УДК 517.5

О. Ф. Герус (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ОЦЕНКА МОДУЛЯ НЕПРЕРЫВНОСТИ ИНТЕГРАЛА ТИПА КОШИ В ОБЛАСТИ И НА ЕЕ ГРАНИЦЕ

We obtain estimate of the moduli of continuity of the Cauchy-type integral in a closed domain and of its limit values on the boundary in the case where the boundary of the domain is an arbitrary closed rectifiable Jordan curve.

Одержано оцінку модулів неперервності інтеграла типу Коші в замкненій області та його граничних значень на її межі при умові, що межа області є довільною замкненою жордановою спрямлюваною кривою.

Пусть $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость, $E \subset E_1 \subset \mathbb{C}$, $f\colon E_1 \to \mathbb{C}$,

$$\omega_{E,f}(\delta) := \sup_{\substack{|z_1 - z_2| \le \delta,\\ z_1, z_2 \in E}} |f(z_1) - f(z_2)|, \quad \delta > 0,$$

— модуль непрерывности функции f на множестве E, Γ — замкнутая жорданова спрямляемая кривая в $\mathbb{C}$, d — диаметр Γ, D^+ и D^- — соответственно внутренняя и внешняя области, ограниченные Γ, $\delta > 0$, $\Gamma_{z,\delta} := \{\zeta \in \Gamma : |\zeta - z| \le \delta\}$, $\theta_z(\delta) := \operatorname{mes} \Gamma_{z,\delta}$, $\theta(\delta) := \sup\limits_{z \in \Gamma} \theta_z(\delta)$ (см. [1]),

$$\Theta(z, \delta) := \frac{8\pi\delta^2}{\theta_z(4\delta) - \theta_z(\delta)}.$$

Пусть $f\colon \Gamma \to \mathbb{C}$ — интегрируемая функция, Φ^+ и Φ^- — непрерывные продолжения соответственно из областей D^+ и D^- в их замыкания $\overline{D^+}$ и $\overline{D^-}$ интеграла типа Коши

$$\Phi(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \quad z \in D^+ \cup D^-,$$

$$F(z) := \frac{1}{2\pi i} \lim_{\delta \to 0} \int_{\Gamma \setminus \Gamma_{z,\delta}} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta, \quad z \in \Gamma,$$

— приведенный особый интеграл Коши.

В настоящей работе рассматривается задача о существовании интегралов F, Φ^+, Φ^-, а также устанавливается оценка их модулей непрерывности мажорантами, зависящими от модуля непрерывности плотности f. Впервые такая оценка была получена А. Зигмундом [2] для модуля непрерывности тригонометрически сопряженной функции на вещественной прямой, что равносильно оценке для модуля непрерывности $\omega_{\Gamma,F}$, где Γ — окружность. В работах [3 – 8, 1, 9] оценка А. Зигмунда в том же виде, что и на окружности, была получена для других классов кривых, наиболее общим из которых (см. [1, 9]) является класс кривых, удовлетворяющих условию $\theta(\delta) = O(\delta)$. При этом в работах [6, 8, 9] доказана также справедливость оценок с мажорантой А. Зигмунда для модулей непрерывности $\omega_{\overline{D^+},\Phi^+}$, $\omega_{\overline{D^-},\Phi^-}$.

В работах [1, 9 – 12] получены обобщения оценки А. Зигмунда для произвольных замкнутых жордановых спрямляемых кривых. Главной целью данной статьи является уточнение указанных оценок.

Пусть $\mathbb{R}_+$ — множество всех положительных вещественных чисел $\omega\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$,

$$\Omega(\alpha, \beta) := \begin{cases} \sup\limits_{\alpha \le t \le \beta} \dfrac{\omega(t)}{t} & \text{при } 0 < \alpha \le \beta; \\ \Omega(\beta, \beta) & \text{при } 0 < \beta < \alpha. \end{cases}$$

В случае, когда $\omega(t) = \omega_{E,f}(t)$ — модуль непрерывности, будем использовать обозначение $\Omega_{E,f}(\alpha, \beta)$.

Функция $\Omega(\alpha, \beta)$ имеет следующие очевидные свойства:

1) монотонно не убывает по переменной $\beta \in (\alpha, +\infty)$ и монотонно не возрастает по переменной α;

2) если функция ω — монотонно неубывающая, то функция $\alpha\,\Omega(\alpha, \beta)$ — монотонно неубывающая по переменной α;

3) $\Omega(\alpha, \gamma) \le \Omega(\alpha, \beta) + \Omega(\beta, \gamma) \quad \forall\, \alpha, \beta, \gamma \in (0, +\infty)$;

4) если $E_1 \subset E_2$, то $\Omega_{E_1,f}(\alpha, \beta) \le \Omega_{E_2,f}(\alpha, \beta)$.

