УДК 517.949.2

Ю. В. Теплинский (Каменец-Подол. пед. ин-т),
М. В. Самойленко (Укр. пед. ун-т)

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ СЧЕТНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ И КВАЗИЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

We present conditions of the existence of periodic solutions of linear difference equations with periodic coefficients in spaces of linear number sequences. In the case where the generating linear equation has a unique periodic solution, we indicate sufficient conditions for the existence of a periodic solution of a quasilinear difference equation.

Наведено умови існування періодичних розв'язків лінійних різницевих рівнянь з періодичними коефіцієнтами в просторах обмежених числових послідовностей. Для квазілінійного різницевого рівняння вказано достатні умови існування періодичного розв'язку у випадку, коли породжуюче лінійне рівняння має єдиний періодичний розв'язок.

Известно, что разностные уравнения являются удобной моделью для описания импульсных и дискретных динамических систем, а также систем, в состав которых входят цифровые вычислительные устройства [1, 2]. Разностные уравнения используются также при численном решении различных классов дифференциальных уравнений. В последние десятилетия усилился интерес к исследованию вопросов, связанных с построением периодических решений, изучением инвариантных тороидальных множеств и приводимости разностных уравнений и их систем различного вида. Этим и близким к ним вопросам посвящено много работ [3–8].

В настоящей статье приведены условия существования периодических решений линейных и квазилинейных разностных уравнений в пространстве ограниченных числовых последовательностей.

Рассмотрим однородное разностное уравнение

$$x_{n+1} = A(n)\,x_n, \tag{1}$$

где $x = (x^1, x^2, x^3, \ldots) \in \mathfrak{M}$, $A(n) = [a_{ij}(n)]_{i,j=1}^{\infty}$ — бесконечная матрица, $\mathfrak{M}$ — пространство ограниченных числовых последовательностей с нормой $\|x\| = \sup\limits_i \{|x_i|\}$, n пробегает множество Z целых чисел.

Множество всех бесконечных постоянных матриц A, ограниченных по норме $\|A\| = \sup\limits_i \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|$, обозначим через $\mathcal{B}$.

Будем считать, что при всех $n \in Z$ матрицы $A(n)$ обратимы и $A(n)$, $A^{-1}(n) \in \mathcal{B}$.

Под решением уравнения (1) на отрезке $[a, b] \subset R^1$ с начальными значениями $x_l \in \mathfrak{M}$, $n = l \in [a, b] \cap Z \coloneqq [a, b]_Z$ будем понимать дискретную функцию $x_n = x(n, x_l)$, которая обращает (1) в тождество на $[a, b]_Z$, принадлежит пространству $\mathfrak{M}$ на этом множестве и удовлетворяет условию $x_l = x(l, x_l)$.

Легко видеть, что для любых начальных значений $l \in Z$, $x_l \in \mathfrak{M}$ существует единственное решение $x_n = x(n, x_l)$ уравнения (1) на отрезке $(-\infty, +\infty)$.

Составим матрицу $\Omega(n, l)$, i-м столбцом которой является решение $\overset{(i)}{x}_n = \overset{(i)}{x}(n, x_l)$ уравнения (1) с начальными значениями

$$n = l, \quad \overset{(i)}{x}_l = \Big(\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-1}, 0, 0, \ldots \Big), \quad i = 1, 2, 3, \ldots .$$

Это значит, что $\Omega(l, l) = E$, где E — единичная матрица. Сконструированную матрицу назовем матрицантом уравнения (1) и обозначим через Ω_l^n. Очевидно при всех $n \in Z$ $\Omega_l^{n+1} = A(n) \cdot \Omega_l^n$, что ведет к представлению

$$\Omega_l^n = \begin{cases} A(n-1)\, A(n-2) \ldots A(l) & \text{при } n > l; \\ E & \text{при } n = l; \\ A^{-1}(n)\, A^{-1}(n-1) \ldots A^{-1}(l-1) & \text{при } n < l, \end{cases} \tag{2}$$

а значит, матрица Ω_l^n обратима при любых $l, n \in Z$, причем Ω_l^n, $\left(\Omega_l^n\right)^{-1} \in \in \mathcal{B}$.

