УДК 517.9

А. М. Итейви (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

О ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОМ МЕТОДЕ ДЛЯ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

For second-order difference equations, we justify the scheme of the Samoilenko numerical–analytic method for finding periodic solutions.

Для різницевих рівнянь другого порядку обгрунтовано схему чисельно-аналітичного методу А. М. Самойленка для знаходження періодичних розв'язків.

Рассмотрим разностное уравнение второго порядка вида

$$\Delta^2 x_n = f_n(x_n, x_{n+1}), \tag{1}$$

где $f_n(x, y)$ — периодическая по n с периодом P функция, т. е. $f_{n+P}(x, y) = f_n(x, y)$. Будем исследовать существование в уравнениях (1) P-периодических решений. Как видно из [1], для решения этого вопроса можно применять разработанный для обыкновенных дифференциальных уравнений численно-аналитический метод из [2]. В работе [1] численно-аналитический метод использован для исследования периодических решений систем разностных уравнений первого порядка. Однако при рассмотрении вопроса о периодических решениях системы (1) более эффективно, с точки зрения практической реализации, применение общих положений численно-аналитического метода непосредственно к уравнению (1), а не к эквивалентной ему системе первого порядка.

В [3] данный метод применен к исследованию периодических решений уравнения

$$\Delta^2 x_n = f_n(x_n, \Delta x_n),$$

где $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$.

Цель настоящей работы — получение схемы численно-аналитического метода для более общего разностного уравнения второго порядка, а именно: для уравнения вида (1). При этом для простоты изложения все выкладки будем делать для одного уравнения. Итак, считаем, что в уравнении (1) x_n — скаляры и предполагаем функцию $f_n(x, y)$ определенной в области

$$ZXD = ZXI^1 : n \in Z, \quad x \in [a, b] = I^1, \quad y \in [a, b], \tag{2}$$

непрерывной по переменной x, y, p-периодической по n и удовлетворяющей неравенствам

$$|f_n(x, y)| \leq M, \quad |f_n(x', y') - f_n(x, y)| \leq K_1 |x' - x| + K_2 |y' - y|, \tag{3}$$

где M, K_1, K_2 — положительные постоянные.

Для уравнения (1) введем аналог T-системы, определенной в [2]. Для этого постоянные a, b, M, K_1, K_2 будем считать связанными неравенствами

$$b - a \geq \frac{P^2 M}{2}; \tag{4}$$

$$\frac{P^2}{4}(K_1 + K_2) < 1. \tag{5}$$

Введем в рассмотрение оператор L, действующий на P-периодические последовательности f_n при $n \in [0, P-1]$ по формуле

$$L f_n = \sum_{i=0}^{n} (f_i - \bar{f}_n), \tag{6}$$

где $\bar{\ }$ означает среднее:

$$\bar{f}_n = \frac{1}{P} \sum_{i=0}^{P-1} f_i. \tag{7}$$

Применяя к (6) еще раз оператор L, имеем

$$L^2 f_n = L(Lf_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \left[\sum_{k=0}^{i-1} (f_k - \bar{f}_n) - \overline{\sum_{k=0}^{i-1} (f_k - \bar{f}_n)} \right]. \tag{8}$$

Очевидно, если f_n — P-периодическая последовательность, то и Lf_n, а с ним $L^2 f_n$, также P-периодические последовательности. Согласно лемме [1, с. 124] имеем оценку

$$|Lf_n| \le \alpha_{n+1} |f_n|_0, \tag{9}$$

где

$$\alpha_{n+1} = 2(n+1)\left(1 - \frac{n+1}{P}\right), \qquad |f_n|_0 = \sup_{n\in[0,\, p-1]} |f_n|.$$

Поэтому

$$|L^2 f_n| = |L(Lf_n)| \le \alpha_{n+1} |Lf_n|_0 \le \frac{P}{2}\alpha_{n+1} |f_n|_0 \le \frac{P^2}{4} |f_n|_0 \tag{10}$$

для всех $n \in [0, P-1]$.

Справедлива следующая лемма.