Основными результатами настоящей работы являются следующие две теоремы.

Теорема 1. *Пусть функция* $f\colon \Gamma \to \mathbb{C}$ *удовлетворяет условию*

$$\sup_{z \in \Gamma} \int_0^d \Omega_{\Gamma,f}(\Theta(z, x), x)\, dx < +\infty. \tag{1}$$

Тогда интеграл F *существует в каждой точке кривой* Γ *и справедлива оценка*

$$\omega_{\Gamma,F}(\delta) \le c \sup_{z \in \Gamma} \int_0^{2d} \Omega_{\Gamma,f}(\Theta(z, x), x) \frac{dx}{1 + x/\delta}, \tag{2}$$

где c *— абсолютная постоянная.*

Теорема 2. *Пусть функция* $f\colon \Gamma \to \mathbb{C}$ *удовлетворяет условию*

$$\sup_{z \in \Gamma} \int_0^{\delta} \Omega_{\Gamma,f}(\Theta(z, x), x)\, dx = o(1), \quad \delta \to 0. \tag{3}$$

Тогда существуют непрерывные продолжения Φ^+, Φ^- *интеграла* Φ *соответственно из областей* D^+, D^- *в их замыкания* $\overline{D^+}$, $\overline{D^-}$ *и для модулей непрерывности* ω_{Γ,Φ^+}, ω_{Γ,Φ^-}, $\omega_{\overline{D^+},\Phi^+}$, $\omega_{\overline{D^-},\Phi^-}$ *справедливы оценки вида* (2).

Для доказательства данных теорем нам понадобятся две леммы.

Лемма 1. *Пусть* $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ *— положительные числа,* $\sigma := \sum_{k=1}^{n} \delta_k$, *функция* $\omega\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *— неубывающая. Тогда*

$$\sum_{k=1}^{n} \omega(\delta_k) \le 2\,\sigma\,\Omega\left(\frac{\sigma}{n}, \sigma\right). \tag{4}$$

Доказательство. Обозначим

$$E_1 := \left\{k\colon \delta_k \le \frac{\sigma}{n}\right\}, \quad E_2 := \left\{k\colon \delta_k > \frac{\sigma}{n}\right\}.$$

Пусть m — количество элементов множества E_1. Тогда

$$\sum_{k \in E_1} \omega(\delta_k) \le m\,\omega\left(\frac{\sigma}{n}\right) \le \frac{m\sigma}{n}\,\Omega\left(\frac{\sigma}{n}, \sigma\right),$$

$$\sum_{k \in E_2} \omega(\delta_k) = \sum_{k \in E_2} \delta_k \frac{\omega(\delta_k)}{\delta_k} \le \sum_{k \in E_2} \delta_k \Omega\left(\frac{\sigma}{n}, \sigma\right) \le \sigma\, \Omega\left(\frac{\sigma}{n}, \sigma\right),$$

откуда и следует оценка (4).

Применяя к оценке (4) свойства 1, 2 функции Ω, получаем такое следствие.

Следствие. Если при условиях леммы 1 *выполняется неравенство* $\sigma \le \delta$, *то*

$$\sum_{k=1}^{n} \omega(\delta_k) \le 2\delta\, \Omega\left(\frac{\delta}{n}, \delta\right). \tag{5}$$

Лемма 2. *Пусть* Γ — *замкнутая жорданова спрямляемая кривая,* $z_0 \in \mathbb{C}$, ζ_0 — *ближайшая к* z_0 *точка кривой* Γ, $\zeta_1 \in \Gamma$, $\delta > 0$, $\delta_1 \ge |\zeta_0 - \zeta_1|$, γ — *произвольное из двух множеств*: $(\Gamma_{\zeta_0, 2\delta} \setminus \Gamma_{\zeta_0, \delta}) \cap \Gamma_{\zeta_1, \delta_1}$ *или* $(\Gamma_{\zeta_0, 2\delta} \setminus \Gamma_{\zeta_0, \delta}) \setminus \Gamma_{\zeta_1, \delta_1}$, $\gamma \ne \varnothing$, *функция* $f\colon \Gamma \to \mathbb{C}$ *равномерно непрерывна на* γ. *Тогда*

$$\left| \int_{\gamma} \frac{f(\zeta) - f(\zeta_0)}{\zeta - z_0}\, d\zeta \right| \le c \left(\int_{\delta/2}^{\delta} \Omega_{\gamma, f}(\Theta(\zeta_0, x), 2hx)\, dx + M_{f, \zeta_0, \gamma} \right), \tag{6}$$