Лемма 1. *Любое решение* $x_n = x(n, x_l)$ *уравнения* (1) *представимо в виде* $x_n = \Omega_l^n x_l$, $n \in Z$.

Для доказательства леммы 1 достаточно убедиться в справедливости равенства

$$\sum_{i=1}^{\infty} \overset{(i)}{x}_{n+1} x_l^i = A(n) \sum_{i=1}^{\infty} \overset{(i)}{x}_n x_l^i, \tag{3}$$

в котором $\overset{(i)}{x}_n$ $(i = 1, 2, \ldots)$ — столбцы матрицанта Ω_l^n, $x_l = (x_l^1, x_l^2, \ldots)$, $\overset{(i)}{x}_n = (\overset{(i)}{x}{}_l^1, \overset{(i)}{x}{}_l^2, \ldots)$.

Учитывая, что $\sum_{i=1}^{\infty} \left| \overset{(i)}{x}{}_l^s \right| = 1$ при всех $s \in Z^+$, где Z^+ — множество натуральных чисел, отмечаем, что повторный ряд $\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{sj}(l) \overset{(i)}{x}{}_l^j$ абсолютно сходится при всех $s \in Z^+$ и его сумма ограничена постоянной $\|A(l)\|$.

Тогда при всех $s \in Z^+$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left| \overset{(i)}{x}{}_{l+1}^s \right| \le \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |a_{sj}(l)| \left| \overset{(i)}{x}{}_l^j \right| \le \|A(l)\|,$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left| \overset{(i)}{x}{}_{l-1}^s \right| \le \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |\hat{a}_{sj}(l-1)| \left| \overset{(i)}{x}{}_l^j \right| \le \|A^{-1}(l-1)\|,$$

где $A^{-1}(n) = [\hat{a}_{sj}(n)]_{i,j=1}^{\infty}$, $n \in Z$.

Методом полной математической индукции убеждаемся, что для всех $s \in \in Z^+$ выполняются неравенства

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left| \overset{(i)}{x}{}_n^s \right| \le \begin{cases} \prod_{j=l}^{n-1} \|A(j)\|, & n > l; \\ \prod_{j=l-1}^{n} \|A^{-1}(j)\|, & n < l, \end{cases}$$

гарантирующие справедливость равенства

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{sj}(n) \overset{(i)j}{x_n} x_l^i = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{sj}(n) \overset{(i)j}{x_n} x_l^i,$$

из которого следует (3).

Везде в дальнейшем для удобства положим $l = 0$. Напомним, что собственные значения матриц монодромии Ω_0^N называют мультипликаторами уравнения (1), матрица которого $A(n)$ N-периодична, т. е. периодична по $n \in Z$ с периодом $N \in Z^+$.

Лемма 2. *Уравнение* (1) *с* N*-периодической матрицей* $A(n)$ *имеет нетривиальное решение* $\xi_n = \xi(n)$, *удовлетворяющее условию* $\xi_{n+N} = \rho\,\xi_n$, $\rho \in R^1$, $n \in Z$, *тогда и только тогда, когда* ρ *является мультипликатором этого уравнения.*

Доказательство леммы 2 проводится аналогично доказательству теоремы 13.1 из [4].

Сформулируем простое утверждение, вытекающее из леммы 2.

***Следствие* 1.** *Уравнение* (1) *с* N*-периодической матрицей* $A(n)$ *имеет нетривиальное* N*-периодическое решение с начальным значением* $x_0 \in \mathfrak{M}$ *тогда и только тогда, когда* x_0 *удовлетворяет уравнению*

$$(E - \Omega_0^N)\, x_0 = 0. \tag{4}$$

Таким образом, если матрица $E - \Omega_0^N$ обратима, то уравнение (1) с N-периодической матрицей $A(n)$ не имеет N-периодических решений, отличных от тривиального, ибо точка $\rho = 1$ является регулярной для оператора умножения матрицы Ω_0^N на вектор из $\mathfrak{M}$, и уравнение (4) имеет в пространстве $\mathfrak{M}$ лишь нулевое решение.