Лемма. *Пусть функция* $f_n(x, y)$ *определена в области* (2), *непрерывна по переменным* x, y, P*-периодична по* n *и удовлетворяет неравенствам* (3), (5). *Тогда последовательность* P*-периодических по* n *функций*

$$x_n^m(x_0) = x_0 + L^2 f_n(x_n^{m-1}(x_0), x_{n+1}^{m-1}(x_0)), \quad m = 1, 2, \ldots, \tag{11}$$

сходится при $m \to \infty$ *равномерно относительно* n,

$$x_0 \in ZXI_f^1 = ZX\left[a + \frac{P^2 M}{4},\ b - \frac{P^2 M}{4}\right], \tag{12}$$

к функции $x_n^0(x_0)$, *определенной в области* (12), P*-периодической по* n *и удовлетворяющей уравнению*

$$x_n = x_0 + L^2 f_n(x_n, x_{n+1}). \tag{13}$$

Доказательство. По индукции покажем, что $x_n^m(x_0)$ для всех $m = 1$, $2, \ldots$ принимают при $n \in Z$ значения в области (2). Действительно, при $m = 1$ в силу неравенства (10) из представления (11) следует

$$|x_n^1(x_0) - x_0| \le |L^2 f_n(x_0, x_0)| \le \frac{P^2 M}{4};$$

а значит, $a \le x_n^1(x_0) \le b$ для всех $n \in Z$ лишь только $x_0 \in I_f^1$.

Предположим, что $a \le x_n^m(x_0) \le b$ для всех m, меньших некоторого целого g, $g \ge 1$, и всех $n \in Z$, учитывая рекуррентное соотношение, определяющее $x_n^{g+1}(x_0)$. Находим

$$\left|x_n^{g+1}(x_0) - x_0\right| \le \left|L^2 f_n(x_n^g(x_0), x_{n+1}^g(x_0))\right|_0 \le \alpha_{n+1}\frac{P}{2} M \le \frac{P^2}{4} M,$$

поэтому $a \le x_n^{P+1}(x_0) \le b$ для всех $z \in R^1$, лишь только $x_0 \in I^1$. Отсюда следует, что функции последовательности (11) удовлетворяют неравенствам

$$a \le x_n^m(x_0) \le b \quad \text{для всех} \quad m = 1, 2, \ldots, \quad n \in Z, \quad x_0 \in I^1. \tag{14}$$

Для доказательства сходимости последовательности (11) оценим разность $\left| x_n^{m+1}(x_0) - x_n^m(x_0) \right|$. Обозначим

$$w_n^m = f_n(x_n^m(x_0), x_{n+1}^m(x_0)) - f_n(x_n^{m-1}(x_0), x_{n+1}^{m-1}(x_0)).$$

Справедлива оценка

$$\left| x_n^2(x_0) - x_n^1(x_0) \right| \le \left| L^2 w_n^2 \right| \le \alpha_{n+1} \left| L w_n^2 \right|_0 \le \frac{P^2}{4} \left| w_n^2(x_0) \right|_0 =$$

$$= \frac{P^2}{4} \left(K_1 \left| x_n^1(x_0) - x_0 \right|_0 + K_2 \left| x_{n+1}^1(x_0) - x_0 \right|_0 \right) \le$$

$$\le \frac{P^2}{4} \left(K_1 \frac{P^2}{4} M + K_2 \frac{P^2}{4} M \right) = \left(\frac{P^2}{4} \right)^2 M(K_1 + K_2).$$

Далее,

$$\left| x_n^3(x_0) - x_n^2(x_0) \right| \le \frac{P^2}{4} \left| w_n^3 \right|_0 \le \frac{P^2}{4} \left(K_1 \left| x_n^2(x_0) - x_n^1(x_0) \right|_0 + \right.$$

$$\left. + K_2 \left| x_{n+1}^2(x_0) - x_{n+1}^1(x_0) \right|_0 \right) \le \frac{P^2}{4} \frac{P^2}{2} M(K_1 + K_2)^2.$$