где $M_{f,\zeta_0\gamma} = \sup\limits_{\zeta \in \gamma} |f(\zeta) - f(\zeta_0)|$, c — *абсолютная постоянная,* $h :=$ $:= \begin{cases} 1 & \text{при } z_0 = \zeta_0; \\ 2 & \text{при } z_0 \ne \zeta_0. \end{cases}$

Доказательство. Применяемые нами методы доказательства леммы 2 и теоремы 1 являются развитием методов Т. С. Салимова [11], основанных на разделении вещественной и мнимой частей оцениваемого интеграла и подынтегральной функции, а также специальном способе дробления кривой.

Множество γ представимо в виде объединения не более чем счетной совокупности дуг, являющихся его связными компонентами, и замкнутого множества, расположенного на ограничивающих γ окружностях. Поэтому существует объединение $\tilde{\gamma}$ такой конечной совокупности указанных дуг, что $\operatorname{mes}(\gamma \setminus \tilde{\gamma}) \le (1 + 4\pi)\delta$.

Пусть

$$I(\gamma^*) := \int_{\gamma^*} \frac{f(\zeta) - f(\zeta_0)}{\zeta - z_0}\, d\zeta,$$

где γ^* — любое измеримое вдоль кривой подмножество кривой γ. Имеем $|I(\gamma)| \le |I(\gamma \setminus \tilde{\gamma})| + |\operatorname{Re} I(\tilde{\gamma})| + |\operatorname{Im} I(\tilde{\gamma})|$.

Учитывая неравенство

$$|\zeta - z_0| \ge \frac{\delta}{h} \quad \forall\, \zeta \in \gamma, \tag{7}$$

получаем

$$|I(\gamma \setminus \tilde{\gamma})| \le \int_{\gamma \setminus \tilde{\gamma}} \frac{|f(\zeta) - f(\zeta_0)|}{|\zeta - z_0|} |d\zeta| \le h(1 + 4\pi) M_{f, \zeta_0, \gamma}. \tag{8}$$

Пусть функция f — вещественна (общий случай приводится к данному). Чтобы оценить $|\operatorname{Im} I(\tilde{\gamma})|$, разобьем множество $\tilde{\gamma}$ лучами $\{\zeta\colon \arg(\zeta - z_0) = \varphi_m\}$, $m = 1, 2, \ldots, k$; $-\pi = \varphi_0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \ldots < \varphi_k = \pi$, так, чтобы концы всех образовавшихся при этом дуг принадлежали этим лучам и выполнялось условие

$$\max_{1\le m\le k}\Delta\varphi_m \le 2\min_{1\le m\le k}\Delta\varphi_m, \tag{9}$$

где $\Delta\varphi_m=\varphi_m-\varphi_{m-1}$. Очевидно, $\tilde\gamma=\bigcup_{m=1}^k\tilde\gamma_m$, где

$$\tilde\gamma_m := \{\zeta\in\tilde\gamma:\ \varphi_{m-1}<\arg(\zeta-z_0)\le\varphi_m\}.$$

Рассмотрим представление $\tilde\gamma_m=\tilde\gamma_{m,1}\cup\tilde\gamma_{m,2}\cup\tilde\gamma_{m,3}$, где $\tilde\gamma_{m,1}=\bigcup_j\tilde\gamma_{m,1,j}$ — объединение не более чем счетного множества попарно не пересекающихся открытых дуг с концами на одном и том же луче, $\tilde\gamma_{m,2}=\bigcup_j\tilde\gamma_{m,2,j}$ — объединение конечного множества попарно не пересекающихся открытых дуг с концами на разных лучах, $\tilde\gamma_{m,3}$ — пересечение $\tilde\gamma_m$ с m-м лучом. Очевидно, $\operatorname{Im} I(\tilde\gamma_{m,3})=0$.