Выпишем линейное неоднородное уравнение

$$x_{n+1} = A(n)\, x_n + g_n, \tag{5}$$

где при всех $n \in Z$ $A(n)$, $A^{-1}(n) \in \mathcal{B}$; x_n, $g_n \in \mathfrak{M}$; матрица $A(n)$ и функция $g_n = g(n)$ N-периодичны по n. О существовании N-периодических решений уравнения (5) речь идет в следующей теореме.

Теорема 1. *Если матрица* $E - \Omega_0^N$ *обратима, то уравнение* (5) *имеет единственное* N*-периодическое решение, определенное на отрезке* $(-\infty, -\infty)$.

Доказательство. Уравнение (5) не может иметь более одного N-периодического решения, ибо в противном случае соответствующее однородное уравнение (1) имело бы отличное от нулевого N-периодическое решение, что невозможно.

Нетрудно проверить, что решение $x_n = x(n, x_0)$, $x_0 \in \mathfrak{M}$, уравнения (5) представимо в виде

$$x_n = \begin{cases} \Omega_0^n x_0 + \sum\limits_{\nu=0}^{n-1} \Omega_0^n (\Omega_0^{\nu+1})^{-1} g_\nu & \text{при } n \in Z^+; \\ x_0 & \text{при } n = 0; \\ \Omega_0^n x_0 - \sum\limits_{\nu=n}^{-1} \Omega_0^n (\Omega_0^{\nu+1})^{-1} g_\nu & \text{при } n \in Z^-, \end{cases} \tag{6}$$

где $Z^- = \{-1, -2, -3, \ldots\}$, Ω_0^n — матрицант уравнения (1).

Из (6) следует необходимое и достаточное условие N-периодичности на отрезке $[0,+\infty)$ решения уравнения (5) с начальными значениями $n=0$, $x_0 \in \mathfrak{M}$:

$$x_n = \Omega_0^n x_0 + \sum_{\nu=0}^{N-1} \Omega_0^N (\Omega_0^{\nu+1})^{-1} g_\nu ,$$

из которого, учитывая обратимость матрицы $E-\Omega_0^N$, находим единственное нужное начальное значение

$$x_0 = (E-\Omega_0^N)^{-1} \sum_{\nu=0}^{N-1} \Omega_0^N (\Omega_0^{\nu+1})^{-1} g_\nu . \tag{7}$$

Тогда решение уравнения (5) вида

$$x_n = \Omega_0^n (E-\Omega_0^N)^{-1} \sum_{\nu=0}^{N-1} \Omega_0^N (\Omega_0^{\nu+1})^{-1} g_\nu + \sum_{\nu=0}^{n-1} \Omega_0^n (\Omega_0^{\nu+1})^{-1} g_\nu, \quad n \in Z^+, \tag{8}$$

является единственным его N-периодическим решением на отрезке $[0,+\infty)$.

Для начального значения $\tilde{x}_0 \in \mathfrak{M}$ N-периодического на отрезке $(-\infty, 0]$ решения уравнения (5) получаем выражение

$$\tilde{x}_0 = (E-\Omega_0^N)^{-1} \Omega_0^N \sum_{\nu=-N}^{-1} \Omega_0^{-N} (\Omega_0^{\nu+1})^{-1} g_\nu , \tag{9}$$

следовательно, решение уравнения (5) вида

$$x_n = \Omega_0^n (E-\Omega_0^N)^{-1} \sum_{\nu=-N}^{-1} (\Omega_0^{\nu+1})^{-1} - \sum_{\nu=n}^{-1} \Omega_0^n (\Omega_0^{\nu+1})^{-1} g_\nu, \quad n \in Z^-, \tag{10}$$

является его единственным N-периодическим решением на отрезке $(-\infty, 0]$.

Нетрудно убедиться, что начальные значения x_0 и $\tilde{x}_0$, определенные равенствами (7) и (9) соответственно, совпадают, а значит, решения (8) и (10) совпадают в точке $n=0$, что завершает доказательство.

Случай, рассмотренный в теореме (1), принято называть нерезонансным. Для резонансного случая, в котором матрица $E-\Omega_0^N$ не обратима, теорема 1, естественно, не верна. Ниже мы приведем достаточные условия существования N-периодических решений уравнения (5) в резонансном случае. Эти условия получены методом укорочения уравнения (5).