Рассуждая аналогично, по индукции получаем

$$\left| x_n^{m+1}(x_0) - x_n^m(x_0) \right| \le \left(\frac{P}{2} \right)^{2m+2} M(K_1 + K_2)^m = \frac{P^2}{4} M \left[\frac{P^2}{4} (K_1 + K_2) \right]^m. \tag{15}$$

Поэтому

$$\sum_{i=1}^{m} w_n^m \le \sum_{i=1}^{m} \frac{P^2}{4} M \left(\frac{P^2}{4} (K_1 + K_2) \right)^m \le \sum_{i=1}^{\infty} \frac{P^2}{4} M \left(\frac{P^2}{4} (K_1 + K_2) \right)^m \tag{16}$$

— ряд, сходящийся в силу условия (5). Поэтому из последнего неравенства следует равномерная относительно x_0 и n сходимость последовательности периодических функций (11). Переходя в рекуррентном соотношении (11) к пределу при $m \to \infty$, убеждаемся, что предельная функция $x_n^0(x_0)$ удовлетворяет уравнению (13), что и завершает доказательство леммы.

Назовем Δ-постоянной в точке 0, x_0 относительно уравнения (1) значение параметра μ, при котором решение уравнения

$$\Delta^2 x_n = f_n(x_n, x_{n+1}) - \mu, \tag{17}$$

принимающее при $n = 0$ значение $x = x_0$, является P-периодическим при условии, что такое значение единственно. Из леммы 1 легко выводятся утверждение о существовании и свойства Δ-постоянной для точек $x_0 \in I^1$ уравнения (1) в случае, когда оно есть T-системой в смысле неравенств (4), (5) в области D.

Лемма 1, кроме того, описывает алгоритм построения приближенного периодического решения уравнения (1), являющегося T-системой, при условии, что известна точка $x = x_0$, через которую при $n = 0$ проходит это решение.

Теорема 1. *Пусть уравнение* (1) — *T-система в области* D. *Тогда, если оно имеет* P *-периодическое решение* $x = x_n$, *принимающее при* $n = 0$ *значение* $x_0, x_0 \in I^1 = [a + P^2M/4, b - P^2M/4]$, *то* $x_n = x_n^0(x_0)$, *где* $x_n^0(x_0)$ — *предел последовательности функций* $x_n^m(x_0)$, *определяемых согласно* (11).

Доказательство. Действительно, если x_n — периодическое решение уравнения (1), то оно представимо в виде

$$x_n = x_0 + \sum_{i=0}^{n-1}\left[x_1 - x_0 + \sum_{k=0}^{i-1} f_k(x_k, x_{k+1})\right] \tag{18}$$

и удовлетворяет соотношениям

$$\overline{f_n(x_k, x_{k+1})} = 0, \quad x_1 = x_0 - \overline{\sum_{k=0}^{i-1} f_k(x_k, x_{k+1})}. \tag{19}$$

Следовательно,

$$x_n = x_0 + \sum_{i=0}^{n-1}\left[x_1 - x_0 + \sum_{k=0}^{i-1} f_k(x_k, x_{k+1})\right] = x_0 + L^2 f_n(x_n, x_{n+1}). \tag{20}$$

Последнее равенство доказывает, что x_n — решение уравнения (13). Для доказательства теоремы осталось показать единственность периодического уравнения (13) для точек $x_0 \in I^1$.

Предположим противное, т. е. найдутся, по крайней мере, два различных периодических решения $x_n = x_n(x_0)$, $y_n = y_n(x_0)$ уравнения (13). Оценим их разность:

$$|x_n - y_n| = |L^2(f_n(x_n, x_{n+1}) - f_n(y_n, y_{n+1}))| \leq \tag{21}$$

$$\leq \alpha_{n+1}\frac{P}{2}(K_1|x_n - y_n| + K_2|x_{n+1} - y_{n+1}|) \leq$$

$$\leq \frac{P^2}{4}(K_1|x_n - y_n| + K_2|x_{n+1} - y_{n+1}|). \tag{22}$$

Из неравенства (22) имеем

$$|x_n - y_n| \leq \frac{P^2K_2/4}{1 - P^2K_1/4}|x_{n+1} - y_{n+1}|. \tag{23}$$

Итерируя неравенство (23) на m-м шаге, получаем

$$|x_n - y_n| \leq \left(\frac{P^2K_2/4}{1 - P^2K_1/4}\right)^m |x_{n+m} - y_{n+m}|. \tag{24}$$

