравнение (23) два раза по y. С учетом условий (26) на свободной границе заключаем, что

$$u_1^m(y) = \frac{1}{\alpha}\left[\int_0^y u_1(s)\,ds + \gamma\int_0^y (u_1(s) - u_2(s))(y-s)\,ds\right], \tag{29}$$

где $\alpha = g/ac$, $\gamma = \alpha/g$.

Опуская выкладки, из формул (27), (28) получаем

$$\int_0^y u_2(s)(y-s)\,ds = M(y, A_1, A_2) - \frac{1}{\gamma_1 g\varepsilon}\int_0^y K_1(y-s)\,u_1(s)\,ds$$

для некоторых целых функций K_1 и M, причем $M(y,0,0) = 0$. Уравнение (29) приводится к виду

$$u_1^m(y) = \frac{1}{\alpha}\left[\int_0^y u_1(s)\,ds + \int_0^y K(y-s)\,u_1(s)\,ds + \gamma M(y, A_1, A_2)\right], \tag{30}$$

где $K(t) = \gamma(t + K_1(t)/\gamma_1 g\varepsilon)$. Следовательно, $K(t)$ — также целая функция.

Уравнение

$$w^m(y) = \frac{1}{\alpha}\int_0^y w(s)\,ds \tag{31}$$

будем рассматривать как модельное. Легко видеть, что

$$w(y) = \left(\frac{(m-1)y}{\alpha m}\right)^{1/(m-1)}.$$

Заметим, что представление для w можно получить как из задачи

$$\frac{\partial w^m}{\partial y} = \frac{1}{\alpha}w, \quad w^m(0) = 0;$$

так и методом последовательных приближений, предполагая, что w^m имеет вид $b_0 y^{m/(m-1)}\varphi(y)$, где $\varphi(y) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n y^n$. Таким образом, $y^{m/(m-1)}$ характеризует особенность $w(y)$ в нуле.

По аналогии с уравнением (31) будем искать решение уравнения (30) в виде

$$u_1^m(y) = b_0 y^{m/(m-1)}\varphi(y), \quad \varphi(y) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n y^n.$$

Решение такого вида возможно, если $M(y, A_1, A_2) = 0$ и m не равно $1 + 1/n$ для целых n. В самом деле, слева будет стоять разложение по степеням $y^{k+1/(m+1)}$, k — целое; справа первые два слагаемых дают разложение по тем же степеням, а последнее — по целым степеням y. В дальнейшем полагаем, что $A_1 = A_2 = 0$, $m > 2$. Коэффициент b_0 определим из разложения в ряды.

Получаем

$$b_0 = \left(\frac{m-1}{\alpha m}\right)^{1/(m-1)}.$$

Для $\varphi(y)$ имеем задачу

$$\varphi(y) = \frac{m}{m-1} y^{m/(m-1)} \left[\int_0^y s^{1/(m-1)} \varphi^{1/m}(s)\, ds + \right.$$

$$\left. + \int_0^y s^{1/(m-1)} \varphi^{1/m}(s) K(y-s)\, ds \right]. \tag{32}$$

Пусть $\varphi_0(y) \equiv 1$ и

$$\varphi_n(y) = \frac{m}{m-1} y^{m/(m-1)} \int_0^y s^{1/(m-1)} (1 + K(y-s))\, \varphi_{n-1}^{1/m}(s)\, ds.$$

Рассматривая разности вида $|\varphi_n - \varphi_{n-1}|$, можем получить оценку

$$|\varphi_n(y) - \varphi_{n-1}(y)| \le \frac{A_3(m-1)}{2m-1} \left(\frac{A_4}{2m-1}\right)^{n-1},$$

где константа A_3 такая, что $|K(y-s)|/|y-s| \le A_3 \ \forall\, y,\ s$; а

$$A_4 = \max_{y;\ s \in (0,y)} |1 + K(y-s)|;$$

$K(y-s)$ — целая функция, следовательно, можно выбрать достаточно малое число l так, чтобы $A_4 < 2m-1$ при $y \in (0, l)$. Тогда на этом интервале существует решение задачи (32). При $A_1 = A_2 = 0$ из уравнения (27) имеем $u_2 \equiv 0$ при $y < 0$, а из (28) получаем $u_2(y) < 0$, $(\partial u_2/\partial y)(y) < 0$ при $y > 0$. Поэтому из (29) следует, что $\left(\partial u_1^m/\partial y\right)(y) < 0$ и $u_1(y) > 0$ при $y > 0$. Значит, при $y \ge l$ функцию $u_1^m(y)$ можно разлагать по целым степеням y, и мы получаем интегральное уравнение для $u_1(y)$, разрешимость которого доказывается обычным способом последовательных приближений. Таким образом, разрешимость системы (23)–(26) доказана.

1. *Chang K. C.* The obstacle problem and partial differential equations with discontinuous nonlinearities // Comm. Pure Appl. Math. – 1980. – **33**, № 2. – P. 117–147.
2. *Bandle C., Sperb R. P., Stakgold I.* Diffusion and reaction with monotone kinetics // Nonlinear Analysis. – 1984. – **8**, № 4. – P. 321–334.
3. *Martin R. H., Oxley M. E.* Moving boundaries in reaction-diffusion systems with absorbtion // Ibid. – 1990. – **14**, № 2. – P. 167–192.
4. *Нустров В. С., Пластинин А. В.* Об одной задаче типа Стефана фильтрации жидкости в трещиновато-пористом пласте // Инж.-физ. журн. – 1993. – **65**, № 2. – С. 26–28.
5. *Киндерлерер Д., Стампаккья Г.* Введение в вариационные неравенства и их приложения. – М.: Мир, 1983. – 256 с.
6. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных задач. – М.: Мир, 1972. – 439 с.
7. *Hernandez J.* Some free boundary problems for predator-prey systems with nonlinear diffusion // Procedings of Symposia in Pure Mathematics. – 1984. – **45**. – P. 481–488.
8. *Maddalena L.* Existence of global solution for reaction-diffusion systems with density dependent diffusion // Nonlinear Analysis. – 1984. – **8**, № 11. – P. 1383–1394.
9. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
10. *Aronson D. S.* The porous medium equation // Lect. Notes Math. – 1986. – **1224**. – P. 1–46.

Получено 10.04.95