Укороченное до порядка $s \in Z^+$ уравнение (5) имеет вид

$$\overset{(s)}{x}_{n+1} = \overset{(s)}{A}(n) \overset{(s)}{x}_n + \overset{(s)}{g}_n , \tag{11}$$

где $\overset{(s)}{x} = (x^1, x^2, \dots, x^s)$, $\overset{(s)}{g}_n = (g_n^1, g_n^2, \dots, g_n^s)$, $\overset{(s)}{A}(n) = [a_{ij}(n)]_{i,j=1}^{\infty}$.

Теорема 1. *Если для точки $x_0 \in \mathfrak{M}$ существует последовательность натуральных чисел $m_1 < m_2 < \ldots < m_\nu < \ldots$ ($m_\nu \to \infty$ при $\nu \to \infty$), для которых уравнение (11) при $s = m_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$, имеет N-периодическое решение $\overset{(s)}{x} = \overset{(s)}{x}(n, \overset{(s)}{x}_0)$, то решение $x_n = x(n, x_0)$ уравнения (5) N-периодическое.*

Доказательство. Достаточно показать, что при $\nu \to \infty$ $\overset{(m_\nu)}{x}_n \to x_n$ в покоординатном смысле. Докажем это для первых координат векторов x_n и $\overset{(m_\nu)}{x}_n$.

При $n=1$

$$\lim_{s\to\infty} \overset{(s)}{x}{}_1^1 = \lim_{s\to\infty} \sum_{j=1}^{s} a_{1j}(0)\, x_0^j + g^1(0) = x_1^1,$$

причем $\|\overset{(s)}{x}_1\| = \|x_0\|\,\|A(0)\| + \|g(0)\| = P_0 = \text{const}$ равномерно по $s = m_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$.

Полагая $\overset{(s)}{x}{}_1^j = 0$ при $j > s$ и учитывая, что ряд $\sum_{j=1}^{\infty} a_{1j}(1)\overset{(s)}{x}{}_1^j$ мажорируется сходящимся числовым рядом $P_0\sum_{j=1}^{\infty} |a_{1j}(1)|$, получаем равенство

$$\lim_{s\to\infty} \overset{(s)}{x}{}_2^1 = \lim_{s\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{1j}(1)\overset{(s)}{x}{}_1^j + g^1(1) = x_2^1,$$

причем $\|\overset{(s)}{x}_2\| \le \|A(1)\|P_0 + \|g(1)\| = P_1 = \text{const}$ для всех $s = m_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$.

Методом полной математической индукции убеждаемся в справедливости равенства

$$\lim_{\nu\to\infty} \overset{(m_\nu)}{x_n} = x_n \tag{12}$$

при всех $n \in Z^+$. При этом

$$\|\overset{(s)}{x}_n\| \le \|g(n-1)\| + \|x_0\| \prod_{\alpha=0}^{n-1} \|A(\alpha)\| + \sum_{i=1}^{n-1} \|g(i-1)\| \prod_{\alpha=i}^{n-1} \|A(\alpha)\|,$$

$$n \in Z^+, \quad n \ne 1.$$

Проведя аналогичные рассуждения, нетрудно показать справедливость равенства (12) в покоординатном смысле для всех $n \in Z^-$. В этом случае справедлива оценка

$$\|\overset{(s)}{x}_n\| \le \|x_0 - g(-1)\| \prod_{\alpha=n}^{-1} \|A^{-1}(\alpha)\| - \sum_{i=-2}^{n} \|g(i)\| \prod_{\alpha=n}^{i} \|A^{-1}(\alpha)\|,$$

$$n \in Z^-, \quad n \ne -1,$$

для всех натуральных s.

Доказанная теорема редуцирует задачу отыскания N-периодического решения уравнения (5) к конечномерному случаю.

Перейдем к отысканию необходимых условий существования N-периодических решений уравнения (5) в резонансном случае.

Множество матриц A из пространства $\mathcal{B}$, для которых $\sup_j \sum_{i=1}^{\infty} |a_{ij}| < \infty$, обозначим через $\mathcal{B}_1$, а множество векторов $x \in \mathfrak{M}$, для которых $\sum_{i=1}^{\infty} |x^i| < < \infty$, — через $\mathfrak{M}_1$.