Но в силу 5

$$\left(\frac{P^2K_2/4}{1 - P^2K_1/4}\right)^m \to 0, \quad n \in \infty.$$

Далее, переходя к пределу в последнем неравенстве и учитывая периодичность x_n и y_n, получаем, что $x_n(x_0) \equiv y_n(x_0)$. Из единственности периодического решения уравнения (13) видно, что $x_n(x_0) = x_n^0(x_0)$. Теорема доказана.

Из уравннеия (13) следует, что всякое его решение, для которого

$$\Delta(x_0) = \overline{f_n(x_n^0(x_0), x_{n+1}^0(x_0))} = 0, \tag{25}$$

является периодическим решением уравнения (1) таким, что его начальное значение равно x_0, а

$$x_1 = x_0 - \overline{\sum_{k=0}^{i-1} f_k(x_k^0(x_0), x_{k+1}^0(x_0))}. \tag{26}$$

Поэтому вопрос существования P-периодического решения уравнения (1) однозначно связан с вопросом существования нулей функции $\Delta(x_0)$, имеющей вид (25). Поскольку $\Delta(x_0)$ находится лишь приближенно, исходя из последовательности функций

$$\Delta_m(x_0) = \overline{f_n(x_n^m(x_0), x_{n+1}^m(x_0))}, \tag{27}$$

возникает задача, как по нулям функции $\Delta_m(x_0)$ судить о нулях функции $\Delta(x_0)$. Для ее решения следует учесть, что каждая из функций $\Delta_m(x_0)$, как и предельная функция $\Delta(x_0)$, определена и непрерывна для x_0 из отрезка I^1 и удовлетворяет неравенству

$$|\Delta_m(x_0) - \Delta(x_0)| \leq \frac{1}{p}\sum_{i=0}^{p-1}\left|f_n(x_n^m(x_0), x_{n+1}^m(x_0)) - f_n(x_n^0(x_0), x_{n+1}^0(x_0))\right| \leq$$

$$\leq K_1\left|x_n^0(x_0) - x_n^m(x_0)\right|_0 + K_2\left|x_{n+1}^0(x_0) - x_{n+1}^m(x_0)\right|_0. \tag{28}$$

Но на основании оценки (15) имеем

$$\left|x_n^0(x_0) - x_n^m\right| \leq \left(\frac{P^2}{4}(K_1+K_2)\right)^m \frac{1}{1-P^2(K_1+K_2)/4}\frac{P^2}{4}M = d_m. \tag{29}$$

Из последнего соотношения вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть уравнение* (1) — *T-система в области* (2). *Предположим, что для некоторого* $m \geq 0$ *функция* $\Delta_m(x_0)$, *определяемая согласно формуле* (27), *удовлетворяет неравенствам*

$$\min_{x_0 \in I_f^1} \Delta_m \leq -d_m(K_1+K_2),$$
$$\max_{x_0 \in I_f^1} \Delta_m \geq d_m(K_1+K_2). \tag{30}$$

Тогда уравнение (1) *имеет* P *-периодическое решение* $x = x_n$, *для которого* $x_n \in D$ *при* $n \in Z$, $x_0 \in I_f^1$.

Доказательство теоремы следует из представления

$$\Delta(x) = \Delta_m(x) + (\Delta(x) - \Delta_m(x)).$$

и непрерывности функций $\Delta(x)$ и $\Delta_m(x)$.

1. *Мартынюк Д. И.* Лекции по качественной теории разностных уравнений. – К.: Наук. думка, 1972. – 251 с.
2. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования периодических решений. – К.: Вища шк., 1976. – 184 с.
3. *Митропольський Ю. О., Михайловська Н. О.* Періодичні розв'язки дискретних різницевих рівнянь другого порядку // Укр. мат. журн. – 1972. – **24**, № 4. – С. 543–546.

Получено 06.12.95