Пусть τ_j — один из концов дуги $\tilde\gamma_{m,1,j}$, $\lambda:=\max\limits_{l=1,2}\max\limits_{m,j}\operatorname{mes}\tilde\gamma_{m,l,j}$. Учитывая равенство $\operatorname{Im}\int_{\tilde\gamma_{m,1,j}}\frac{d\zeta}{\zeta-z_0}=0$ и неравенство (7), имеем

$$|\operatorname{Im} I(\tilde\gamma_{m,1})| \le \left|\sum_j \operatorname{Im} I(\tilde\gamma_{m,1,j})\right| = \left|\sum_j \operatorname{Im}\int\limits_{\tilde\gamma_{m,1,j}}\frac{f(\zeta)-f(\tau_j)}{\zeta-z_0}d\zeta\right| \le$$

$$\le \sum_j \omega_{\gamma,f}(\operatorname{mes}\tilde\gamma_{m,1,j})\int\limits_{\tilde\gamma_{m,1,j}}\left|\operatorname{Im}\frac{d\zeta}{\zeta-z_0}\right| \le$$

$$\le \sum_j \omega_{\gamma,f}(\lambda)\frac{h\operatorname{mes}\tilde\gamma_{m,1,j}}{\delta} = \frac{h\,\omega_{\gamma,f}(\lambda)\operatorname{mes}\tilde\gamma_{m,1}}{\delta}. \tag{10}$$

Пусть τ_j, $j=1,2,\ldots,n$, — конец дуги $\tilde\gamma_{m,2,j}$, принадлежащий $(m-1)$-му, а η_j — m-му лучам и $|z_0-\tau_j|$ убывает с возрастанием j. Тогда аналогично (10) получаем

$$|\operatorname{Im} I(\tilde\gamma_{m,2})| \le \frac{h\,\omega_{\gamma,f}(\lambda)\operatorname{mes}\tilde\gamma_{m,2}}{\delta} + \left|\sum_{j=1}^n (f(\tau_j)-f(\zeta_0))\int\limits_{\tilde\gamma_{m,2,j}}\operatorname{Im}\frac{d\zeta}{\zeta-z_0}\right|. \tag{11}$$

Если дуга $\tilde\gamma_{m,2,j}$ ориентирована от τ_j к η_j, то $\tilde\gamma_{m,2,j+1}$ — от η_{j+1} к τ_{j+1}. Поэтому при $n>1$ второе слагаемое правой части (11) оценивается выражением

$$\left(\sum_{q=1}^{[n/2]}|f(\tau_{2q-1})-f(\tau_{2q})| + 2\left\{\frac{n}{2}\right\}|f(\tau_n)-f(\zeta_0)|\right)\Delta\varphi_m \le$$

$$\le \left(\sum_{q=1}^{[n/2]}\omega_{\gamma,f}(|\tau_{2q-1}-\tau_{2q}|) + M_{f,\zeta_0,\gamma}\right)\Delta\varphi_m \tag{12}$$

(при $n=1$ первое слагаемое в скобках исчезает).

Легко видеть, что $\sum_{q=1}^{[n/2]}|\tau_{2q-1}-\tau_{2q}|\le h\delta$ и $h\operatorname{mes}\tilde\gamma_{m,2}\ge 2[n/2]\Delta\varphi_m\delta$. Применяя неравенство (5), а затем свойство 1 функции $\Omega_{\gamma,f}$, имеем

$$\sum_{q=1}^{[n/2]}\omega_{\gamma,f}(|\tau_{2q-1}-\tau_{2q}|) \le 2h\delta\,\Omega_{\gamma,f}\left(\frac{h\delta}{[n/2]},h\delta\right) \le 2h\delta\,\Omega_{\gamma,f}(u_1,h\delta), \tag{13}$$

где $u_1:=2\delta^2\Delta\varphi_m/\operatorname{mes}\tilde\gamma_{m,2}$.

Учитывая неравенства (10) – (13), получаем

$$|\operatorname{Im} I(\tilde{\gamma})| \leq \frac{h\,\omega_{\gamma,f}(\lambda)\operatorname{mes}\tilde{\gamma}}{\delta} + 2\pi M_{f,\zeta_0,\gamma} + \sum_{m\in E} 2h\delta\,\Delta\varphi_m\,\Omega_{\gamma,f}(u_1, h\delta), \quad (14)$$

где E — множество тех m, для которых $\tilde{\gamma}_{m,2}$ содержит более одной дуги.