Рассмотрим сопряженное по отношению к (1) уравнение

$$y_{n+1} = \left(A^T(n)\right)^{-1} y_n, \quad n \in Z, \tag{13}$$

где T обозначает операцию транспонирования матрицы.

Докажем сперва вспомогательные утверждения.

Лемма 3. *Пусть* $A(n),\ A^{-1}(n) \in \mathcal{B}_1,\ n \in Z$. *Тогда*

$$(Y_0^n)^T \Omega_0^n = E, \quad n \in Z, \tag{14}$$

где Ω_0^n *и* Y_0^n *— матриицанты уравнений* (1) *и* (13) *соответственно.*

Доказательство. Если $y_n = y(n)$ — решение уравнения (13), то $y_n^T = y_n^T(n)$ (вектор-строка) является решением уравнения

$$y_{n+1}^T A(n) = y_n^T, \quad n \in Z, \tag{15}$$

и обратно. Тогда $(Y_0^n)^T$ — матрицант уравнения (15) в том смысле, что любое его решение представимо в виде $c^T (Y_0^n)^T$, где c — постоянный вектор-столбец из $\mathfrak{M}$. Последнее означает, что $(Y_0^{n+1})^T = (Y_0^n)^T A^{-1}(n)$, откуда следует представление

$$(Y_0^n)^T = \begin{cases} A^{-1}(0)\, A^{-1}(1) \ldots A^{-1}(n-1), & n > 0; \\ E, & n = 0; \\ A(-1)\, A(-2) \ldots A(n), & n < 0. \end{cases}$$

Учитывая (2), получаем (14).

Лемма 4. *Для любых решений* $x_n = x(n, x_0)$ *и* $y_n = y(n, y_0)$ *уравнений* (1) *и* (13) *соответственно в условиях леммы* 3 *справедливо равенство* $y_n^T x_n = y_0^T x_0$, $n \in Z$, *если хотя бы одно из начальных значений* x_0, y_0 *принадлежит* $\mathfrak{M}_1$.

Доказательство следует из равенства $y_n^T x_n = y_0^T (Y_0^n)^T \Omega_0^n x_0$, ибо Y_0^n, $\Omega_0^n \in \mathcal{B}_1$.

Легко видеть, что если, например, $x_0 \in \mathfrak{M}_1$, то $x_n = x(n, x_0) \in \mathfrak{M}_1$ при всех $n \in Z$.

Теорема 3. *Пусть уравнение* (5) *удовлетворяет условию леммы* 3, *матрица монодромии соответствующего однородного уравнения* (1) *симметрическая и единица является его мультипликатором. Тогда необходимым условием существования* N*-периодического решения уравнения* (5) *является равенство*

$$\sum_{\nu=1}^{N} y_\nu^T g_{\nu-1} = 0, \tag{16}$$

где $y_n = y(n)$ *— любое* N*-периодическое решение уравнения* (13), *принадлежащее пространству* $\mathfrak{M}_1$.

Доказательство. Уравнение (4) для уравнения (13) имеет вид

$$(E - Y_0^N)\, y_0 = 0. \tag{17}$$

Если $y_0 \in \mathfrak{M}$ является его решением, то y_0 — решение уравнения $y_0^T (Y_0^N)^T = y_0^T$. Учитывая (14), получаем уравнение

$$y_0^T ((\Omega_0^N)^{-1} - E)\, \Omega_0^N = 0.$$

Если матрица Ω_0^N симметрическая, то последнее уравнение эквивалентно уравнению (4). Итак, уравнение (17) имеет те же нетривиальные решения из $\mathfrak{M}$, что и уравнение (4). Значит, единица является мультипликатором уравнения (1) и (13) одинаковой кратности и каждому N-периодическому решению уравнения (1) соответствует N-периодическое решение уравнения (13) с теми же начальными значениями 0, $x_0 = y_0$.

