УДК 512. 662. 5

О. П. Бондарь (Гос. летн. академия Украины, Кировоград)

ОБОБЩЕННАЯ (КО)ГОМОЛОГИЧЕСКАЯ ДЛИНА МНОГООБРАЗИЯ И ФУНКЦИИ С СИНГУЛЯРНЫМИ ПОДМНОГООБРАЗИЯМИ

A topological invariant of a manifold is introduced. It is used to give an estimate for the generalized Lyusternik – Shnirel'man category and an estimate for the minimal number of singular submanifolds of a finction defined on the manifold.

Введено топологічний інваріант многовиду, в термінах якого дано оцінку його узагальненої категорії Люстерніка – Шнірельмана та оцінку мінімального числа сингулярних підмноговидів функції на ньому.

В настоящей статье рассматриваются гладкие функции на многообразии, множество критических точек которых является несвязным объединением гладких подмногообразий. Функция называется P-функцией [1], если каждое ее критическое подмногообразие гомеоморфно многообразию P без края. В [1] был введен топологический инвариант многообразия — P-категория, — в терминах которого была получена нижняя граница числа сингулярных подмногообразий P-функции на многообразии. Но P-категория — трудновычислимый инвариант многообразий. С целью ее оценки вводится другой инвариант — p-длина многообразия (p — размерность многообразия P), обобщающая (ко)гомологическую длину многообразия.

Определение 1. *Пусть m — размерность многообразия M и p — неотрицательное целое число. Пусть $H^*(M)$ — кольцо когомологий многообразия M над $\mathbb{Z}$ или $\mathbb{R}$, если многообразие M ориентируемо, и $\mathbb{Z}_2$, если M неориентируемо. В $H^*(M)$ рассмотрим q элементов $a_1, \dots, a_q$, удовлетворяющих условиям:*

а) $\dim a_i > 0$, $i = 1, \dots, q$;

б) *произведение a_i, $i = 1, \dots, q$, в кольце $H^*(M)$ отлично от нуля;*

в) *размерность этого произведения не превышает $m - p$.*

Когомологической p-длиной $\operatorname{long}^p M$ многообразия M называется максимальное число q таких элементов.

Для связного компактного многообразия M в силу двойственности Пуанкаре сформулируем двойственное определение.

Определение 2. *В обозначениях определения 1 гомологической p-длиной многообразия M называется максимальное число q циклов $c_1, \dots, c_q$ многообразия M, удовлетворяющих условиям:*

а) $\dim c_i < m$, $i = 1, \dots, q$;

б) $\bigcap\limits_{i=1}^{q} c_i = c$ *— цикл, не гомологичный нулю;*

в) $\dim c \geq p$.

(Ко)гомологическую p-длину многообразия M назовем p-длиной $\operatorname{long}^p M$ *многообразия M. Если многообразие M с краем, то в определении его p-длины содержатся только абсолютные циклы.*

Заметим, что при $p = 0$ определение p-длины совпадает с определением (ко)гомологической длины многообразия.

Теорема 1. *Пусть p — размерность многообразия P. Тогда P-категория многообразия M не меньше увеличенной на единицу его p-длины:*

$$P\operatorname{cat} M \geq \operatorname{long}^p M + 1,$$

если многообразие M без края, и не меньше его p-длины:

$$P\operatorname{cat} M \geq \operatorname{long}^p M,$$

если многообразие M с краем.

Доказательство. В случае многообразия без края рассмотрим циклы $c_1, \ldots, c_q$ в $H_*(M)$ размерности, меньшей размерности m многообразия M, такие, что их пересечение есть не гомологичный нулю цикл размерности, не меньшей p, и

$$q = \operatorname{long}^p M.$$

Предположим, что $P\operatorname{cat} M = s \leq q$. Тогда в M существуют замкнутые подмножества $A_1, \ldots, A_s$, стягиваемые на P, объединение которых есть M. Без уменьшения общности можно считать, что $s = q$ и

$$M = \bigcup_{i=1}^{q} A_i.$$

Предполагаем $\dim c_i > p$. В противном случае утверждение теоремы очевидно. Сопоставим каждому циклу c_i множество A_i. Поскольку каждое A_i стягивается на P, то из точной гомологической последовательности

$$\ldots \to H_l(A_i) \xrightarrow{i_*} H_l(M) \xrightarrow{j_*} H_l(M, A_i) \to \ldots$$

при $m > l > p$ получаем, что $i_* = 0$, т. е. j_* — гомоморфизм, что равносильно равенству

$$H_l(M) = H_l(M, A_i) \text{ при } l > p.$$

Это значит, что каждый цикл c_i гомологичен циклу $\gamma_i \subset H_l(M, A_i)$, т. е. носитель цикла γ_i лежит в $M \setminus A_i$. Пересечение γ этих циклов есть не гомологичный нулю цикл

$$0 \nsim c = c_1 \cap \ldots \cap c_q \sim \gamma_1 \cap \ldots \cap \gamma_q = \gamma,$$

который должен принадлежать пустому множеству

$$\gamma \subset (M \setminus A_i) \cap \ldots \cap (M \setminus A_q) = M \setminus \bigcup_{i=1}^{q} A_i = \varnothing.$$

Аналогичное противоречие в случае многообразия M с краем завершает доказательство теоремы.

На многообразиях с краем рассматриваются такие P-функции, которые принимают постоянное максимальное значение и не имеют на нем критических точек.