Пусть p — количество элементов множества E, $\sigma := \sum_{m\in E}\operatorname{mes}\tilde{\gamma}_{m,2}$, $s := \sum_{m\in E}\Delta\varphi_m$. Применяя неравенство (9) и свойства 1, 2 функции $\Omega_{\gamma,f}$, получаем

$$\Delta\varphi_m\,\Omega_{\gamma,f}(u_1, h\delta) \leq \begin{cases} \dfrac{2s\operatorname{mes}\tilde{\gamma}_{m,2}}{\sigma}\,\Omega_{\gamma,f}(u_2, h\delta) & \text{при}\ \ \sigma \leq p\operatorname{mes}\tilde{\gamma}_{m,2}; \\[2mm] \dfrac{2s}{p}\,\Omega_{\gamma,f}(u_2, h\delta) & \text{при}\ \ \sigma > p\operatorname{mes}\tilde{\gamma}_{m,2}, \end{cases}$$

где $u_2 := 4\delta^2 s/\sigma$. Поэтому

$$\sum_{m\in E} 2h\delta\,\Delta\varphi_m\,\Omega_{\gamma,f}(u_1, h\delta) \leq 8h\delta s\,\Omega_{\gamma,f}(u_2, h\delta) \leq 16\pi h\delta\,\Omega_{\gamma,f}(u_3, h\delta), \quad (15)$$

где

$$u_3 := \frac{8\pi\delta^2}{\theta_{\zeta_0}(2\delta) - \theta_{\zeta_0}(\delta)},$$

$$h\delta\,\Omega_{\gamma,f}(u_3, h\delta) = \int_{h\delta}^{2h\delta}\Omega_{\gamma,f}(u_3, h\delta)\,dx \leq 2h\int_{\delta/2}^{\delta}\Omega_{\gamma,f}(\Theta(\zeta_0, x), 2hx)\,dx. \quad (16)$$

Из соотношений (14) – (16) следует оценка вида (6) для $|\operatorname{Im} I(\tilde{\gamma})|$, если устремить λ к нулю путем измельчения разбиения.

Аналогично оценивается и $|\operatorname{Re} I(\tilde{\gamma})|$. Лемма 2 доказана.

***Доказательство теоремы* 1.** Из неравенства (1) следует условие $\omega_{\Gamma,f}(\delta) = o(1)$, $\delta \to 0$, обеспечивающее равномерную непрерывность функции f на кривой Γ.

Докажем существование интеграла F на кривой Γ. Зафиксируем произвольную точку $z \in \Gamma$. Пусть $n \in \mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел), $d_n = d/2^{n-1}$, $\Gamma_n := \Gamma_{z,d_n} \setminus \Gamma_{z,d_{n+1}}$. Согласно лемме 2 (полагая $z_0 = z$) и свойству 4 функции $\Omega_{\Gamma,f}$ имеем

$$|I(\Gamma_n)| \leq c\left(\int_{d_{n+2}}^{d_{n+1}}\Omega_{\Gamma,f}(\Theta(z,x), 2x)\,dx + M_{f,z,\Gamma_n}\right).$$

А так как

$$M_{f,z,\Gamma_n} \leq \omega_{\Gamma,f}(d_n) \leq 2\int_{d_n}^{2d_n}\Omega_{\Gamma,f}(\Theta(z,x), x)\,dx,$$

то, пользуясь определением и свойством 3 функции $\Omega_{\Gamma,f}$, а также монотонностью модуля непрерывности $\omega_{\Gamma,f}$, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\operatorname{Im} I(\Gamma_n)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} c\left(\int_{d_{n+2}}^{d_{n+1}}(\Omega_{\Gamma,f}(\Theta(z,x), x) + \Omega_{\Gamma,f}(x, 2x))\,dx +\right.$$

$$+ \; 2 \int\limits_{d_n}^{2d_n} \Omega_{\Gamma,f}(\Theta(z,x),x)\,dx \Bigg) \le 4\,c \int\limits_{0}^{2d} \Omega_{\Gamma,f}(\Theta(z,x),x)\,dx\,. \tag{17}$$

Следовательно, в силу условия (1) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} I(\Gamma_n)$ абсолютно сходится, поэтому сходится и несобственный интеграл F.

Пусть $\delta > 0$. Рассмотрим произвольные точки $z_1, z_2 \in \Gamma$ такие, что $\delta_1 := := |z_1 - z_2| \le \delta$. Обозначим $\gamma := \Gamma_{z_1, 2\delta_1}$. Тогда

$$2\pi i(F(z_1) - F(z_2)) = \int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta) - f(z_1)}{\zeta - z_1}\,d\zeta - \int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta) - f(z_2)}{\zeta - z_2}\,d\zeta \; +$$

$$+ \; (z_1 - z_2) \int\limits_{\Gamma\setminus\gamma} \frac{f(\zeta) - f(z_2)}{(\zeta - z_1)(\zeta - z_2)}\,d\zeta \; + \int\limits_{\Gamma\setminus\gamma} \frac{f(z_2) - f(z_1)}{\zeta - z_1}\,d\zeta =:$$