Пусть $x_n = x(n)$ — любое N-периодическое решение уравнения (5), $y_n = y(n, y_0)$ — любое N-периодическое решение уравнения (13) такое, что $y_0 \in \mathfrak{M}_1$. Тогда $y_n \in \mathfrak{M}_1$ при всех $n \in Z$ и справедливо равенство

$$y_{n+1}^T x_{n+1} = y_{n+1}^T (A(n) x_n + g_n) = y_n^T x_n + y_{n+1}^T g_n,$$

откуда

$$y_{n+1}^T x_{n+1} - y_n^T x_n = y_{n+1}^T g_n. \tag{18}$$

Суммируя равенства (18) в пределах от $n = 0$ до $n = N - 1$, приходим к равенству

$$y_N^T x_N - y_0^T x_0 = \sum_{\nu=1}^{N} y_\nu^T g_{\nu-1},$$

из которого следует (16). Теорема доказана.

***Замечание* 1.** Может оказаться, что уравнение (4) имеет лишь нулевое решение, а матрица $E - \Omega_0^N$ необратима. Тогда уравнение (5) или имеет единственное N-периодическое решение, или не имеет такового. Этот случай для конечномерных систем невозможен.

В заключение рассмотрим квазилинейное уравнение

$$x_{n+1} = A(n) x_n + g(n) + \varepsilon F_n(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{19}$$

где $F_n(x)$ — N-периодическая вектор-функция, принадлежащая пространству $\mathfrak{M}$ при всех $x \in \mathfrak{M}$, ε — действительный параметр. При $\varepsilon = 0$ (19) превращается в порождающее его уравнение (5).

Будем считать, что матрица $E - \Omega_0^N$ обратима. Тогда по теореме 1 порождающее уравнение на отрезке $[0, +\infty)$ имеет единственное N-периодическое решение, определенное соотношениями (7), (8). Обозначим это решение через $\varphi_n = \varphi(n)$.

Приведем достаточные условия существования N-периодического решения уравнения (19). Введем обозначения:

$$K_1 = \max_{\nu = \overline{0, N-1}} \{\|(\Omega_0^{\nu+1})^{-1}\|\},$$

$$K_2 = \|\Omega_0^N\| \, \|(E - \Omega_0^N)^{-1}\|,$$

$$\zeta_n = \|A(n)\| + |\varepsilon| K, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Теорема 4. *Если функция $F_n(x)$ удовлетворяет неравенству*

$$\|F_n(x) - F_n(\bar{x})\| \le K \|x - \bar{x}\|,$$

$$x, \ \bar{x} \in \mathfrak{M}; \ K = \text{const} > 0; \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

то при любом ε таком, что

$$|\varepsilon| < \frac{1}{K K_1 K_2 \left(1 + \sum_{\nu=0}^{N-2} \prod_{i=0}^{\nu} \zeta_i\right)}, \tag{20}$$

уравнение (19) имеет единственное N-периодическое решение, определенное на отрезке $[0, +\infty)$.

Доказательство. Любое N-периодическое решение $x_n = x(n, x_0)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, уравнения (19) должно удовлетворять системе уравнений

$$
\begin{aligned}
x_0 &= (E-\Omega_0^N)^{-1}\sum_{\nu=0}^{N-1}\Omega_0^N(\Omega_0^{\nu+1})^{-1}(g(\nu)+\varepsilon F_\nu(x_\nu)),\\
x_n &= \Omega_0^N(E-\Omega_0^N)^{-1}\Omega_0^N\sum_{\nu=0}^{N-1}(\Omega_0^{\nu+1})^{-1}(g(\nu)+\varepsilon F_\nu(x_\nu)) +\\
&\quad+\sum_{\nu=0}^{n-1}\Omega_0^N(\Omega_0^{\nu+1})^{-1}(g(\nu)+\varepsilon F_\nu(x_\nu)),\quad n\in Z^+.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

С другой стороны, как нетрудно проверить, справедливы равенства

$$x_N = (\Omega_0^N(E-\Omega_0^N)^{-1}+E)(E-\Omega_0^N)x_0 = x_0,$$

$$x_{n+1} = A_n x_n + g(n) + \varepsilon F_n(x_n),$$

т. е. любое решение $x_n = x(n, x_0)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$; системы уравнений (21) N-периодично и является решением уравнения (19).