Из теоремы 1 и теоремы 1 из [1] вытекает следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть M — гладкое компактное связное многообразие и p —*

размерность многообразия P. *Тогда число* k_p *критических подмногообразий* P-*функции на* M *удовлетворяет неравенству*

$$k_p \geq \operatorname{long}^p M + 1,$$

если многообразие M *без края, и неравенству*

$$k_p \geq \operatorname{long}^p M,$$

если многообразие M *с краем.*

Напомним [1], что P-функция на многообразии называется точной, если число ее критических подмногообразий есть минимум критических подмногообразий, взятый по всем P-функциям на многообразии, и P-функция называется круглой, если P — окружность S^1. Очевидно, если число сингулярных подмногообразий P-функции на многообразии совпадает со своей нижней границей в терминах p-длины, то такая P-функция есть точной. Приведем пример многообразия и точной P-функции на нем.

Утверждение 1. *Пусть многообразие*

$$M = S^{k_1} \times S^{k_2} \times \ldots \times S^{k_n}$$

есть произведение k_i-*мерных сфер,* $i = 1, \ldots, n$. *Тогда* p-*длина многообразия* M

$$\operatorname{long}^p M \geq n - \min l,$$

где минимум берется по подмножествам

$$\left\{ (k_{i_1}, k_{i_2}, \ldots, k_{i_l}) \subset (k_1, k_2, \ldots, k_n) \colon \sum_{j=1}^{l} k_{i_j} \geq p \right\}.$$

Доказательство. Все рассматриваемые циклы реализованы в виде симплициальных подкомплексов. Из множества $k_1, \ldots, k_n$ выберем l элементов

$$k_{i_1}, k_{i_2}, \ldots, k_{i_l}, \quad l < n - 1,$$

сумма которых не меньше p. Соответствующее подмногообразие

$$Q = S^{k_{i_1}} \times S^{k_{i_2}} \times \ldots \times S^{k_{i_l}}$$

можно рассматривать как цикл размерности $\sum_{j=1}^{l} k_{i_j}$. Рассматривая произведение Q на каждый из сомножителей произведения

$$S^{k_1} \times S^{k_2} \times \ldots \times S^{k_n},$$

оставшихся после удаления Q, получаем $n - l$ циклов многообразия, удовлетворяющих всем условиям определения p-длины. Отсюда очевидно следует утверждение.

Следствие. p-*Длина* n-*мерного тора на* p *единиц меньше его размерности:*

$$\operatorname{long}^p T^n = n - p.$$

Утверждение 2. *Пусть многообразие*

$$M = S^{k_1} \times \ldots \times S^{k_n}$$

есть произведение k_i-*мерных сфер и*

$$P = S^{k_{i_1}} \times \ldots \times S^{k_{i_l}}$$

— произведение k_{i_j}*-мерных сфер, где* $j = 1, \ldots, l,$

$$(k_{i_1}, k_{i_2}, \ldots, k_{i_l}) \subset (k_1, k_2, \ldots, k_n).$$

Тогда на многообразии M *существует точная* P*-функция с числом критических подмногообразий, равным* $n - l + 1$.

Доказательство. Из теоремы 2 и утверждения 1 следует, что число сингулярных подмногообразий P-функции на M не меньше $n - l + 1$. Покажем, что на многообразии M существует P-функция с числом сингулярных подмногообразий, в точности равным $n - l + 1$. Для этого представим многообразие M в виде $M = P \times L$, где P — данное по условию многообразие, L — произведение оставшихся сомножителей из M. Упростим обозначения, полагая $P = S^{k_1} \times \ldots \times S^{k_l}$. Тогда

$$L = S^{k_{l+1}} \times \ldots \times S^{k_n}.$$

Пусть

$$L = S^{k_{l+1}} \times \ldots \times S^{k_n} = \{(x_1, \ldots, x_{k_{l+1}+1}, y_1, \ldots, y_{k_n+1}) \in \mathbb{R}^m :$$
$$x_1^2 + \ldots + x_{k_{l+1}+1}^2 = 1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_1^2 + \ldots + y_{k_n+1}^2 = 1\},$$

где

$$m = \sum_{i=l+1}^{n} k_i + n - l.$$

Зададим на $P \times \mathbb{R}^m$ гладкую функцию

$$f \colon P \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R},$$
$$f(p, x_1, \ldots, y_{k_n+1}) = x_1 + \ldots + y_1.$$

Ее ограничение на L является дифференциальной функцией, имеющей один минимум, одим максимум и критические точки, расположенные на $n - l - 1$ связных поверхностях уровня. Критические точки, расположенные на одной поверхности уровня, можно слить в одну критическую точку [2], вообще говоря, вырожденную. Такая функция будет иметь $n - l + 1$ критическую точку на L. Ее ограничение на M будет искомой P-функцией.

Следствие. *Пусть* P *—* k*-мерный тор,* $k \le n$. *Тогда на* n*-мерном торе существует точная* P*-функция с числом особенностей, равным* $n - k + 1$. *В частности, точная круглая функция на* n*-мерном торе имеет* n *критических окружностей* S^1.

1. *Бондарь О. П.* О числе критических подмногообразий функции на многообразии // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 12. – С. 1702–1705.
2. *Takens F.* The minimal number of critical points of a function on a compact manifold and the Lusternik – Shnirelman category // Invent. math. – 1968. – **6**. – P. 197–204.

Получено 10.03.94