$$=: I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \tag{18}$$

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $a_n := 2^{2-n}\delta_1$, $b_n := 3a_n/2$, $\gamma_{1,n} := \gamma_{z_1, a_n} \setminus \gamma_{z_1, a_{n+1}}$, $\gamma_{2,n} := \gamma_{z_2, b_n} \setminus \setminus \gamma_{z_2, b_{n+1}}$. Аналогично (17) получаем

$$|I_1| \le \sum_{n=1}^{\infty} \left| \int\limits_{\gamma_{1,n}} \frac{f(\zeta) - f(z_1)}{\zeta - z_1}\,d\zeta \right| \le 2\,c \int\limits_{0}^{2\delta_1} \Omega_{\Gamma,f}(\Theta(z_1,x),x)\,dx \; +$$

$$+ \; 2\,c \int\limits_{2\delta_1}^{4\delta_1} \Omega_{\Gamma,f}(\Theta(z_1,x),x)\,dx \le 22\,c \int\limits_{0}^{2d} \Omega_{\Gamma,f}(\Theta(z_1,x),x)\,\frac{dx}{1 + x/\delta}, \tag{19}$$

$$|I_2| \le \sum_{n=1}^{\infty} \left| \int\limits_{\gamma_{2,n}} \frac{f(\zeta) - f(z_2)}{\zeta - z_2}\,d\zeta \right| \le 50\,c \int\limits_{0}^{2d} \Omega_{\Gamma,f}(\Theta(z_2,x),x)\,\frac{dx}{1 + x/\delta}, \tag{20}$$

$$|I_4| \le 2\pi\,\omega_{\gamma,f}(\delta_1) \le 4\pi \int\limits_{0}^{2\delta_1} \Omega_{\Gamma,f}(\Theta(z_1,x),x)\,dx \le$$

$$\le 12\,\pi \int\limits_{0}^{2d} \Omega_{\Gamma,f}(\Theta(z_1,x),x)\,\frac{dx}{1 + x/\delta}. \tag{21}$$

Оценим $|I_3|$. Пусть $\Gamma\setminus\gamma$ не пусто. Тогда существует $\nu \in \mathbb{N}$ такое, что $d \le \le 2^{\nu}\delta_1 < 2\,d$. Имеем

$$\int\limits_{\Gamma\setminus\gamma} \frac{f(\zeta) - f(z_2)}{(\zeta - z_1)(\zeta - z_2)}\,d\zeta = \sum_{n=1}^{\nu} \int\limits_{\tilde{\Gamma}_n} \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(z_2)}{\zeta - z_2}\,d\zeta, \tag{22}$$

где $\varphi(\zeta) := \dfrac{f(\zeta) - f(z_2)}{\zeta - z_1}$, $\tilde{\Gamma}_n := (\Gamma_{z_2, \delta_{n+1}} \setminus \Gamma_{z_2, \delta_n}) \setminus \gamma$, $\delta_n := 2^{n-1}\delta_1$, $n = 1, 2, \ldots$ $\ldots, \nu$. Согласно лемме 2 получаем

$$\left| \int\limits_{\tilde{\Gamma}_n} \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(z_2)}{\zeta - z_2}\,d\zeta \right| \le c \left(\int\limits_{\delta_n/2}^{\delta_n} \Omega_{\tilde{\Gamma}_n,\varphi}(\Theta(z_2,x),2x)\,dx + M_{\varphi, z_2, \tilde{\Gamma}_n} \right), \tag{23}$$

$$M_{\varphi, z_2, \tilde{\Gamma}_n} \leq \frac{8}{3\delta_{n+1}} \omega_{\Gamma, f}(\delta_{n+1}) \leq \frac{32}{3} \int\limits_{\delta_{n+1}}^{2\delta_{n+1}} \Omega_{\Gamma, f}(\Theta(z_2, x), x) \frac{dx}{x}. \tag{24}$$

Чтобы оценить подынтегральную функцию в правой части неравенства (23), для произвольного $t \in (0, \delta_{n+1})$ рассмотрим произвольные точки $\zeta_1, \zeta_2 \in \tilde{\Gamma}_n$, удовлетворяющие условию $|\zeta_1 - \zeta_2| \leq t$. Применяя очевидные неравенства

$$|\varphi(\zeta_1) - \varphi(\zeta_2)| \leq \left| \frac{(f(\zeta_2) - f(z_2))(\zeta_1 - \zeta_2)}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_1)} \right| + \left| \frac{f(\zeta_1) - f(\zeta_2)}{\zeta_1 - z_1} \right|,$$