Таким образом, множество решений системы уравнений (21) совпадает с множеством N-периодических решений уравнения (19). Очевидно, количество последних совпадает с количеством точек $x_0\in\mathfrak{M}$, удовлетворяющих первому уравнению (21).

Рассмотрим оператор

$$Lx_0 = (E-\Omega_0^N)^{-1}\sum_{\nu=0}^{N-1}\Omega_0^N(\Omega_0^{\nu+1})^{-1}(g(\nu)+\varepsilon F_\nu(x_\nu)),$$

где x_ν представляется через x_0 согласно (19).

Легко видеть, что оператор L переводит $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{M}$, причем выполняется неравенство

$$
\begin{aligned}
\rho\,(Lx_0, Lz_0) &= \|Lx_0 - Lz_0\| \le\\
&\le |\varepsilon|\,\|\Omega_0^N\|\,\|(E-\Omega_0^N)^{-1}\|\sum_{\nu=0}^{N-1}\|(\Omega_0^{\nu+1})^{-1}\|\,\|F_\nu(x_\nu)-F_\nu(z_\nu)\|,
\end{aligned}
$$

где x_0, z_0 — произвольные точки из $\mathfrak{M}$. Тогда

$$\rho\,(Lx_0, Lz_0) \le |\varepsilon|\,KK_1K_2\sum_{\nu=0}^{N-1}\|x_\nu - z_\nu\|$$

и

$$\|x_n - z_n\| \le \|x_0 - z_0\|\prod_{i=0}^{n-1}\zeta_i,\quad n\in Z^+.$$

Из двух последних неравенств получаем оценку

$$\rho\,(Lx_0, Lz_0) \le |\varepsilon|\,KK_1K_2\left(1+\sum_{\nu=0}^{N-2}\prod_{i=0}^{\nu}\zeta_i\right)\|x_0 - z_0\|,$$

свидетельствующую о том, что при любом ε, удовлетворяющем неравенству (20), оператор L является сжимающим. В силу полноты пространства $\mathfrak{M}$ он имеет единственную неподвижную точку $x^*\in\mathfrak{M}$. Это означает, что решение уравнения (19) $x_n = x(n, x^*)$, $x_0 = x^*$ является его единственным N-периодическим решением.

***Замечание* 2.** Решение $x_n = x(n, x^*)$ можно представить в виде суммы $x(n, x^*) = \varphi_n + y_n$, где y_n — единственное N-периодическое решение уравнения

$$y_{n+1} = A(n) y_n + \varepsilon F_n(\varphi_n + y_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots ,$$

с начальным значением y_0, удовлетворяющим уравнению

$$y_0 = (E - \Omega_0^N)^{-1} \sum_{\nu=0}^{N-1} \Omega_0^N (\Omega_0^{\nu+1})^{-1} \varepsilon F_\nu (\varphi_\nu + y_\nu).$$

Начальные значения x^* и y_0 можно искать, используя метод последовательных приближений и принимая за исходную точку, например, $\varphi_0 \in \mathfrak{M}$.

1. *Болтянский В. Г.* Оптимальное управление дискретными системами. — М.: Наука, 1973. – 446 с.
2. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. – М.: Мир, 1971. – 309 с.
3. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Мартынюк Д. И.* Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно-периодическими коэффициентами. – Киев: Наук. думка, 1984. – 216 с.
4. *Мартынюк Д. И.* Лекции по качественной теории разностных уравнений. — Киев: Наук. думка, 1972. – 246 с.
5. *Мартынюк Д. И., Миронов Н. В., Харабовская Л. В.* Численно-аналитический метод исследования периодических решений нелинейных разностных уравнений // Дифференциально-разностные уравнения. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1971. – С. 45–58.
6. *Мартынюк Д. И., Перестюк Н. А.* О приводимости линейных систем разностных уравнений с квазипериодическими коэффициентами // Вычислит. и прикл. математика. – 1974. – Вып. 23. – С. 116–127.
7. *Мартынюк Д. И., Перестюк Н. А.* О приводимости разностных уравнений на торе // Там же. – 1975. – Вып. 26. – С. 42–48.
8. *Самойленко А. М., Мартынюк Д. И., Перестюк Н. А.* Существование инвариантных торов систем разностных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1973. – С. 1904–1910.

Получено 12.10.95