$|\zeta_2 - z_2| \leq \delta_{n+1}$, $|\zeta_q - z_1| \geq 3\delta_n/4$, $q = 1, 2$, и определение модуля непрерывности, имеем

$$\omega_{\tilde{\Gamma}_{n,\varphi}}(t) \leq \frac{16t}{9\delta_n^2} \omega_{\Gamma, f}(\delta_{n+1}) + \frac{4}{3\delta_n} \omega_{\Gamma, f}(t). \tag{25}$$

Из оценок (23) – (25) следует

$$\left| \int\limits_{\tilde{\Gamma}_n} \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(z_2)}{\zeta - z_2} d\zeta \right| \leq$$

$$\leq c \left(\frac{160}{9} \int\limits_{\delta_{n+1}}^{2\delta_{n+1}} \Omega_{\Gamma, f}(\Theta(z_2, x), x) \frac{dx}{x} + \frac{4}{3} \int\limits_{\delta_n/2}^{\delta_n} \Omega_{\Gamma, f}(\Theta(z_2, x), 2x) \frac{dx}{x} \right).$$

Поэтому, учитывая равенство (22), аналогично (17) получаем

$$|I_3| \leq c\,\delta_1 \left(\frac{160}{9} \int\limits_{2\delta_1}^{2^{\nu+1}\delta_1} + \frac{4}{3} \int\limits_{\delta_1/2}^{2^{\nu-1}\delta_1} + \frac{8}{3} \int\limits_{\delta_1}^{2^{\nu}\delta_1} \right) \Omega_{\Gamma, f}(\Theta(z_2, x), x) \frac{dx}{x} \leq$$

$$\leq 63\, c \int\limits_0^{2d} \Omega_{\Gamma, f}(\Theta(z_2, x), x) \frac{dx}{1 + x/\delta}. \tag{26}$$

Из соотношений (18) – (21), (26) следует справедливость теоремы 1.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим случай непрерывного продолжения Φ^+ (для Φ^- доказательство аналогично). Пусть ζ_0 — произвольная точка кривой Γ, l — длина кривой Γ, $\zeta = \zeta(s)$ — уравнение кривой Γ с натуральным параметром $s \in [0, l]$, $\zeta_0 = \zeta(0)$, $\delta > 0$, $\Gamma(\zeta_0, \delta) := \{\zeta(s) : s \in \in [0, \delta] \cup [l - \delta, l]\}$.

Легко видеть, что из условия (3) следует непрерывность функции f на Γ, а также существование и непрерывность на Γ интеграла F. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Существует $\delta_1 > 0$ такое, что для произвольного $\zeta \in \Gamma(\zeta_0, \delta_1)$ верно неравенство

$$|F(\zeta) + f(\zeta) - F(\zeta_0) - f(\zeta_0)| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{27}$$

Пусть (см. [13]) $\alpha(\delta) := \inf\limits_{\zeta_0 \in \Gamma} \rho(\zeta_0, \Gamma \setminus \Gamma(\zeta_0, \delta))$, где $0 < \delta < \delta_1$, ρ — евклидово расстояние от точки ζ_0 до множества $\Gamma \setminus \Gamma(\zeta_0, \delta)$. Известно [13], что $\alpha(\delta) > 0$.

Пусть $\beta \in (0, \alpha(\delta))$. Рассмотрим произвольную последовательность точек $z_n \in D^+$ такую, что $|z_n - \zeta_0| < \beta/3$, $z_n \to \zeta_0$. Пусть ζ_n — ближайшая к z_n точка кривой Γ. Очевидно, $\zeta_n \in \Gamma(\zeta_0, \delta_1)$. Имеем

$$
\begin{gathered}
|\Phi(z_n) - (F(\zeta_0) + f(\zeta_0))| \le \\
\le |\Phi(z_n) - (F(\zeta_n) + f(\zeta_n))| + |F(\zeta_n) + f(\zeta_n) - F(\zeta_0) - f(\zeta_0)|,
\end{gathered} \tag{28}
$$

$$
\begin{gathered}
2\pi i(\Phi(z_n) - F(\zeta_n) - f(\zeta_n)) = \int\limits_{\Gamma_{\zeta_0,\beta}} \frac{f(\zeta) - f(\zeta_n)}{\zeta - z_n}\, d\zeta - \int\limits_{\Gamma_{\zeta_0,\beta}} \frac{f(\zeta) - f(\zeta_n)}{\zeta - \zeta_n}\, d\zeta + \\
+ \int\limits_{\Gamma \setminus \Gamma_{\zeta_0,\beta}} \frac{(f(\zeta) - f(\zeta_n))(z_n - \zeta_n)}{(\zeta - z_n)(\zeta - \zeta_n)}\, d\zeta = I_5 + I_6 + I_7 .
\end{gathered} \tag{29}
$$

Проводя рассуждения, аналогичные приведенным выше при доказательстве неравенства (17) (с применением леммы 2), нетрудно показать, что $|I_5|$ и $|I_6|$ оцениваются выражением

$$
6c \int\limits_0^{10\beta/3} \Omega_{\Gamma, f}(\Theta(\zeta_n, x), x)\, dx ,
$$

которое в силу условия (3) будет меньше $\pi\varepsilon/2$ при достаточно малом β. Зафиксируем такое β. Легко видеть, что $|I_7| \le 9Mlr_n/\beta^2$, где $M := \max\limits_{\zeta \in \Gamma} |f(\zeta)|$, $r_n := |\zeta_n - z_n|$. Поэтому существует $\beta_1 > 0$ такое, что при $r_n < \beta_1$ будет $|I_7| \le \pi\varepsilon/2$. Для этого достаточно потребовать, чтобы $|z_n - \zeta_0| < \beta_1$.

Из соотношений (27) – (29) и приведенных рассуждений следует непрерывная продолжимость интеграла Φ в замкнутые области $\overline{D^+}$, $\overline{D^-}$ и справедливость известных формул (см. [13]):

$$
\Phi^+(\zeta) = F(\zeta) + f(\zeta), \quad \Phi^-(\zeta) = F(\zeta), \quad \zeta \in \Gamma .
$$

Для завершения доказательства теоремы 2 достаточно воспользоваться оценкой (2) и контурно-телесным результатом П. М. Тамразова (см. [14, с. 139]).

1. *Салаев В. В.* Прямые и обратные оценки для особого интеграла Коши по замкнутой кривой // Мат. заметки. – 1976. – **19**, № 3. – С. 365–380.
2. *Zygmund A.* Sur le module continuité de la série conjuguée de la série de Fourier // Pr. Mat.-Fiz. – 1924. – **33**. – P. 125–132.
3. *Магнарадзе Л. Г.* Об одном обобщении теоремы Племеля–Привалова // Сообщ. АН ГССР. – 1947. – **8**, № 8. – С. 509–516.
4. *Магнарадзе Л. Г.* Об одном обобщении теоремы И. И. Привалова и его применение к некоторым линейным граничным задачам теории функций и к сингулярным интегральным уравнениям // Докл. АН СССР. – 1949. – **68**, № 4. – С. 657–660.
5. *Бабаев А. А.* Об особом интеграле с непрерывной плотностью // Уч. зап. Азерб. ун-та. Сер. физ.-мат. и хим. наук. – 1965. – № 5. – С. 11–28.
6. *Тамразов П. М.* Об ограниченных голоморфных функциях в комплексной области // 3-й съезд болг. матем. Резюмета на докладите III конгрес на Болгарските математици. Ч. 1. – Варна. – 1972. – С. 186–187.
7. *Бабаев А. А., Салаев В. В.* Одномерный сингулярный оператор с непрерывной плотностью по замкнутой кривой // Докл. АН СССР. – 1973. – **209**, № 6. – С. 1257–1260.
8. *Тамразов П. М.* Гладкости и полиномиальные приближения. – Киев: Наук. думка, 1975. – 272 с.
9. *Герус О. Ф.* Конечноразностные гладкости интегралов типа Коши // Укр. мат. журн. – 1977. – **29**, № 5. – С. 642–646.
10. *Герус О. Ф.* Некоторые оценки модулей гладкости интегралов типа Коши // Там же. – 1978. – **30**, № 5. – С. 594–601.
11. *Салимов Т. С.* Прямая оценка для сингулярного интеграла Коши по замкнутой кривой // Науч. тр. МВ и ССО АзССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1979, № 5. – С. 59–75.
12. *Дынькин Е. М.* Гладкость интегралов типа Коши // Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. – 1979. – **92**. – С. 115–133.
13. *Давыдов Н. А.* Непрерывность интеграла типа Коши в замкнутой области // Докл. АН СССР. – 1949. – **64**, № 6. – С. 759–762.
14. *Тамразов П. М.* Контурные и телесные структурные свойства голоморфных функций комплексного переменного // Успехи мат. наук. – 1973. – **28**, № 1. – С. 131–161.

Получено 11.10.95